

Corrigé du devoir Surveillé de Mathématiques n°1

Corrigé de l'exercice 1. Soit $p \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction continue, strictement positive, décroissante sur $[p, +\infty[$, telle que $\int_p^{+\infty} f(t)dt$ converge. Pour tout $n \geq p$, on pose : $S_n = \sum_{k=p}^n f(k)$.

- (1) (a) Montrons que, pour tout $n > p$, on a : $S_n - f(p) \leq \int_p^n f(t)dt$. Comme la fonction f est décroissante sur $[p, +\infty[$, on a pour tout entier $k \geq p$ et tout $t \in [k, k+1]$:

$$f(k+1) \leq f(t).$$

Par croissance de l'intégrale, ceci nous donne que, pour tout $k \geq p$:

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dt \leq \int_k^{k+1} f(t)dt,$$

ce qui entraîne que, pour tout $k \geq p$:

$$(k+1-k)f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt.$$

En d'autres termes, on vient de trouver que, pour tout $k \geq p$:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt.$$

En sommant cette inégalité sur k , on obtient que, pour tout $n > p$:

$$\sum_{k=p}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=p}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt.$$

D'après la relation de Chasles, ceci nous donne que, pour tout $n > p$:

$$\sum_{k=p}^{n-1} f(k+1) \leq \int_p^n f(t)dt.$$

Si l'on effectue le changement d'indice $i = k+1$ dans la somme de gauche ci-dessus, alors on obtient que, pour tout $n > p$:

$$S_n - f(p) = \sum_{i=p}^n f(i) - f(p) = \sum_{i=p+1}^n f(i) \leq \int_p^n f(t)dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n > p$:

$$\boxed{S_n - f(p) \leq \int_p^n f(t)dt.}$$

- (b) Montrons que la série de terme général $f(n)$ est convergente. Comme f est une fonction continue positive et que l'intégrale $\int_p^{+\infty} f(t)dt$ converge, on voit que l'intégrale $\int_n^{+\infty} f(t)dt$ converge pour tout $n > p$. De plus, on obtient par positivité de l'intégrale que, pour tout $n > p$:

$$\int_n^{+\infty} f(t)dt \geq 0.$$

Avec la relation de Chasles, ceci nous donne que, pour tout $n > p$:

$$\int_p^{+\infty} f(t)dt = \int_p^n f(t)dt + \int_n^{+\infty} f(t)dt \geq \int_p^n f(t)dt.$$

Dès lors, on obtient avec la question précédente que, pour tout $n > p$:

$$S_n \leq f(p) + \int_p^n f(t)dt \leq f(p) + \int_p^{+\infty} f(t)dt.$$

En particulier, la suite $(S_n)_{n \geq p+1}$ est majorée. Comme f est positive, $(S_n)_{n \geq p+1}$ est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs, et donc elle converge. Mais comme $(S_n)_{n \geq p+1}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum f(n)$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum f(n) \text{ converge.}}$$

(2) Pour tout $n \geq p$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$.

(a) Montrons que, pour tout $n > p$, on a : $\int_n^{+\infty} f(t)dt - f(n) \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$. Pour ce faire, fixons un entier $n > p$. Comme f est décroissante sur $[p, +\infty[$, on a pour tout $k \geq n$ et tout $t \in [k, k+1]$:

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$

Par croissance de l'intégrale, ceci nous donne que, pour tout $k \geq n$:

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dt \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt,$$

ce qui entraîne que, pour tout $k \geq n$:

$$(k+1-k)f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq (k+1-k)f(k).$$

En d'autres termes, on vient de trouver que, pour tout $k \geq n$:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k).$$

En sommant cette inégalité sur k , on obtient que, pour tout entier $m > n$:

$$\sum_{k=n}^m f(k+1) \leq \sum_{k=n}^m \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^m f(k).$$

D'après la relation de Chasles, ceci nous donne que, pour tout $m > n$:

$$\sum_{k=n}^m f(k+1) \leq \int_n^{m+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^m f(k).$$

Si l'on effectue le changement d'indice $i = k+1$ dans la somme de gauche ci-dessus, alors on obtient que, pour tout $m > n$:

$$\sum_{i=n+1}^{m+1} f(i) \leq \int_n^{m+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^m f(k) = f(n) + \sum_{k=n+1}^m f(k).$$

Comme la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_p^{+\infty} f(t)dt$ convergent, on trouve par passage à la limite quand m tend vers $+\infty$ dans l'encadrement ci-dessus que :

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} f(i) \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt \leq f(n) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k),$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme :

$$R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt \leq f(n) + R_n.$$

En d'autres termes, on vient de montrer que :

$$R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_n^{+\infty} f(t)dt \leq f(n) + R_n.$$

En particulier, il s'ensuit que :

$$R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_n^{+\infty} f(t)dt - f(n) \leq R_n.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n > p$:

$$\boxed{\int_n^{+\infty} f(t)dt - f(n) \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt.}$$

