Ecricome 2003, option S.

EXERCICE 1

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + u_n^2 \\ u_0 = a, \ a \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

Partie 1 *Convergence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1) Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.

2) Montrer que cette suite diverge vers l'infini.

Partie 2 *Comportement asymptotique de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = \dfrac{1}{2^n} \ln u_n$

1) Prouver que pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + \dfrac{1}{u_n})$.
En déduire que quels que soient les entiers naturels p et n :

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln(1 + \frac{1}{u_n})$$

2) En déduire que quels que soient les entiers naturels k et n

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln(1 + \frac{1}{u_n})$$

3) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée .

4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \exp(\ 2^n)$
En passant à la limite pour n fixé dans l'encadrement 2.2, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exp(\ 2^n) \leqslant u_n + 1$$

En déduire, lorsque n tend vers l'infini, l'équivalent suivant :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(\ 2^n)$$

5) On pose : $\ _n = \exp(\ 2^n) - u_n$.
Montrer que la suite $(\ _n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et qu'elle vérifie la relation suivante :

$$2\ _n - 1 = (\ _{n+1} + \ _n^2 - \ _n) \exp(-\ 2^n)$$

6) Prouver enfin que lorsque n tend vers l'infini : $u_n = -\dfrac{1}{2} + \exp(\ 2^n) + o(1)$

EXERCICE 2

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul, et on adopte les notations suivantes :
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coe cients réels.
$S_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.
$A_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques.
On rappelle qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si ${}^tA = -A$, ${}^tA$ étant la matrice transposée de A.
On définit les applications tr et par :

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$, $\ (A, B) = \operatorname{tr}({}^tAB)$

1) Montrer que tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

2) Prouver que tr est surjective. Donner la dimension du noyau de tr.

3) Prouver que définit un produit scalaire dont la norme associée, $\|.\|$, vérifie :

$$\forall A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$$

4) Etablir que : $\quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad |\mathrm{tr}(A)| \leqslant \sqrt{n}\|A\|$

5) Démontrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour .

6) Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. En déduire que pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\displaystyle\min_{M\in S_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j} - m_{i,j})^2$ existe et vaut $\displaystyle\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j} - a_{j,i})^2$

PROBLÈME

On rappelle que :

- La fonction est la fonction définie pour $x > 0$ par $(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)\,\mathrm{d}t$.
- Si X suit une loi normale et si est un réel non nul alors X suit également une loi normale.

On admettra que $(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Partie 1

On considère la variable aléatoire $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i^2$ où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi normale centrée réduite.

1) Déterminer la fonction de répartition F_{Y_1} de $Y_1 = X_1^2$.

2) En déduire que Y_1 est une variable aléatoire qui suit une loi gamma dont on précisera les paramètres.

3) Justifier que Y_n suit une loi gamma de paramètres $(2, \frac{n}{2})$.

4) Donner les valeurs de l'espérance $E(Y_n)$ et de la variance $V(Y_n)$ de Y_n.

5) On dit alors que Y_n suit une loi du *Chi-deux* à n degrés de liberté, notée $^2(n)$.
Soient G_n la fonction de répartition de Y_n et un réel dans l'intervalle $]0, 1[$.
Montrer qu'il existe un réel unique t tel que $G_n(t) =$. Ce réel est alors noté $^2_\beta(n)$.

Dans la suite du problème on considère une suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi normale $\mathcal{N}(m, \ )$. L'objet des questions suivantes est de déterminer une estimation ponctuelle (partie 2) puis une estimation par intervalle de confiance (parties 3 et 4) de la variance ^{2}.

Si g est une fonction de n variables réelles, et si $Z_n = g(X_1, \ldots, X_n)$, on rappelle que :

- g est un estimateur de (Z_n est un estimateur de) lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Z_n) =$.
- L'estimateur Z_n est dit sans biais lorsque pour tout n entier naturel non nul : $E(Z_n) =$
- L'estimateur Z_n est dit convergent lorsque : $\lim\limits_{n\to+\infty} V(Z_n) = 0$

Partie 2 *Estimation ponctuelle de* ^{2}.

