

Corrigé du Devoir Maison de Mathématiques n°1

Corrigé de l'exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie pour tout $x \in]n, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = (x - n) \ln(x) - x \ln(x - n).$$

On considère aussi la fonction g définie pour tout $x \in]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

- (1) (a) Dressons le tableau des variations complet de g . Tout d'abord, on voit que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x > 0$, on a :

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

En particulier, on voit que $g'(x) \geq 0$ si et seulement si $1 - \ln(x) \geq 0$, c'est-à-dire si $\ln(x) \leq 1$, ou en d'autres termes si $x \leq e$. Dès lors, il s'ensuit que g est croissante sur $]0, e]$ et décroissante sur $]e, +\infty[$. Par ailleurs, comme $\ln$ tend vers $-\infty$ en 0^+ , on constate que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty.$$

En outre, on obtient par croissances comparées que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Par conséquent, on en déduit le tableau de variations suivant pour g :

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$	+	-	
g	 -∞	1/e ↗ ↘ 0	

- (b) Montrons tout d'abord que la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante. Comme la fonction g est décroissante sur $]e, +\infty[$ d'après la question (1)(a) et que $e < 3$, on a pour tout entier $k \geq 3$:

$$\frac{\ln(k+1)}{k+1} = g(k+1) \leq g(k) = \frac{\ln(k)}{k}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante.

A présent, montrons que :

$$\forall k \geq 4, \quad \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}.$$

Par des calculs simples, on constate que :

$$\frac{\ln(4)}{4} = \frac{\ln(2^2)}{2^2} = \frac{2 \ln(2)}{2 \times 2} = \frac{\ln(2)}{2}.$$

Dès lors, comme la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante, il s'ensuit que, pour tout $k \geq 4$:

$$\frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(4)}{4} = \frac{\ln(2)}{2}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$\forall k \geq 4, \quad \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}.$

- (2) (a) Justifions que la fonction f_n est dérivable sur $]n, +\infty[$ et donnons l'expression de $f'_n(x)$ pour tout $x > n$. Comme les fonctions $\ln$ et $x \mapsto x - n$ sont dérivables respectivement sur $]0, +\infty[$ et sur $]n, +\infty[$, et que la deuxième est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur $]n, +\infty[$, on obtient par composition que la fonction $x \mapsto \ln(x - n)$ est dérivable sur $]n, +\infty[$. Dès lors, comme les fonctions $\ln$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x - n$ sont dérivables sur $]n, +\infty[$, il s'ensuit par produit et somme que :

$$\boxed{\text{la fonction } f_n \text{ est dérivable sur }]n, +\infty[.}$$

En outre, on trouve par des calculs simples que, pour tout $x > n$:

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= 1 \times \ln(x) + (x - n) \times \frac{1}{x} - 1 \times \ln(x - n) - x \times \frac{1}{x - n} \\ &= \ln(x) + (x - n) \times \frac{1}{x} - \ln(x - n) - x \times \frac{1}{x - n} \\ &= \ln(x) + 1 - \frac{n}{x} - \ln(x - n) - \frac{x - n + n}{x - n} \\ &= \ln(x) + 1 - \frac{n}{x} - \ln(x - n) - 1 - \frac{n}{x - n} \\ &= \ln(x) - \ln(x - n) - \frac{n}{x} - \frac{n}{x - n} \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit après simplification que, pour tout $x > n$:

$$\boxed{f'_n(x) = \ln\left(\frac{x}{x - n}\right) + \frac{-2nx + n^2}{x(x - n)}}.$$

- (b) Montrons que, pour tout réel $t > 0$, on a : $\ln(t) \leq t - 1$. Pour ce faire, on pose $h(t) = \ln(t) - t + 1$ pour tout $t > 0$. Alors la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a pour tout $t > 0$:

$$h'(t) = \frac{1}{t} - 1.$$

En particulier, on voit que $h'(t) \geq 0$ si et seulement si $\frac{1}{t} - 1 \geq 0$, c'est-à-dire si $\frac{1}{t} \geq 1$, ou en d'autres termes si $t \leq 1$. Dès lors, il s'ensuit que h est croissante sur $]0, 1]$ et décroissante sur $]1, +\infty[$. En outre, comme $h(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0$, on voit que la fonction h admet un maximum global sur $\mathbb{R}_+^*$, atteint en $t = 1$ et qui vaut 0. En d'autres termes, ceci signifie que $h(t) \leq 0$ pour tout $t > 0$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\forall t > 0, \ln(t) \leq t - 1.}$$