- (b) Déterminons une condition suffisante sur $f(n)$ et $\int_n^{+\infty} f(t)dt$ pour que $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)dt$.
D'après la question précédente, on sait que, pour tout $n > p$:

$$\int_n^{+\infty} f(t)dt - f(n) \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

Comme la fonction f est strictement positive et continue, on voit que $\int_n^{+\infty} f(t)dt > 0$ pour tout $n > p$ par stricte positivité de l'intégrale. En divisant l'encadrement ci-dessus par cette intégrale, on obtient que, pour tout $n > p$:

$$1 - \frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)dt} \leq \frac{R_n}{\int_n^{+\infty} f(t)dt} \leq 1.$$

Si le rapport $\frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)dt}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, alors il s'ensuit avec le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_n}{\int_n^{+\infty} f(t)dt} = 1,$$

et donc $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)dt$. Par conséquent, on en déduit que :

$$f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_n^{+\infty} f(t)dt\right) \text{ est une condition suffisante pour que : } R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

- (3) Dans cette question, on pose pour tout $x \in [2, +\infty[: f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^2}$.

- (a) Montrons que f vérifie les quatre hypothèses de l'énoncé, ainsi que la condition trouvée en (2)(b).
Tout d'abord, on voit que f est continue et strictement positive sur $[2, +\infty[$, comme inverse d'une fonction continue et strictement positive sur $[2, +\infty[$ (en particulier, c'est l'inverse d'une fonction qui ne s'annule pas sur $[2, +\infty[$). De plus, comme les fonctions $x \mapsto x$ et $\ln$ sont croissantes et strictement positives sur $[2, +\infty[$, on obtient par produit que la fonction $x \mapsto x(\ln(x))^2$ est croissante sur $[2, +\infty[$, et donc f est décroissante sur $[2, +\infty[$ comme inverse d'une fonction strictement positive et croissante sur $[2, +\infty[$. En particulier, l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)dt$ est impropre en $+\infty$. De plus, on a pour tout $a > 2$:

$$\int_2^a f(t)dt = \int_2^a \frac{1}{t(\ln(t))^2}dt = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^a = -\frac{1}{\ln(a)} + \frac{1}{\ln(2)}.$$

Comme $1/\ln(a)$ tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$, ceci entraîne que :

$$\int_2^a f(t)dt \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(2)}.$$

Dès lors, il s'ensuit que l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)dt$ converge. Par ailleurs, on trouve aussi que, pour tout $n > 2$ et pour tout $a > n$:

$$\int_n^a f(t)dt = \int_n^a \frac{1}{t(\ln(t))^2}dt = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_n^a = -\frac{1}{\ln(a)} + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Comme $1/\ln(a)$ tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$, ceci entraîne que :

$$\int_n^a f(t)dt \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)}.$$

Dès lors, il s'ensuit que $\int_n^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{\ln(n)}$. En particulier, on voit que :

$$\frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)dt} = \frac{\frac{1}{n(\ln(n))^2}}{\frac{1}{\ln(n)}} = \frac{1}{n \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui entraîne que $f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_n^{+\infty} f(t)dt\right)$. Par conséquent, on en déduit que :

$$f \text{ vérifie les quatre hypothèses de l'énoncé et la condition trouvée en (2)(b).}$$

- (b) Déterminons un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln(k))^2}$ quand n tend vers $+\infty$. Comme la fonction f vérifie les quatre hypothèses de l'énoncé, ainsi que la condition trouvée en (2)(b), on sait d'après la question (2)(b) que :

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t) dt.$$

D'après les calculs de la question précédente, on en déduit que :

$$\boxed{R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}}.$$

- (c) Montrons que la série de terme général R_n est divergente. Pour ce faire, on sait d'après la concavité de la fonction $\ln$ que $0 < \ln(n) \leq n-1 \leq n$ pour tout $n \geq 2$. En particulier, on obtient par inversion que, pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{1}{\ln(n)} \geq \frac{1}{n}.$$

Comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, on obtient par comparaison de séries à termes positifs que $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ diverge. Comme de plus $\frac{1}{\ln(n)} \geq 0$ pour tout $n \geq 2$ et que $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$ d'après la question précédente, on en déduit par équivalence que :

$$\boxed{\text{la série } \sum R_n \text{ diverge.}}$$

Corrigé de l'exercice 2. Soit a un réel fixé > 1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

- (1) Justifions que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, que l'on notera u_n par la suite. Comme la fonction f_n est polynomiale, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et de plus, on a pour tout $x \geq 0$:

$$f'_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}.$$

En effectuant le changement d'indice $i = k-1$ dans l'égalité ci-dessus, on trouve que, pour tout $x \geq 0$:

$$f'_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!} = f_{n-1}(x) > 0.$$

En particulier, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme elle est de plus continue sur $\mathbb{R}_+$ (car polynomiale), elle définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $f_n(\mathbb{R}_+)$ d'après le théorème de la bijection. A noter que $f_n(0) = 1$ par construction. De plus, comme f_n est polynomiale, elle est équivalente à son terme de plus haut degré en $+\infty$, et donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = +\infty.$$

