

Devoir Maison 1 de Mathématiques : suites, séries, intégrales impropres

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie pour tout $x \in]n, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = (x - n) \ln(x) - x \ln(x - n).$$

On considère aussi la fonction g définie pour tout $x \in]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

- (1) (a) Dresser le tableau des variations de g , limites comprises.
- (b) En déduire que la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante, puis que : $\forall k \geq 4, \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}$.
- (2) (a) Justifier que f_n est dérivable sur $]n, +\infty[$ et donner l'expression de $f'_n(x)$ pour tout $x > n$.
- (b) Montrer que, pour tout réel $t > 0$, on a : $\ln(t) \leq t - 1$.
- (c) Soit n un entier ≥ 2 . Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [n + 1, n + 2]$, admet une unique solution, que l'on notera x_n par la suite.
- (3) Montrer que : $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.
- (4) (a) Justifier que, pour tout $n \geq 2$: $\ln(x_n - n) = (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}$.
- (b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n}$, et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n) = 1$.
- (5) Pour tout $n \geq 2$, on pose : $u_n = x_n - n - 1$.
- (a) Justifier que $\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ et $\ln(1 + n + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.
- (b) En déduire que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.
- (6) Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$.

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par u_n la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)}.$$

- (1) Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$. On notera $f(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$.
- (2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $u_n(x)$ est convergente (on distinguera les cas " $x = 0$ " et " $x \neq 0$ "). On note alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x).$$

- (3) (a) Montrer que la fonction S est impaire.
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de la fonction u_n sur $\mathbb{R}$.
- (c) En déduire les variations de la fonction S sur $[1, +\infty[$, puis sur $] -\infty, -1]$.
- (4) (a) Montrer que, pour tout $x \geq 1$ et pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\frac{x}{(1+x)^2} f(\alpha) \leq S(x) \leq \frac{1}{x} f(\alpha)$$

(indication : on pourra utiliser l'encadrement $nx^2 \leq 1 + nx^2 \leq n(1 + x^2)$).

- (b) En déduire un équivalent de $S(x)$ et sa limite en $+\infty$.
- (5) On suppose que $\alpha \leq \frac{1}{2}$.
- (a) Montrer que $S(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x)$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \geq 0$, puis que, pour tout $n \geq 1$:

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geq \frac{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}.$$

- (b) En déduire que la fonction S n'est pas continue en 0.

Exercice 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x + e^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt.$$

- (1) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale I_a converge, et donner sa valeur.
- (2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, les intégrales $f(x)$ et $g(x)$ convergent.
- (3) Etablir que, pour tout $(x, t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a : $2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$, et en déduire que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
- (4) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Montrer que : $0 < f(x) - f(y) \leq \frac{y - x}{2}$.
- (5) Montrer que f réalise une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$.
- (6) Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On la note α .
- (7) Justifier que α appartient à $]0, 1]$.
- (8) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $|\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$. En déduire la limite de (u_n) .
- (9) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$|f(x + h) - f(x) + hg(x)| \leq \frac{h^2}{3}.$$

- (10) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = -g(x)$.
- (11) Soit $T : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par : $T(x) = xf(x)$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T'(x) = \frac{1}{1 + x}.$$

- (12) En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}$.

- (1) Vérifier que I_n est une intégrale convergente.
- (2) (a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel $x \neq -1, 0$, on ait : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$.
 (b) En déduire la valeur de I_1 .
- (3) (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$.
 (b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- (4) (a) Calculer $I_n + I_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
 (c) En déduire un équivalent de I_n , puis donner la nature de la série de terme général I_n .
- (5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2}$.
 (a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.
 (b) Calculer la valeur de J_0 .
- (6) (a) Exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
 (b) Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k$ en fonction de J_n .
 (c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}$. Donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.
 (d) En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ converge et donner sa somme.