- (c) Soit n un entier ≥ 2 . Montrons que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [n + 1, n + 2]$, admet une unique solution, que l'on notera x_n par la suite. D'après la question(2)(a), on sait que la fonction f_n est dérivable sur $[n + 1, n + 2]$ et de plus, on a pour tout $x \in [n + 1, n + 2]$:

$$f'_n(x) = \ln\left(\frac{x}{x - n}\right) + \frac{-2nx + n^2}{x(x - n)}.$$

D'après la question (2)(b), on obtient que, pour tout $x \in [n + 1, n + 2]$:

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \ln\left(\frac{x}{x - n}\right) + \frac{-2nx + n^2}{x(x - n)} \\ &\leq \frac{x}{x - n} - 1 + \frac{-2nx + n^2}{x(x - n)} \\ &\leq \frac{x^2 - x(x - n) - 2nx + n^2}{x(x - n)} \\ &\leq \frac{x^2 - x^2 + nx - 2nx + n^2}{x(x - n)} \\ &\leq \frac{-nx + n^2}{x(x - n)}. \end{aligned}$$

En particulier, ceci entraîne que, pour tout $x \in [n+1, n+2]$:

$$\begin{aligned} f'_n(x) &\leq \frac{-nx + n^2}{x(x-n)} \\ &\leq \frac{-n(x-n)}{x(x-n)} \\ &\leq \frac{-n}{x} < 0. \end{aligned}$$

Dès lors, la fonction f_n est strictement décroissante sur $[n+1, n+2]$. Comme f_n est de plus continue sur cet intervalle, elle définit une bijection de $[n+1, n+2]$ sur $f_n([n+1, n+2])$ d'après le théorème de la bijection. A noter que :

$$f_n(n+1) = (n+1-n) \ln(n+1) - (n+1) \ln(n+1-n) = \ln(n+1) > 0.$$

De même, on trouve que :

$$f_n(n+2) = (n+2-n) \ln(n+2) - (n+2) \ln(n+2-n) = 2 \ln(n+2) - (n+2) \ln(2).$$

D'après la question (1)(b), on voit que, pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{\ln(n+2)}{n+2} \leq \frac{\ln(2)}{2},$$

ce qui entraîne que $2 \ln(n+2) \leq \ln(2)(n+2)$, et donc $f_n(n+2) \leq 0$. En particulier, l'intervalle $f_n([n+1, n+2])$ contient 0. Mais comme la fonction f_n définit une bijection de $[n+1, n+2]$ sur $f_n([n+1, n+2])$ d'après ce qui précède, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur } [n+1, n+2].}$$

- (3) Montrons que : $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$. D'après la question précédente, on sait que $n+1 \leq x_n \leq n+2$ pour tout $n \geq 2$. En particulier, on obtient après division que, pour tout $n \geq 2$:

$$1 + \frac{1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq 1 + \frac{2}{n}.$$

D'après le théorème d'encadrement, il s'ensuit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n.}$$

- (4) (a) Justifions que, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\ln(x_n - n) = (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}.$$

Comme $f_n(x_n) = 0$ par définition de x_n , on obtient que, pour tout $n \geq 2$:

$$f_n(x_n) = (x_n - n) \ln(x_n) - x_n \ln(x_n - n) = 0.$$

En particulier, ceci entraîne que $(x_n - n) \ln(x_n) = x_n \ln(x_n - n)$. Comme $x_n > 0$, il s'ensuit après division que, pour tout $n \geq 2$:

$$\boxed{\ln(x_n - n) = (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}.}$$

- (b) Déterminons tout d'abord $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n}$. Comme $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$, on voit que la suite (x_n) tend vers $+\infty$. Dès lors, comme $\ln(x)/x$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ par croissances comparées, il s'ensuit par composition des limites que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n} = 0.}$$

A présent, montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n) = 1$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $n \geq 2$:

$$\ln(x_n - n) = (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}.$$

Comme x_n appartient à l'intervalle $[n+1, n+2]$ pour tout $n \geq 2$ par construction, on voit que $n+1 \leq x_n \leq n+2$ pour tout $n \geq 2$, et donc $1 \leq x_n - n \leq 2$ pour tout $n \geq 2$. En particulier, la suite $(x_n - n)$ est bornée. Comme le produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0 tend vers 0, il s'ensuit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(x_n - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n} = 0.$$

Mais comme l'exponentielle est continue en 0, on en déduit par composition des limites que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(x_n - n)} = e^0 = 1.$$

(5) Pour tout $n \geq 2$, on pose : $u_n = x_n - n - 1$.