Dès lors, comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on voit que $f_n(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$, et donc f_n définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$. Mais comme $a > 1$, on voit que a appartient à $[1, +\infty[$, et donc il admet un unique antécédent par f_n sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = a \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}_+}.$$

- (2) (a) Soit x un réel ≥ 0 . Montrons que la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante et déterminons sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve que :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geq 0.$$

De plus, on sait d'après le cours que $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est la suite des sommes partielles de la série exponentielle, et donc elle converge vers e^x . Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (f_n(x))_{n \geq 1} \text{ est croissante et converge vers } e^x}.$$

- (b) Déterminons la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$. Pour ce faire, fixons un entier $n \geq 1$. Par définition de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, on voit que $f_{n+1}(u_{n+1}) = a$. Dès lors, comme la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante d'après la question précédente, on voit que :

$$a = f_{n+1}(u_{n+1}) \geq f_n(u_{n+1}).$$

Comme de plus $f_n(u_n) = a$ par construction, on trouve que :

$$f_n(u_n) = a \geq f_n(u_{n+1}).$$

Comme la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question (1), il s'ensuit que $u_n \geq u_{n+1}$. Mais comme ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \geq 1} \text{ est décroissante.}}$$

- (c) Démontrons que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge. D'après la question précédente, on sait que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Mais comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par construction, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \geq 1} \text{ converge.}}$$

- (3) (a) Montrons que, pour tout $n \geq 1$, on a : $\ln(a) \leq u_n$. Pour ce faire, fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la suite $(f_k(x))_{k \geq 1}$ est croissante et qu'elle converge vers e^x d'après la question (2)(a), on voit que $f_n(x) \leq e^x$ pour tout $x \geq 0$. En particulier, on obtient par définition de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ que :

$$a = f_n(u_n) \leq e^{u_n}.$$

Dès lors, comme la fonction $\ln$ est croissante, on trouve que $\ln(a) \leq \ln(e^{u_n})$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\ln(a) \leq u_n.}$$

- (b) Soit K un réel ≥ 0 et minorant de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$. Montrons que $e^K \leq a$. Comme $K \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que la fonction f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après la question (1), on voit que (*) $f_n(K) \leq f_n(u_n) = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Dès lors, comme la suite $(f_n(K))_{n \geq 1}$ converge vers e^K d'après la question (2)(a), on obtient par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité (*) que :

$$\boxed{e^K \leq a.}$$

- (c) Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(a)$. D'après la question (3)(a), on sait que (*) $\ln(a) \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge d'après la question (2)(c), on obtient par passage à la limite dans l'inégalité (*) que :

$$\ln(a) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

De plus, comme la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante d'après la question (2)(b), elle est minorée par sa limite. D'après la question précédente, on trouve que :

$$\exp\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) \leq a.$$

Comme la fonction $\ln$ est croissante, on obtient par composition que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \ln(a).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(a).}$$

- (4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $R_n(x) = \int_0^x \frac{e^t(x-t)^n}{n!} dt$.

- (a) Justifions que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est majorée. Comme la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge d'après la question (2)(c), elle est bornée. En particulier, on en déduit qu'elle est majorée. Une autre façon de le voir consiste à remarquer que, comme $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante d'après la question (2)(b), on a $u_n \leq u_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc cette suite est majorée. Dans tous les cas, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \geq 1} \text{ est majorée.}}$$

(b) Soit M un réel positif tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leq M$. Montrons que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$|R_n(u_n)| \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour ce faire, fixons un entier $n \geq 1$. Comme $|u_n| \leq M$, on voit que $u_n \leq M$. Dès lors, comme l'exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient que $e^t \leq e^{u_n} \leq e^M$ pour tout $t \in [0, u_n]$. Comme $(u_n - t)^n \geq 0$ pour tout $t \in [0, u_n]$, on trouve par produit que, pour tout $t \in [0, u_n]$:

$$0 \leq \frac{e^t(u_n - t)^n}{n!} \leq \frac{e^M(u_n - t)^n}{n!}.$$

Par croissance de l'intégrale, ceci entraîne que :

$$0 \leq R_n(u_n) = \int_0^{u_n} \frac{e^t(u_n - t)^n}{n!} dt \leq \int_0^{u_n} \frac{e^M(u_n - t)^n}{n!} dt = \left[-\frac{e^M(u_n - t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^{u_n}.$$

Après simplification, on obtient alors que :

$$0 \leq R_n(u_n) \leq -0 + \frac{e^M(u_n - 0)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^M(u_n)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Comme $0 \leq u_n \leq M$ par définition, il s'ensuit que :

$$0 \leq R_n(u_n) \leq \frac{e^M M^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|R_n(u_n)| \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(c) Montrons que : $R_n(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|R_n(u_n)| \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Par produit avec $n(n+1)$, ceci nous donne que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq |n(n+1)R_n(u_n)| \leq e^M \frac{M^{n+1}n(n+1)}{(n+1)!} = e^M M^2 \frac{M^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Comme la série exponentielle converge, son terme général tend vers 0, et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} = 0.$$

