Ecricome 2001, option scientifique.

EXERCICE 1

Soient a et b deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant chacune une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b .

1) Déterminer la fonction de répartition, puis une densité, de la variable aléatoire $-X$.

2) Montrer que $Y - X$ admet une densité, notée h , définie par

$$h(t) = \frac{ab}{a+b} e^{-bt} \quad \text{pour } t > 0 \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{ab}{a+b} e^{at} \quad \text{pour } t \leq 0$$

On considère la variable aléatoire $Z = |X - Y|$.

3) Soit s un réel positif. Etablir l'égalité : $P(Z \leq s) = 1 - \frac{be^{-as} + ae^{-bs}}{a+b}$.

4)a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

b) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

EXERCICE 2

Soient n un entier ≥ 2 et E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. I est la matrice identité de E . On note tA la transposée d'un élément A de E . Si $A = (a_{i,j})$ appartient à E , on appelle trace de A et on note $\text{tr}(A)$, la somme $a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{n,n}$ des éléments diagonaux de A .

On considère l'application g de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, qui à deux matrices A et B de E fait correspondre le réel $g(A, B) = \text{tr}({}^tAB)$.

1) Montrer que l'application tr qui à tout élément de E associe sa trace, est une forme linéaire sur E .

2)a) Soit M une matrice de E . Montrer que $\text{tr}(M) = \text{tr}({}^tM)$.

b) En déduire que, pour tout couple (A, B) de matrices de E , on a $g(A, B) = g(B, A)$.

3) Soit A un élément de E . Montrer que $g(A, A)$ est la somme des carrés des coefficients de A .

4) Montrer, à (aide des questions précédentes, que g est un produit scalaire sur E .

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par : $f(e_1) = e_n$ et, pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$, $f(e_k) = e_{k-1}$

5)a) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b) Soit U la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $U^n = I$ et que $U^{-1} = {}^tU$.

On suppose, pour les deux questions suivantes, que $n = 4$.

6) Calculer U^2 et U^3 et montrer que (I, U, U^2, U^3) est une famille orthogonale pour le produit scalaire g .

7) On note F le sous espace vectoriel de E engendré par la famille (I, U, U^2, U^3) et V la matrice de E dont la première ligne est constituée de 1 et les autres uniquement de 0. Calculer la projection orthogonale W de V sur F .

PROBLÈME

Dans tout le problème, n est un entier positif ou nul, a un entier pair supérieur ou égal à 4 et p un réel tel que $0 < p < 1$. Pour simplifier les écritures, on pose $a_n = 2^{n-1}a$.

Un jeu est une succession de jets d'une pièce qui fait pile avec la probabilité p . Un joueur dispose initialement d'une fortune a . On note F_n la variable aléatoire égale à la fortune du joueur à l'issue du n -ième lancer. On convient que F_0 est la variable aléatoire certaine égale à a . On obtient la fortune F_{n+1} à partir de F_n de la manière suivante :

avant le lancer $n + 1$, le joueur mise une partie X_n , entière, de sa fortune sur pile et l'autre partie, $F_n - X_n$, sur face. Si le lancer $n + 1$ fait apparaître pile, la fortune F_{n+1} est égale à $2X_n$, s'il fait apparaître face, la fortune F_{n+1} est égale à $2(F_n - X_n)$. Ainsi, à tout instant, la fortune du joueur est un entier pair, éventuellement nul.

On étudie, dans ce problème, deux exemples (parties 1 et 2) dans lesquels les mises X_n , sont des *variables aléatoires*. A cet effet, on associe aux variables aléatoires F_n des polynômes G_n dont les propriétés générales sont établies en préliminaire. Ces polynômes servent à obtenir des informations sur l'évolution de la fortune du joueur tout au long du jeu.

$E(X)$ et $V(X)$ désignent, quand elles existent, l'espérance et la variance de X .

Résultats préliminaires.

- 1) Pour tout entier positif ou nul n , montrer que F_n prend ses valeurs dans $\{0, 2, 4, \dots, 2a_n\}$.
Pour tout entier positif ou nul n , on définit le polynôme G_n par :
$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{a_n} P(F_n = 2k)x^k.$$
- 2)a) Calculer $G_n(1)$.
b) Que représente concrètement $G_n(0)$? Montrer, à l'aide d'un argument probabiliste, que la suite de terme général $G_n(0)$ est croissante et convergente.
c) Montrer que $G_n'(1) = \frac{E(F_n)}{2}$. Etablir de même que $V(F_n) = 4G_n''(1) + 2E(F_n) - E(F_n)^2$.
- 3) Montrer que le polynôme G_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

Partie 1

Soit n un entier positif ou nul et k un entier tel que $0 \leq k \leq a_n$. On suppose dans cette partie que la loi conditionnelle de X_n sachant $(F_n = 2k)$ est une loi uniforme sur $[[0, 2k]]$.

- 1) Etablir, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq 2k$, l'égalité :

$$P((F_{n+1} = 2j) \cap (F_n = 2k)) = \frac{1}{2k+1}P(F_n = 2k)$$

(On pourra utiliser le système complet d'événements constitué par les deux résultats possibles du lancer $n + 1$.)