(a) Justifions tout d'abord que $\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$. Comme $(x_n - n)$ converge vers 1 d'après la question précédente, on voit que la suite $(u_n) = (x_n - n - 1)$ converge vers 0. Dès lors, comme $\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, il s'ensuit par substitution que :

$$\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n.$$

A présent, justifions que $\ln(1 + n + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$. Comme $u_n = x_n - n - 1$ pour tout $n \geq 2$, on voit que $1 + n + u_n = x_n$ pour tout $n \geq 2$. Dès lors, comme $n+1 \leq x_n \leq n+2$ pour tout $n \geq 2$ par construction, on obtient par croissance de la fonction $\ln$ que, pour tout $n \geq 2$:

$$\ln(n+1) \leq \ln(x_n) = \ln(1 + n + u_n) \leq \ln(n+2).$$

Après division par $\ln(n)$, on trouve que, pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(1 + n + u_n)}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n+2)}{\ln(n)},$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\frac{\ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(1 + n + u_n)}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n) + \ln(1 + \frac{2}{n})}{\ln(n)}.$$

En particulier, on vient de montrer que, pour tout $n \geq 2$:

$$1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(1 + n + u_n)}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{\ln(1 + \frac{2}{n})}{\ln(n)}.$$

Comme $\frac{1}{n}$ et $\frac{2}{n}$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et que la fonction $\ln$ est continue en 1, ceci entraîne que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \ln(1) = 0.$$

Comme la fonction $\ln$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, il s'ensuit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(1 + \frac{2}{n})}{\ln(n)} = 1.$$

Dès lors, on obtient d'après le théorème d'encadrement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + n + u_n)}{\ln(n)} = 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\ln(1 + n + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

(b) Montrons que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$. D'après la question (4)(a), on sait que, pour tout $n \geq 2$:

$$\ln(x_n - n) = (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}.$$

Comme $u_n = x_n - n - 1$ pour tout $n \geq 2$, ceci entraîne que, pour tout $n \geq 2$:

$$\ln(1 + u_n) = (x_n - n) \frac{\ln(1 + n + u_n)}{x_n}.$$

Comme $(x_n - n)$ converge vers 1 d'après la question (4)(b), on obtient que $x_n - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$. Dès lors, comme $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ d'après la question (3), on trouve que :

$$\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \times \frac{\ln(1 + n + u_n)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(1 + n + u_n)}{n}.$$

Comme $\ln(1 + n + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ d'après la question précédente, il s'ensuit que :

$$\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(1 + n + u_n)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

Mais comme $\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ d'après la question précédente, on en déduit que :

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}}.$$

(6) Déterminons tout d'abord la nature de la série $\sum u_n$. D'après la question précédente, on sait que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

En particulier, comme $\frac{\ln(n)}{n} > 0$ pour tout $n \geq 2$, on voit que $u_n > 0$ pour n assez grand, mettons à partir d'un indice $n_0 \geq 2$. Dès lors, ceci entraîne que :

$$\frac{1}{nu_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}.$$

Comme $\frac{1}{\ln(n)}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on constate que $\frac{1}{nu_n}$ tend aussi vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc :

$$\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n).$$

Si la série $\sum u_n$ convergeait, alors la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ convergerait aussi par négligeabilité, car $u_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui est impossible. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ diverge.}}$$

Déterminons à présent la nature de la série $\sum u_n^2$. D'après la question précédente, on sait que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

En particulier, on obtient après calculs que :

$$n^{3/2} u_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{3/2} \left(\frac{\ln(n)}{n} \right)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{\sqrt{n}}.$$

Comme $\frac{\ln^2(n)}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ par croissances comparées, on constate que $n^{3/2} u_n^2$ tend aussi vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc :

$$u_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (car $3/2 > 1$) et qu'elle est à termes positifs, on en déduit par négligeabilité que :

$$\boxed{\text{la série } \sum u_n^2 \text{ converge.}}$$

Corrigé de l'exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par u_n la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)}.$$