Par encadrement, on obtient alors que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |n(n+1)R_n(u_n)| = 0.$$

En particulier, il s'ensuit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(n+1)R_n(u_n) = 0$, et donc :

$$R_n(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right).$$

Comme un polynôme est toujours équivalent à son terme de plus haut degré en $+\infty$, on voit que $n(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$, ce qui entraîne que $\frac{1}{n(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Par conséquent, on en déduit que :

$$R_n(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(5) (a) Justifions que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $e^x = f_n(x) + R_n(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve d'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n appliquée à la fonction exponentielle f (laquelle est $\mathcal{C}^\infty$) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} dt.$$

Comme f est la fonction exponentielle, on voit que $f^{(k)}(x) = e^x$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc $f^{(k)}(0) = e^0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dès lors, ceci nous donne que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{e^t(x-t)^n}{n!} dt.$$

Par conséquent, on en déduit par définition de f_n et R_n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^x = f_n(x) + R_n(x).}$$

- (b) Montrons que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'après la question précédente et sachant que $f_n(u_n) = a$ par construction, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$e^{u_n} = f_n(u_n) + R_n(u_n) = a + R_n(u_n). \quad (*)$$

Comme la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\ln(a)$ d'après la question (3)(c), on voit que $(u_n - \ln(a))_{n \geq 1}$ converge vers 0. Dès lors, comme $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on obtient par substitution que :

$$e^{u_n - \ln(a)} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n - \ln(a).$$

En particulier, ceci entraîne que :

$$\frac{e^{u_n} - a}{a} = e^{u_n - \ln(a)} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n - \ln(a).$$

D'après l'égalité (*), ceci nous donne que :

$$u_n - \ln(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{u_n} - a}{a} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{R_n(u_n)}{a}.$$

Mais comme $R_n(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ d'après la question (4)(c), il s'ensuit que :

$$u_n - \ln(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

- (6) (a) Justifions que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{e^t(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve d'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n+1$ appliquée à la fonction exponentielle f (laquelle est $\mathcal{C}^\infty$) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + \int_0^x \frac{f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt.$$

Comme f est la fonction exponentielle, on voit que $f^{(k)}(x) = e^x$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc $f^{(k)}(0) = e^0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dès lors, ceci nous donne que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{e^t(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{e^t(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt.$$

Par conséquent, on en déduit par définition de f_n et R_{n+1} que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(x).}$$

- (b) Montrons que : $e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)$. D'après la question (6)(a), on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(x).$$

En remplaçant x par u_n et en tenant compte du fait que $f_n(u_n) = a$ par définition, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$e^{u_n} = f_n(u_n) + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(u_n) = a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(u_n). \quad (*)$$

Comme l'exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient que $e^t \leq e^{u_n}$ pour tout $t \in [0, u_n]$. Comme $(u_n - t)^{n+1} \geq 0$ pour tout $t \in [0, u_n]$, on trouve par produit que, pour tout $t \in [0, u_n]$:

$$0 \leq \frac{e^t(u_n - t)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e^{u_n}(u_n - t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Par croissance de l'intégrale, ceci entraîne que :

$$0 \leq R_{n+1}(u_n) = \int_0^{u_n} \frac{e^t(u_n - t)^{n+1}}{(n+1)!} dt \leq \int_0^{u_n} \frac{e^{u_n}(u_n - t)^{n+1}}{(n+1)!} dt = \left[-\frac{e^{u_n}(u_n - t)^{n+2}}{(n+2)!} \right]_0^{u_n}.$$

Après simplification, on obtient alors que :

$$0 \leq R_{n+1}(u_n) \leq -0 + \frac{e^{u_n}(u_n - 0)^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{e^{u_n}u_n^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Après division par $\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}$, il s'ensuit que :

$$0 \leq \frac{R_{n+1}(u_n)}{\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}} \leq \frac{\frac{e^{u_n}u_n^{n+2}}{(n+2)!}}{\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{e^{u_n}u_n}{n+2}.$$

Comme la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\ln(a)$ d'après la question (3)(c), on trouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{u_n}u_n}{n+2} = 0.$$

Par encadrement, ceci nous donne que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_{n+1}(u_n)}{\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}} = 0.$$

En particulier, on vient de montrer que :

$$R_{n+1}(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

Par conséquent, on en déduit avec la relation (*) que :

$$\boxed{e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)}$$

(c) Montrons tout d'abord que $\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}$. D'après la question (5)(b), on sait que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme $a > 1$, on voit que $\ln(a) > 0$, et donc on obtient après division que :

$$\frac{u_n}{\ln(a)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Posons alors $v_n = \frac{u_n}{\ln(a)} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, on voit que $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0. Dès lors, comme $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on trouve par substitution que :

$$\ln\left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(1+v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{\ln(a)} - 1.$$

