

Devoir Surveillé de Mathématiques n°1

Remarques : Il est toujours permis d'admettre les résultats de questions précédentes pour traiter les questions suivantes. Chaque réponse doit être démontrée et toutes les étapes des calculs doivent être données. On attachera un soin tout particulier à la clarté et à la propreté de la rédaction. Les téléphones portables et les calculatrices, ainsi que tous matériels électroniques sont interdits.

Exercice 1. Soit $p \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction continue, strictement positive, décroissante sur $[p, +\infty[$, telle que $\int_p^{+\infty} f(t)dt$ converge. Pour tout $n \geq p$, on pose : $S_n = \sum_{k=p}^n f(k)$.

- (1) (a) A l'aide de la décroissance de f , montrer que, pour tout $n > p$, on a : $S_n - f(p) \leq \int_p^n f(t)dt$.
(b) En déduire que la série de terme général $f(n)$ est convergente.
- (2) Pour tout $n \geq p$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$.
(a) Montrer que, pour tout $n > p$, on a : $\int_n^{+\infty} f(t)dt - f(n) \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$.
(b) En déduire une condition suffisante sur $f(n)$ et $\int_n^{+\infty} f(t)dt$ pour que $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)dt$.
- (3) Dans cette question, on pose pour tout $x \in [2, +\infty[$: $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^2}$.
(a) Montrer que f vérifie les quatre hypothèses de l'énoncé, ainsi que la condition trouvée en (2)(b).
(b) En déduire un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln(k))^2}$ quand n tend vers $+\infty$.
(c) La série de terme général R_n est-elle convergente? Justifier.

Exercice 2. Soit a un réel fixé > 1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

- (1) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, que l'on notera u_n par la suite.
- (2) (a) Soit x un réel ≥ 0 . Montrer que la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante et déterminer sa limite.
(b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.
(c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.
- (3) (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a : $\ln(a) \leq u_n$.
(b) Soit K un réel ≥ 0 et minorant de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$. Montrer que $e^K \leq a$.
(c) Déduire des questions précédentes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(a)$.
- (4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $R_n(x) = \int_0^x \frac{e^t(x-t)^n}{n!} dt$.
(a) Justifier que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est majorée.
(b) Soit M un réel positif tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leq M$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$|R_n(u_n)| \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- (c) En déduire que : $R_n(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- (5) (a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $e^x = f_n(x) + R_n(x)$.
(b) En se rappelant que $f_n(u_n) = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déduire des deux questions précédentes que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- (6) (a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{e^t(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt.$$

- (b) En déduire que : $e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)$.
- (c) Justifier que $\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.
- (d) En déduire finalement que : $u_n - \ln(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!}$.

Problème 1. On désigne par J l'intervalle $] -1, +\infty[$. Dans ce problème, on se propose d'étudier l'application f définie pour tout $x \in J$ par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt.$$

(1) Préliminaires :

- (a) Justifier la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
- (b) En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
- (c) En déduire que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

(2) Éléments d'étude de f :

- (a) Justifier, pour tout $x \in J$, la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.
- (b) Calculer les valeurs de $f(0)$ et de $f(1)$.
- (c) Montrer que, pour tout $x \in J$, on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}$, et en déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- (d) (i) Montrer que, pour tout $(x, y) \in J^2$ et tout $t \in]0, 1]$, on a : $x \leq y \implies t^x \geq t^y$.
(ii) En déduire que f est décroissante sur J .
- (e) Montrer que, pour tout $x \in J$, on a : $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$.
- (f) En déduire que : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.
- (g) Soit x un élément de J .
(i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.
(ii) En déduire que la série numérique $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge et que : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.
- (h) (i) Montrer que, pour tout $(x, y) \in J^2$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \leq \frac{|x-y|}{k^2}$.
(ii) En déduire que, pour tout $(x, y) \in J^2$, on a : $|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right)$.
(iii) En déduire que f est continue sur J .
- (i) Montrer que : $f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1}$, et en déduire la limite de f en -1 .

(3) Dérivabilité de f :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note g_k l'application de classe $\mathcal{C}^2$ de J dans $\mathbb{R}$, définie par : $g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

- (a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in J^2$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $|g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g'_k(x)| \leq \frac{|x-y|^2}{k^3}$.
- (b) Justifier la convergence des séries $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3}$ et $\sum_{k \geq 0} g'_k(x)$ pour tout $x \in J$.
- (c) En déduire que f est dérivable sur J et que, pour tout $x \in J$, on a : $f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}$.
- (d) Déterminer la valeur de $f'(0)$.