- (1) Justifions la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ (on notera $f(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$). Comme $\alpha > 0$, on voit que $\alpha + 1 > 1$. Dès lors, d'après le critère de convergence de Riemann, il s'ensuit que :

$$\boxed{\text{la série de Riemann } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \text{ converge.}}$$

- (2) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $u_n(x)$ est convergente. Pour ce faire, on va distinguer les cas " $x = 0$ " et " $x \neq 0$ ". Tout d'abord, si $x = 0$, on voit que $u_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc la série $\sum_{n \geq 1} u_n(0)$ converge comme série nulle. Si maintenant $x \neq 0$, alors on constate que $1 + nx^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nx^2$, ce qui entraîne que :

$$\frac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n^{\alpha+1}x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha+1}x}.$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge d'après la question (1), on obtient par linéarité que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}x}$ converge. Dès lors, comme $\frac{1}{n^{\alpha+1}x}$ est du signe de x , il s'ensuit d'après le critère d'équivalence des séries à termes de signe constant que la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} u_n(x) \text{ converge.}}$$

Par la suite, on note pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x).$$

- (3) (a) Montrons que la fonction S est impaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on voit que :

$$u_n(-x) = \frac{-x}{n^\alpha(1 + n(-x)^2)} = \frac{-x}{n^\alpha(1 + nx^2)} = -u_n(x).$$

Par sommation sur l'entier n et par linéarité de la somme, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -u_n(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = -S(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } S \text{ est impaire.}}$$

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudions les variations de la fonction u_n sur $\mathbb{R}$. Par définition, la fonction u_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$u'_n(x) = \frac{1 \times (1 + nx^2) - x \times (2nx)}{n^\alpha(1 + nx^2)^2} = \frac{1 - nx^2}{n^\alpha(1 + nx^2)^2}.$$

En particulier, on voit que $u'_n(x) \geq 0$ si et seulement si $1 - nx^2 \geq 0$, c'est-à-dire si $\frac{1}{n} \geq x^2$, ou en d'autres termes si $x \in [-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}]$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{u_n \text{ est décroissante sur }]-\infty, \frac{1}{\sqrt{n}}[, \text{ croissante sur } [-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}] \text{ et décroissante sur }]\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty[.}}$$

- (c) Déterminons les variations de la fonction S sur $[1, +\infty[$, puis sur $] -\infty, -1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $x, y \geq 1$ tels que $x \leq y$, on voit que $x, y \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, et donc $u_n(x) \geq u_n(y)$ d'après la question (3)(b). Par sommation sur l'entier n , on trouve que, pour tous $x, y \geq 1$ tels que $x \leq y$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y) = S(y).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } S \text{ est décroissante sur } [1, +\infty[.}}$$

Comme la fonction S est impaire sur $\mathbb{R}$ d'après la question (3)(a), on en déduit aussi que :

$$\boxed{\text{la fonction } S \text{ est décroissante sur }] -\infty, -1] .}}$$

- (4) (a) Montrer que, pour tout $x \geq 1$, on a :

$$\frac{x}{(1+x)^2} f(\alpha) \leq S(x) \leq \frac{1}{x} f(\alpha).$$

Partant de l'encadrement $0 < nx^2 \leq 1 + nx^2 \leq n(1+x)^2$ valable pour tout $x \geq 1$ et pour tout $n \geq 1$, on obtient que, pour tout $x \geq 1$ et pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n(1+x)^2} \leq \frac{1}{1+nx^2} \leq \frac{1}{nx^2}.$$

Par produit, ceci nous donne que, pour tout $x \geq 1$ et pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{x}{n^{\alpha+1}(1+x)^2} \leq \frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)} \leq \frac{1}{n^{\alpha+1}x}.$$

Comme les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^{\alpha+1}(1+x)^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}x}$ convergent comme multiples de séries de Riemann convergentes, et que la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge d'après la question (2), on trouve par sommation sur l'entier n que, pour tout $x \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^{\alpha+1}(1+x)^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}x}.$$