Comme $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ceci nous donne que :

$$\ln\left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par produit, ceci entraîne que :

$$(n+1) \ln \left(\frac{u_n}{\ln(a)} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o \left(\frac{n+1}{n^2} \right).$$

Comme $\frac{n+1}{n^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on trouve que :

$$(n+1) \ln \left(\frac{u_n}{\ln(a)} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient par composition des limites que :

$$\left(\frac{u_n}{\ln(a)} \right)^{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1,$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$\frac{\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}}.$$

Justifions à présent que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Comme la série exponentielle converge, son terme général tend vers 0, et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Mais comme $\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}$ d'après ce qui précède, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0.}$$

- (d) Montrons que : $u_n - \ln(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!}$. Comme $f_n(u_n) = a$ par construction, on voit d'après la question (6)(a) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$e^{u_n} = f_n(u_n) + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(u_n) = a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(u_n) \quad (*)$$

Comme la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\ln(a)$ d'après la question (3)(c), on voit que $(u_n - \ln(a))_{n \geq 1}$ converge vers 0. Dès lors, comme $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on obtient par substitution que :

$$e^{u_n - \ln(a)} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n - \ln(a).$$

En particulier, ceci entraîne que :

$$\frac{e^{u_n} - a}{a} = e^{u_n - \ln(a)} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n - \ln(a).$$

D'après l'égalité (*), ceci nous donne que :

$$u_n - \ln(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{u_n} - a}{a} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n^{n+1}}{a(n+1)!} + \frac{R_{n+1}(u_n)}{a}.$$

Comme $R_n(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o \left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \right)$ d'après la question (6)(b), on trouve que :

$$u_n - \ln(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n^{n+1}}{a(n+1)!}.$$

Mais comme $\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}$ d'après la question précédente, on en déduit que :

$$\boxed{u_n - \ln(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!}}.$$

Corrigé du problème 1. On désigne par J l'intervalle $] -1, +\infty[$. Dans ce problème, on se propose d'étudier l'application f définie pour tout $x \in J$ par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt.$$

(1) Préliminaires :

- (a) Justifions la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Tout d'abord, on peut remarquer que la première série est la série de Riemann de paramètre 2, qui converge d'après le cours. Pour ce qui est de la deuxième série, on voit qu'il s'agit d'une série à termes positifs. Comme $k > 0$, on obtient que $2k+1 \geq k > 0$ et donc $(2k+1)^2 \geq k^2$, ce qui entraîne que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Comme la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$, il s'ensuit que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, et donc la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge aussi. Enfin, la dernière série converge absolument car la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et $|\frac{(-1)^n}{n^2}| = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge. Par conséquent :

les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ convergent.

- (b) En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrons que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Pour ce faire, on scinde la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ en deux parties suivant la parité de n . Plus précisément :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n \text{ pair } > 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} \\ &= \sum_{n=2k, k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=2k+1, k \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

Par linéarité de la somme, il s'ensuit que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, et donc :

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Mais comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on en déduit après calcul que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

- (c) Montrons que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$. Pour ce faire, on procède comme précédemment, c'est-à-dire qu'on scinde la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ en deux parties suivant la parité de n . Plus précisément :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} &= \sum_{n \text{ pair } > 0} \frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{n \text{ impair}} \frac{(-1)^n}{n^2} \\ &= \sum_{n=2k, k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{n=2k+1, k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n^2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{1}{(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

Par linéarité de la somme, il s'ensuit que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{4 \times 6} - \frac{\pi^2}{8}.$$

Dès lors, on en déduit après calcul que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

(2) Éléments d'étude de f :

- (a) Justifions, pour tout $x \in J$, la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$. Pour ce faire, on pose $g(t) = \frac{t^x}{1+t}$ pour tout $t \in]0, 1]$. Alors on voit que g est définie, continue et positive sur $]0, 1]$. De plus, comme $1+t \geq 1$ pour tout $t \in]0, 1]$, on obtient que :

$$\forall t \in]0, 1], \quad 0 \leq \frac{t^x}{1+t} \leq t^x.$$

Mais comme $x \in J$, on voit que $x > -1$ et $-x < 1$, et donc l'intégrale de Riemann $\int_0^1 t^x dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{-x}}$ converge. Dès lors, d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt \text{ converge.}}$$

- (b) Calculons les valeurs de $f(0)$ et de $f(1)$. Par définition de f , on a :

$$f(0) = \int_0^1 \frac{t^0}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

Toujours par définition de f et par linéarité de l'intégrale, on trouve que :

$$f(1) = \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{(1+t) - 1}{1+t} dt = \int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt,$$

ce qui nous donne après calculs que : $f(1) = 1 - \ln(2)$, et donc :

$$\boxed{f(0) = \ln(2) \quad \text{et} \quad f(1) = 1 - \ln(2).}$$

- (c) Montrons que, pour tout $x \in J$, on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}$. D'après la question (1)(a), on sait que :

$$\forall t \in]0, 1], \quad 0 \leq \frac{t^x}{1+t} \leq t^x.$$

Comme l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$ converge d'après la question (2)(a) et que l'intégrale de Riemann $\int_0^1 t^x dt$ converge car $x > -1$, on obtient par positivité et croissance de l'intégrale que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^x dt.$$

