

EXERCICE 1

$M_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ($n \geq 1$) et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

On considère une matrice S de $M_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ distinctes deux à deux.

L'objet de l'exercice est de montrer que, si k est un entier naturel impair et si une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ commute avec S^k , alors elle commute avec S .

Dans la dernière question on étudiera un contre-exemple.

- 1) Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que la matrice $P^{-1}SP$ soit une matrice D diagonale. Dans la suite de l'exercice un entier naturel impair k est fixé.
- 2) On considère l'application f de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme T fait correspondre le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$f(T) = (T(\lambda_1^k), T(\lambda_2^k), \dots, T(\lambda_n^k))$$

- a) Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- b) En déduire l'existence d'un unique polynôme U de E tel que :

$$U(\lambda_1^k) = \lambda_1, U(\lambda_2^k) = \lambda_2, \dots, U(\lambda_n^k) = \lambda_n$$

- 3) Prouver que le polynôme R , défini par $R(X) = U(X^k) - X$ est un polynôme annulateur de D puis de S .
- 4) Soit une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AS^k = S^kA$.
 - a) Montrer que pour tout entier naturel p , $AS^{pk} = S^{pk}A$.
 - b) En déduire que les matrices A et S commutent, c'est-à-dire que : $AS = SA$.
- 5) On considère les deux matrices A et S de $M_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Vérifier que S possède deux valeurs propres distinctes.
- b) Montrer que A commute avec toute puissance paire de S , mais ne commute pas avec S .

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, \frac{\pi}{4}]$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

ainsi que la suite réelle $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivante :
$$\begin{cases} I_0 = \frac{\pi}{4} \\ n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x)]^n dx \end{cases}$$

Partie 1 Etude de la bijection réciproque de f .

- 1) Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.
- 2) Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1} .

- 3) Justifier que : $x \in J, \quad \begin{cases} \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \\ \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \end{cases}$

- 4) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :

$$x \in J \setminus \{1\}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

- 5) En déduire le développement limité en $\sqrt{x}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

Partie 2 Etude des dérivées successives de f .

- 1) Justifier que f est de classe C^∞ sur I , on note $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f sur I .
- 2) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que :

$$x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$$

- 3) Déterminer les polynômes P_1 et P_2 .
- 4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = (1 - X^2)P'_n + (n+1)X.P_n$
En déduire le polynôme P_3 .
- 5) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n .

Partie 3 Etude de la suite d'intégrales.

- 1) Justifier que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calculer I_2 .
- 2) Déterminer les réels a et b , tels que : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$.
- 3) En posant $t = \sin x$, déterminer I_1 .
- 4) Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- 5) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n \geq \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n x} dx \geq \frac{1}{n^2} \frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}$
En déduire le comportement de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- 6) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n$.

PROBLÈME

Partie I : Etude d'une variable discrète d'univers image fini.

Deux urnes A et B , initialement vides, peuvent contenir respectivement au plus n et m boules ($n \geq 1, m \geq 1$).

On s'intéresse au protocole suivant

- On choisit l'urne A avec la probabilité $p \in]0, 1[$, l'urne B avec la probabilité $q = 1 - p$.
- On met une boule dans l'urne choisie.
- On répète cette épreuve autant de fois qu'il est nécessaire pour que l'une des urnes A ou B soit pleine, c'est-à-dire contienne n boules pour l'urne A ou contienne m boules pour l'urne B , les choix des urnes étant mutuellement indépendants.

A. Préliminaires.

On définit la suite de terme général a_n par :

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{n} C_{2n}^n}{4^n} \quad n \geq 1$$

- 1) Calculer a_1 et, pour tout entier $n \geq 1$, le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.
- 2) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $a_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$.
- 3) Donner le sens de variation de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et montrer qu'elle converge vers un réel ℓ tel que : $\frac{1}{2} \leq \ell \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
On admet que $\ell = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

B. Etude de cas particuliers.

Dans cette partie seulement $m = n$ et $p = q = \frac{1}{2}$.

On note R_n la variable aléatoire égale au nombre (éventuellement nul) de boules contenues dans l'urne qui n'est pas pleine, à l'issue de l'expérience.