Par linéarité de la somme, il s'ensuit que, pour tout $x \geq 1$:

$$\frac{x}{(1+x)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)} \leq \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \geq 1$:

$$\boxed{\frac{x}{(1+x)^2} f(\alpha) \leq S(x) \leq \frac{1}{x} f(\alpha).}$$

- (b) Déterminons un équivalent de $S(x)$ et sa limite en $+\infty$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \geq 1$:

$$\frac{x}{(1+x)^2} f(\alpha) \leq S(x) \leq \frac{1}{x} f(\alpha).$$

Par produit, ceci nous donne que, pour tout $x \geq 1$:

$$\frac{x^2}{(1+x)^2} \leq \frac{xS(x)}{f(\alpha)} \leq 1.$$

Comme $(1+x^2) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$, on voit que le quotient $\frac{x^2}{(1+x)^2}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, il s'ensuit que :

$$\frac{xS(x)}{f(\alpha)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(\alpha)}{x}}.$$

Comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit aussi que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0.}$$

- (5) On suppose que $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

- (a) Justifions tout d'abord que $S(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x)$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \geq 0$. Par définition, comme $2n \geq n+1$ vu que $n \geq 1$, on peut séparer $S(x)$ en trois morceaux :

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x) + \sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

Comme $x \geq 0$, on voit que $u_k(x) = \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)} \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et donc on obtient par sommation sur k que :

$$\sum_{k=1}^n u_k(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k(x) \geq 0.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \geq 0$:

$$S(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x).$$

A présent, montrons que, pour tout $n \geq 1$:

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geq \frac{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on remplace x par $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ dans l'inégalité démontrée précédemment et si l'on part du fait que $k^\alpha(1 + \frac{k}{2n}) \leq (2n)^\alpha(1 + \frac{2n}{2n})$ pour tout $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, on trouve que, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}}}{k^\alpha(1 + k(\frac{1}{\sqrt{2n}})^2)} \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}}}{k^\alpha(1 + \frac{k}{2n})} \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}}}{(2n)^\alpha(1 + \frac{2n}{2n})} \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}}}{2^{\alpha+1}n^\alpha} \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}n^{\alpha+\frac{1}{2}}} \\ &\geq (2n - (n+1) + 1) \frac{1}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}n^{\alpha+\frac{1}{2}}} \\ &\geq n \frac{1}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}n^{\alpha+\frac{1}{2}}} \\ &\geq \frac{n^{1-\frac{1}{2}-\alpha}}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geq \frac{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}.$$

- (b) Montrons que la fonction S n'est pas continue en 0. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose que S est continue en 0. Comme $u_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient que $S(0) = 0$. Comme S est continue en 0, on voit que $S(x)$ tend vers $S(0) = 0$ quand x tend vers 0. En particulier, comme $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on trouve par composition des limites que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = 0.$$

Comme $\alpha \leq \frac{1}{2}$, on voit que $n^{\frac{1}{2}-\alpha} \geq 1$ pour tout $n \geq 1$. Dès lors, on obtient d'après la question (4)(a) que, pour tout $n \geq 1$:

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geq \frac{1}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}.$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on trouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geq \frac{1}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}},$$

d'où il s'ensuit que $0 \geq \frac{1}{2^{\alpha+\frac{3}{2}}}$, ce qui est impossible. Par conséquent, on en déduit que :

la fonction S n'est pas continue en 0.

Corrigé de l'exercice 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt.$$

- (1) Montrons que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale I_a converge, et donnons sa valeur. Pour tout réel $y > 0$, on voit par un calcul simple que :

$$\int_0^y e^{-at} dt = \left[-\frac{e^{-at}}{a} \right]_0^y = -\frac{e^{-ay}}{a} + \frac{e^0}{a} = -\frac{e^{-ay}}{a} + \frac{1}{a}.$$

Comme $a > 0$, il s'ensuit que e^{-ay} tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$, et donc l'intégrale $\int_0^y e^{-at} dt$ tend vers $\frac{1}{a}$ quand y tend vers $+\infty$. Par conséquent, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

l'intégrale I_a converge, et de plus : $I_a = \frac{1}{a}$.