Comme $x \in J$, on voit que $x+1 > 0$, et donc :

$$\int_0^1 t^x dt = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x+1} - \frac{0}{x+1} = \frac{1}{x+1}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in J, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}.}$$

Comme $\frac{1}{x+1}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes entraîne que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.}$$

- (d) (i) Montrons que, pour tout $(x, y) \in J^2$ et tout $t \in]0, 1]$, on a : $x \leq y \implies t^x \geq t^y$. Par définition, on sait que $t^x = e^{x \ln(t)}$ et $t^y = e^{y \ln(t)}$. Comme $t \in]0, 1]$, on voit que $\ln(t) \leq 0$, ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned} x \leq y &\implies y - x \geq 0 \\ &\implies (y - x) \ln(t) \leq 0 \\ &\implies e^{(y-x) \ln(t)} \leq 1 \\ &\implies e^{y \ln(t) - x \ln(t)} \leq 1 \\ &\implies \frac{t^y}{t^x} \leq 1 \\ &\implies t^y \leq t^x \quad \text{car } t^x > 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on vient de montrer que :

$$\boxed{\forall (x, y) \in J^2, \quad \forall t \in]0, 1], \quad x \leq y \implies t^x \geq t^y.}$$

- (ii) D'après la question précédente, on sait que, pour tout $(x, y) \in J^2$ et tout $t \in]0, 1]$ tels que $x \leq y$, on a $t^y \leq t^x$. Comme $1 + t > 0$, il s'ensuit par division par $1 + t$ que :

$$\frac{t^y}{1+t} \leq \frac{t^x}{1+t}.$$

Comme les intégrales impropres $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$ et $\int_0^1 \frac{t^y}{1+t} dt$ convergent d'après la question (2)(a), on obtient par croissance de l'intégrale que :

$$\int_0^1 \frac{t^y}{1+t} dt \leq \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt,$$

d'où il s'ensuit que $f(y) \leq f(x)$ si $x \leq y$, et donc :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est décroissante sur } J.}$$

- (e) Montrons que, pour tout $x \in J$, on a : $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} f(x) + f(x+1) &= \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^x + t^{x+1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^x(1+t)}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 t^x dt. \end{aligned}$$

D'après les calculs de la question (2)(c), on sait que $\int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$, et donc :

$$\boxed{\forall x \in J, \quad f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}.}$$

(f) D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in J$:

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}.$$

Comme la fonction f est décroissante, on voit que $f(x+1) \leq f(x)$, et donc :

$$\frac{1}{x+1} \leq 2f(x).$$

Toujours par décroissance de f , on sait que $f(x+1) \leq f(x)$, et donc :

$$\frac{1}{x+1} \geq 2f(x+1).$$

Si l'on effectue le changement de variable $y = x+1$, on obtient que, pour tout $y > 0$:

$$\frac{1}{y} \geq 2f(y).$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{x+1} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{x},$$

ce qui entraîne après division par $\frac{1}{x}$ que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{f(x)}{\frac{1}{2x}} \leq 1.$$

Par des calculs simples, on trouve alors que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \leq \frac{f(x)}{\frac{1}{2x}} \leq 1.$$

Comme $1/x$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes entraîne que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{2x}} = 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}.$$

(g) Soit x un élément de J .

(i) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \forall x \in J, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En effet, comme $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$, on a :

$$(-1)^{0+1} f(0+1+x) + \sum_{k=0}^0 \frac{(-1)^k}{k+1+x} = -f(x+1) + \frac{1}{x+1} = f(x).$$

À présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que, pour tout $x \in J$:

$$f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x} \quad (*).$$

Comme J est l'intervalle $] -1, +\infty[$, on voit que $x+n+1$ appartient à J pour tout $x \in J$. Dès lors, on obtient avec la question (2)(e) que, pour tout $x \in J$:

$$f(x+n+1) + f(x+n+2) = \frac{1}{x+n+2}.$$

Si l'on remplace $f(x+n+1)$ par $-f(x+n+2) + \frac{1}{x+n+2}$ dans la relation $(*)$, alors on trouve :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (-1)^{n+1}f(n+1+x) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x} \\
 &= (-1)^{n+1} \left[-f(n+2+x) + \frac{1}{x+n+2} \right] + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x} \\
 &= (-1)^{n+2}f(n+2+x) + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2+x} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x} \\
 &= (-1)^{n+2}f(n+2+x) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k+1+x},
 \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donc pour tout $x \in J$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = (-1)^{n+1}f(n+1+x) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

(ii) D'après la question (2)(g)(i), on sait que, pour tout $x \in J$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = (-1)^{n+1}f(n+1+x) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