- 1) Donner les lois de R_1 , R_2 et R_3 . Justifier vos calculs.
- 2) Calculer l'espérance et la variance de R_1 , R_2 et R_3 .

Dans toute la suite du problème $n \geq 2$.

- 3) Quel est l'ensemble $R_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable R_n ?
- 4) Soit k appartenant à l'univers image $R_n(\Omega)$.
 - a) Calculer la probabilité qu'à l'issue du $(n - 1 + k)$ -ième tirage l'urne A contienne $n - 1$ boules et l'urne B contienne k boules.
 - b) Donner alors la probabilité $P([R_n = k])$.
- 5) Vérifier que

$$k \in [0, n - 2], \quad 2(k + 1)P([R_n = k + 1]) = (n + k)P([R_n = k])$$

- 6) Par sommation de la relation qui précède, en déduire que

$$E(R_n) = n - (2n - 1)P([R_n = n - 1])$$

- 7) Donner alors un équivalent de $n - E(R_n)$ quand n tend vers plus l'infini.
- 8) De façon analogue, montrer que :

$$E(R_n^2) = (2n + 1)E(R_n) - n(n - 1)$$

- 9) En déduire l'expression de $V(R_n)$ en fonction de n et $E(R_n)$.
- 10) Ecrire un algorithme, en langage Pascal, permettant de calculer l'espérance de R_n , l'entier n étant donné par l'utilisateur.

C. Retour au cas général.

On abandonne les conditions $m = n$ et $p = q = \frac{1}{2}$.

- 1) En utilisant un argument probabiliste, montrer que :

$$q^m \sum_{k=0}^{n-1} p^k C_{m-1+k}^{m-1} + p^n \sum_{k=0}^{m-1} q^k C_{n-1+k}^{n-1} = 1 \quad (1)$$

- 2) On pose $u_m = \sum_{k=0}^{m-1} q^k C_{n-1+k}^{n-1}$.

- a) Etudier le sens de variation de la suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ et donner à l'aide de la relation (1) un majorant de u_m ne dépendant pas de m .
Etablir alors la convergence de la suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$.

- b) Pour $k \in [0, n - 1]$, donner un équivalent de C_{m-1+k}^{m-1} lorsque m tend vers $+\infty$.

- c) En déduire l'existence et la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} q^m \sum_{k=0}^{n-1} p^k C_{m-1+k}^{m-1}$$

- d) Prouver alors que : $\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = \frac{1}{p^n}$.

Partie II : Etude d'une variable discrète d'univers image infini.

Dans cette dernière partie l'urne B , initialement vide, a une capacité illimitée et l'urne A , initialement vide, peut contenir au plus n boules ($n \geq 1$).

On s'intéresse au protocole suivant

- On choisit l'urne A avec la probabilité $p \in]0, 1[$, l'urne B avec la probabilité $q = 1 - p$.
- On met une boule dans l'urne choisie.
- On répète cette épreuve autant de fois qu'il est nécessaire pour que l'urne A soit pleine, c'est-à-dire contienne n boules, les choix successifs des urnes étant mutuellement indépendants.

On note alors T_n le nombre (éventuellement nul) de boules contenues dans l'urne B et $(Z_j)_{j \in [1, n]}$, les variables aléatoires définies de la façon suivante :

- Z_1 compte le nombre de boules mises dans B avant de mettre la première boule dans A .
- Pour tout entier j de $[2, n]$, Z_j compte le nombre de boules mises dans B entre la $(j - 1)$ -ième boule et la j -ième boule mises dans A .

On admet que T_n est une variable aléatoire.

- 1) Quel est l'ensemble $T_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable T_n ?
- 2) Pour tout entier naturel k appartenant à $T_n(\Omega)$, donner la valeur de $P([T_n = k])$.
- 3) Vérifier que :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} P([T_n = k]) = 1.$$
- 4) Pour tout entier j de $[1, n]$, donner la loi, l'espérance, la variance de Z_j .
- 5) Exprimer T_n en fonction des variables $(Z_j)_{1 \leq j \leq n}$ et de l'entier n .
- 6) En déduire l'espérance et la variance de la variable T_n .