- 2) En déduire, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq a_{n+1}$, une expression sommatoire de $P(F_{n+1} = 2j)$.
- 3) Montrer que pour x appartenant à $[0, 1[$,
$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{a_n} \frac{x^{2k+1} - 1}{(2k+1)(x-1)} P(F_n = 2k).$$
- 4) En déduire, pour x appartenant à $\mathbb{R}$, l'égalité : $(1-x)G_{n+1}(x) = \int_x^1 G_n(t^2) dt \quad (1)$
- 5) Prouver, en dérivant deux fois cette égalité, que pour tout $n \geq 0$, on a $E(F_n) = a$.

Partie 2 (Les deux sous parties A et B sont indépendantes)

On suppose maintenant que la loi conditionnelle de la variable X_n sachant $(F_n = 2k)$ est une loi binomiale de paramètres $2k$ et r , r étant un réel de $]0, 1[$.

A. Simulation informatique de l'expérience

On considère le programme suivant

```
program simulation ;
var a,n,i,X,F : integer ;
    r,p :real ; '
fonction mise(m :integer,s :real) :integer ;
    .....
end ;
begin
  randomize ; readln(n) ; readln(p) ; readln(r) ; readln(a) ; F := a ;
  for i :=1 to n do begin
    X :=mise(F,r) ;
    if random < p then .....
    .....
  end ;
end.
```

La fonction "random" est une fonction sans argument. A son appel, l'ordinateur génère un nombre aléatoire compris entre 0 et 1, nombre qui suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. L'instruction "randomize" est utilisée pour obliger l'ordinateur à générer un nouveau nombre à chaque appel de la fonction.

La fonction "mise" est une fonction qui simule une loi binomiale de paramètres m et s . Elle doit donc prendre, à chaque appel, une valeur aléatoire entière comprise au sens large entre 0 et m , la probabilité qu'elle prenne une valeur donnée étant celle fournie par la loi binomiale de paramètres m et s .

- 1) Rédiger les lignes manquantes (déclarations et instructions) dans la définition de la fonction "mise".
- 2) Rédiger les instructions manquantes du corps principal du programme de telle sorte que celui-ci calcule et affiche les fortunes successives $F_1, \dots, F_n$ du joueur, les paramètres a, r, p, n étant fournis par l'utilisateur.

B. Etude théorique

Dans toute cette partie, on posera $A = pr^2 + (1-p)(1-r)^2$ et $B = 2[pr + (1-p)(1-r)]$.

- 1) En procédant comme dans les trois premières questions de la première partie, montrer que pour tout réel x et tout entier $n \geq 0$, on a :

$$G_{n+1}(x) = pG_n[(xr + 1 - r)^2] + (1-p)G_n[(x - xr + r)^2]. \quad (2)$$

Dans les questions 2 et 3, on suppose que $p = \frac{1}{2}$.

On considère le trinôme Q , défini par $Q(x) = Ax^2 + 2r(1-r)x + A$, et la suite (u_n) définie par la condition initiale $u_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 0$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = Q(u_n)$.

- 2)a) Montrer, pour tout réel x , l'égalité : $Q(x) = x + A(x-1)^2$.
b) Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par Q .
c) Montrer que la suite (u_n) est croissante et convergente. Donner la valeur de sa limite.
- 3)a) Montrer, en utilisant (2) et la convexité de G_n , que, pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x \geq 0$, on a l'inégalité : $G_{n+1}(x) \geq G_n(Q(x))$.
b) Etablir, pour tout entier $n \geq 0$, l'inégalité : $G_{n+1}(0) \geq G_1(u_n)$. Conclure.

On revient au cas général p quelconque.

- 4)a) Montrer à l'aide de (2), que la suite $(E(F_n))_n$ est géométrique de raison B .
b) En posant $p' = \frac{1}{2} - p$ et $r' = \frac{1}{2} - r$, étudier la limite de cette suite suivant les valeurs de p et r .

- c) Montrer que si la suite $((E(F_n))_n$ tend vers 0, alors la suite $(P(F_n = 0))_n$ tend vers 1.
- 5)a) Pour tout entier $n \geq 0$, établir à l'aide de (2) une relation entre $G''_{n+1}(1)$, $G''_n(1)$ et $G'_n(1)$.
- b) Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{G''_n(1)}{B^n}$ est arithmético-géométrique.
- c) En déduire, pour tout entier $n \geq 0$, une expression explicite de $G''_n(1)$ en fonction de a , n , A , B .

On suppose, dans cette dernière question, que $p = r = \frac{1}{3}$.

- 6)a) Calculer les trois réel A , B , B^2 et en déduire un équivalent de $V(F_n)$ quand n tend vers l'infini.
- b) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, que la probabilité $P(F_n < 2^{n/4}a)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. (On utilisera les inégalités : $2^{\frac{1}{4}} > \frac{10}{9}$ et $3\sqrt{2} > 4$.)