Comme de plus $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$ d'après la question (2)(f), on voit que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. En particulier, pour x un réel fixé, la suite $(f(n+1+x))$ tend vers 0, et donc la suite $((-1)^{n+1}f(n+1+x))$ tend aussi vers 0 en tant que produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0. Dès lors, la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x}\right)$ tend vers $f(x)$. Mais comme il s'agit de la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{(-1)^k}{k+1+x}$, il s'ensuit que :

$$\text{la série } \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x} \text{ converge et : } f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

(h) (i) Montrons que, pour tout $(x, y) \in J^2$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \leq \frac{|x-y|}{k^2}.$$

Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $(x, y) \in J^2$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| = \left| \frac{(k+1+y) - (k+1+x)}{(k+1+x)(k+1+y)} \right| = \frac{|y-x|}{|(k+1+x)(k+1+y)|}.$$

Comme x, y appartiennent à J , on voit que $x, y \geq -1$, et donc $k+1+x, k+1+y \geq k$, ce qui entraîne que :

$$\frac{1}{|(k+1+x)(k+1+y)|} \leq \frac{1}{k \times k}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $(x, y) \in J^2$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \leq \frac{|x-y|}{k^2}.$$

(ii) D'après la question précédente, on sait que, pour tout $(x, y) \in J^2$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \leq \frac{|x-y|}{k^2}.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on trouve que, pour tout $(x, y) \in J^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+y} \right| &= \left| \sum_{k=0}^n \left(\frac{(-1)^k}{k+1+x} - \frac{(-1)^k}{k+1+y} \right) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^n \left| \frac{(-1)^k}{k+1+x} - \frac{(-1)^k}{k+1+y} \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| + \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \\
&\leq \left| \frac{(1+y) - (1+x)}{(1+x)(1+y)} \right| + \sum_{k=1}^n \frac{|x-y|}{k^2} \\
&\leq \frac{|y-x|}{|(1+x)(1+y)|} + \sum_{k=1}^n \frac{|x-y|}{k^2}.
\end{aligned}$$

Comme x, y appartiennent à J , on voit que $x, y > -1$, et donc $(1+x), (1+y) > 0$, ce qui entraîne que $(1+x)(1+y) > 0$. Dès lors, par linéarité de la somme, il s'ensuit que, pour tout $(x, y) \in J^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+y} \right| \leq \frac{|y-x|}{(1+x)(1+y)} + |y-x| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad (*).$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ converge d'après le cours, et que les séries $\sum \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ et $\sum \frac{(-1)^k}{k+1+y}$ convergent d'après les questions précédentes, il s'ensuit par passage à la limite dans l'inégalité (*) que :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+y} \right| \leq \frac{|y-x|}{(1+x)(1+y)} + |y-x| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Mais comme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on en déduit que, pour tout $(x, y) \in J^2$:

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right).}$$

- (iii) Montrons que f est continue sur J . Soit $x \in J$ un réel fixé. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $y \in J$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right).$$

Quand y tend vers x , on voit que $|x-y|$ tend vers 0 et que $\frac{1}{(x+1)(y+1)}$ tend vers $\frac{1}{(x+1)^2}$, et donc $|x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right)$ tend vers 0. D'après le théorème d'encadrement, il s'ensuit que $|f(x) - f(y)|$ tend vers 0 quand y tend vers x , et donc :

$$f(y) \xrightarrow{y \rightarrow x} f(x).$$

Dès lors, la fonction f est continue au point x , et ce pour tout $x \in J$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } J.}$$

- (i) Montrons que : $f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1}$. D'après la question (2)(e), on sait que, pour tout $x \in J$:

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}.$$

D'après les questions (2)(b) et (2)(h)(iii), on sait que $f(0) = \ln(2)$ et que f est continue sur J , ce qui entraîne qu'au voisinage de -1 :

$$f(x+1) = \ln(2) + o(1).$$

Dès lors, il s'ensuit qu'au voisinage de -1 , on a :

$$f(x) = -f(x+1) + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1} + \ln(2) + o(1).$$

Si l'on divise cette égalité par $\frac{1}{x+1}$, on obtient qu'au voisinage de -1 :

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x+1}} = 1 + \frac{\ln(2)}{\frac{1}{x+1}} + o\left(\frac{1}{\frac{1}{x+1}}\right) = 1 + \ln(2)(x+1) + o(x+1).$$

Dès lors, il s'ensuit que $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{\frac{1}{x+1}} = 1$, ce qui entraîne que :

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1}}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = +\infty$, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty}.$$

(3) Dérivabilité de f :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note g_k l'application de classe $\mathcal{C}^2$ de J dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $x \in J$ par :

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

(a) Montrons que, pour tout $(x, y) \in J^2$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g'_k(x)| \leq \frac{|x-y|^2}{k^3}.$$

Par hypothèse, on sait que g_k est de classe $\mathcal{C}^2$ sur J . De plus, pour tout $x \in J$, on a :

$$|g''_k(x)| = \left| \frac{2(-1)^k}{(k+1+x)^3} \right| = \frac{2}{|(k+1+x)^3|}.$$