Pour n entier naturel non nul, on pose : $F_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad V_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - F_n)^2$

1) Montrer que $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est un estimateur convergent sans biais de m.

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) Démontrer que : $V_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$

puis que : $V_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 - (F_n - m)^2$

b) Prouver que : $E(V_n) = \dfrac{n-1}{n} \; ^2$

c) En déduire un estimateur sans biais de ^{2}.

Partie 3 *Estimation par intervalle de confiance de* ^{2}, m *étant connue.*

Pour n entier supérieur à 2, on pose :

$$U_n = \frac{1}{\ ^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$$

1) Justifier que U_n suit une loi du *Chi-deux* à n degrés de liberté.

2) Soit $\ \in]0,1[$. Montrer l'égalité des événements :

$$\left[\frac{nT_n}{\ ^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant \ ^2 \leqslant \frac{nT_n}{\ ^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right] \quad \text{et} \quad \left[\ ^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leqslant U_n \leqslant \ ^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right]$$

En déduire que la probabilité de l'événement $\left[\dfrac{nT_n}{\ ^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant \ ^2 \leqslant \dfrac{nT_n}{\ ^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$ est $1 - \ $.

Partie 4 *Estimation par intervalle de confiance de* ^{2}, m *étant inconnue.*

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et 1 colonne à coe cients réels et $Id_{\mathbb{R}^n}$ l'identité de $\mathbb{R}^n$.
Pour n entier supérieur à 2, on pose :

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_n)^2, \quad U_n = \frac{1}{\ ^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_n)^2$$

1) Soit $\ $ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A définie par :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{i,i} = n-1 & \\ a_{i,j} = -1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et B la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

a) Justifier que A est une matrice diagonalisable.

b) Calculer le produit AB, en déduire une valeur propre de A et un vecteur propre de A associé à cette valeur propre.

c) Montrer que : $\dim \operatorname{Im}(\ - n\,Id_{\mathbb{R}^n}) = 1$

d) En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}(\ - n\,Id_{\mathbb{R}^n})$, les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A.

e) Soit $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées d'un vecteur propre de associé à la valeur propre n. Prouver que : $\sum_{i=1}^{n} w_i = 0$.

f) Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la dernière colonne est proportionnelle à B et d'une matrice diagonale D que l'on déterminera, telle que : $P^{-1}AP = D$ avec ${}^{t}P = P^{-1}$

(On ne demande pas la matrice P).

g) On note $(p_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ les coe cients de la matrice ${}^{t}P$; montrer que :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 0$$

puis que : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}^2 = 1$

2) Soit q l'application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad q(X) = {}^{t}X M X \quad \text{où} \quad M = \frac{1}{n}A$$

a) On pose $Y = {}^{t}P X$; montrer que : $q(X) = \frac{1}{n}\,{}^{t}Y D Y$

puis que : $$q(X) = \sum_{i=1}^{n}\Big(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\Big)^2$$

b) En utilisant l'écriture $q(X) = \frac{1}{n}\,{}^{t}Y D Y$, montrer que : $q(X) = \sum_{i=1}^{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x_j\Big)^2$

3) Pour tout i de l'ensemble $[\![1, n-1]\!]$, on pose : $Y_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} X_j$

a) Justifier que Y_i suit une loi normale puis montrer que $E(Y_i) = 0$ et $V(Y_i) = {}^2$.

b) En utilisant les résultats de la question 4.2, montrer que : $U_n = \frac{1}{{}^2}\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2$

c) En admettant que les $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$ sont mutuellement indépendantes, justifier que U_n suit une loi du *Chi-deux* à $n-1$ degrés de liberté.

d) Désormais, désigne un réel appartenant à $]0, 1[$. Montrer que les événements :

$$\left[\frac{(n-1)S_n}{{}^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leqslant {}^2 \leqslant \frac{(n-1)S_n}{{}^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right] \quad \text{et} \quad \left[{}^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leqslant U_n \leqslant {}^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$$

sont égaux.

e) En déduire que la probabilité de l'événement

$$\left[\frac{(n-1)S_n}{{}^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leqslant {}^2 \leqslant \frac{(n-1)S_n}{{}^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

est $1 -$.