Comme x appartient à J , on voit que $x > -1$, et donc $(k+1+x) > k$, ce qui entraîne que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in J$, on a :

$$|g''_k(x)| \leq \frac{2}{k^3}.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, il s'ensuit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in J$:

$$|g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g'_k(x)| \leq \frac{2|x-y|^2}{2!.k^3}.$$

Dès lors, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in J$:

$$\boxed{|g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g'_k(x)| \leq \frac{|x-y|^2}{k^3}}.$$

(b) Justifions la convergence des séries $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3}$ et $\sum_{k \geq 0} g'_k(x)$ pour tout $x \in J$. Tout d'abord, on peut remarquer que la première série est la série de Riemann de paramètre 3, et qui converge donc. De plus, pour tout $x \in J$, on voit que :

$$|g'_k(x)| = \left| \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2} \right| = \frac{1}{(k+1+x)^2}.$$

Comme x appartient à J , on voit que $x > -1$, et donc $(k+1+x) > k$, ce qui entraîne que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in J$, on a :

$$|g'_k(x)| \leq \frac{1}{k^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge, il s'ensuit que la série $\sum |g'_k(x)|$ converge d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs. Mais alors la série $\sum g'_k(x)$ converge absolument, et donc elle converge. Par conséquent, pour tout $x \in J$:

$$\boxed{\text{les séries } \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3} \text{ et } \sum_{k \geq 0} g'_k(x) \text{ convergent.}}$$

(c) D'après la question (3)(a), on sait que, pour tout $(x, y) \in J^2$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|g_k(x) - g_k(y) - (x - y)g'_k(x)| \leq \frac{|x - y|^2}{k^3}.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on trouve que, pour tout $(x, y) \in J^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n g_k(y) - \sum_{k=0}^n g_k(x) - (y - x) \sum_{k=0}^n g'_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=0}^n (g_k(y) - g_k(x) - (y - x)g'_k(x)) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n |g_k(y) - g_k(x) - (y - x)g'_k(x)| \\ &\leq |g_0(y) - g_0(x) - (y - x)g'_0(x)| + \sum_{k=1}^n \frac{|x - y|^2}{k^3}. \end{aligned}$$

Or, par des calculs simples, on obtient que, pour tout $(x, y) \in J^2$:

$$\begin{aligned} |g_0(y) - g_0(x) - (y - x)g'_0(x)| &= \left| \frac{1}{1 + y} - \frac{1}{1 + x} + (y - x) \frac{1}{(1 + x)^2} \right| \\ &= \left| \frac{-(y - x)}{(1 + x)(1 + y)} + (y - x) \frac{1}{(1 + x)^2} \right| \\ &= \left| \frac{(y - x)^2}{(1 + x)^2(1 + y)} \right|. \end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit par linéarité de la somme que, pour tout $(x, y) \in J^2$:

$$\left| \sum_{k=0}^n g_k(y) - \sum_{k=0}^n g_k(x) - (y - x) \sum_{k=0}^n g'_k(x) \right| \leq \left| \frac{(y - x)^2}{(1 + x)^2(1 + y)} \right| + (y - x)^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \quad (*).$$

Comme les séries $\sum \frac{1}{k^3}$, $\sum g_k(x)$, $\sum g_k(y)$ et $\sum g'_k(x)$ convergent d'après les questions précédentes, il s'ensuit par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité (*) que :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(y) - \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x) - (y - x) \sum_{k=0}^{+\infty} g'_k(x) \right| \leq \frac{(y - x)^2}{(1 + x)^2(1 + y)} + (y - x)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Par définition des fonctions f et g_k , il s'ensuit que, pour tout $(x, y) \in J^2$:

$$\left| f(y) - f(x) - (y - x) \sum_{k=0}^{+\infty} g'_k(x) \right| \leq \frac{(y - x)^2}{(1 + x)^2(1 + y)} + (y - x)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Après division par $(x - y)$, on obtient que, pour tout $(x, y) \in J^2$ tel que $x \neq y$, on a :

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \sum_{k=0}^{+\infty} g'_k(x) \right| \leq \frac{|y - x|}{(1 + x)^2(1 + y)} + |y - x| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \quad (**).$$

Comme le membre de droite de l'inégalité (**) tend vers 0 quand y tend vers x , il s'ensuit d'après le théorème des gendarmes que :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \sum_{k=0}^{+\infty} g'_k(x) \xrightarrow{y \rightarrow x} 0,$$

ce qui signifie que, pour tout $x \in J$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \xrightarrow{y \rightarrow x} \sum_{k=0}^{+\infty} g'_k(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$f \text{ est dérivable sur } J \text{ et de plus : } \forall x \in J, \quad f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k + 1 + x)^2}.$$

(d) Déterminons la valeur de $f'(0)$. D'après la question précédente, on sait que :

$$f'(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+0)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

D'après le résultat de la question (1)(c), on en déduit que :

$$\boxed{f'(0) = -\frac{\pi^2}{12}.$$