- (2) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, les intégrales $f(x)$ et $g(x)$ convergent. Comme x est un réel positif, on voit que $x + e^t \geq e^t$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \frac{1}{x+e^t} \leq e^{-t}.$$

Comme l'intégrale $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge d'après la question (1), il s'ensuit que l'intégrale $f(x)$ converge aussi d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. De même, comme x est un réel positif, il vient que $(x + e^t)^2 \geq e^{2t}$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \frac{1}{(x+e^t)^2} \leq e^{-2t}.$$

Comme l'intégrale $I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt$ converge d'après la question (1), il s'ensuit que l'intégrale $g(x)$ converge d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. Par conséquent :

les intégrales $f(x)$ et $g(x)$ convergent pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

- (3) Établissons que, pour tout $(x, t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a : $2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$. Pour ce faire, il suffit de remarquer que, pour tout $(x, t) \in (\mathbb{R}_+)^2$:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{e^t})^2 = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{e^t})^2 - 2\sqrt{xe^t} = x + e^t - 2\sqrt{xe^t} \geq 0.$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $(x, t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a :

$$2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t.$$

Par inversion de cette inégalité, on obtient que, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$:

$$0 \leq \frac{1}{x+e^t} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-t/2}.$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge d'après la question (1), on voit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-t/2} dt$ converge aussi par linéarité. De plus, par croissance et positivité de l'intégrale, il s'ensuit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t} \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-t/2} dt.$$

Mais comme $I_{1/2} = \int_0^{+\infty} e^{-t/2} dt = 2$ d'après la question (1), on en déduit par linéarité que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

- (4) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Montrons que : $0 < f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}$. Par des calculs simples, on a pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t} = \frac{(y+e^t) - (x+e^t)}{(x+e^t)(y+e^t)} = \frac{(y-x)}{(x+e^t)(y+e^t)}.$$

Comme $x, y, y-x, e^t$ sont ≥ 0 , on voit que $x+e^t, y+e^t \geq e^t$, et donc pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$0 \leq \frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t} \leq (y-x) \frac{1}{e^t \cdot e^t} = (y-x)e^{-2t}.$$

Comme les intégrales $f(x)$ et $f(y)$ convergent, il s'ensuit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t}) dt$ converge aussi par linéarité. Dès lors, par positivité et croissance de l'intégrale, il s'ensuit que :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t} \right) dt \leq \int_0^{+\infty} (y-x)e^{-2t} dt,$$

ce qui entraîne après calculs que :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t} \right) dt \leq \frac{(y-x)}{2}.$$

Par linéarité de l'intégrale, on sait que $f(x) - f(y) = \int_0^{+\infty} (\frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t}) dt$, et donc :

$$0 \leq f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}.$$

A noter que, comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t}$ est positive et non identiquement nulle d'après ce qui précède, il vient par stricte positivité de l'intégrale que $0 < f(x) - f(y)$. Par conséquent :

$$\boxed{0 < f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}}.$$

- (5) Montrons que f réalise une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$. Pour ce faire, on peut commencer par remarquer que f est strictement décroissante. En effet, d'après la question précédente, on sait que, pour tous réels $x, y \geq 0$ tels que $x < y$, on a : $0 < f(x) - f(y)$, et donc f est strictement décroissante. A présent, montrons que f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Toujours d'après la question précédente, on sait que, pour tous réels $x, y \geq 0$ tels que $x < y$, on a :

$$0 < f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}.$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tous réels $x, y \geq 0$ tels que $x < y$:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|y-x|}{2}.$$

On notera que cette inégalité est encore vraie si $x = y$ (puisque cela nous donne $0 \leq 0$). En échangeant les rôles joués par x et y , on obtient que, pour tous réels $x, y \geq 0$ tels que $x > y$:

$$|f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| \leq \frac{|x-y|}{2} = \frac{|y-x|}{2}.$$

Dans tous les cas, on voit que, pour tous réels $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$0 \leq |f(x) - f(y)| \leq \frac{|y-x|}{2}.$$

Dès lors, pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, il s'ensuit d'après le théorème des gendarmes que $|f(x) - f(y)|$ tend vers 0 quand y tend vers x , et donc :

$$\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x),$$

ce qui signifie exactement que f est continue en tout point $x \in \mathbb{R}_+$, et donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Partant de là, on sait donc que f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+)$, et il nous reste juste à calculer l'ensemble $f(\mathbb{R}_+)$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, $f(\mathbb{R}_+)$ est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Reste donc à en déterminer les bornes. Par un calcul simple et d'après la question (1), on voit que :

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{0+e^t} = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = I_1 = 1.$$

De plus, d'après la question (3), on sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

D'après le théorème des gendarmes, il s'ensuit que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Mais comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, il s'ensuit que :

$$f(\mathbb{R}_+) =]0, 1].$$

Par conséquent, on en déduit que :

la fonction f est une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$.

- (6) Prouvons que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. Pour ce faire, considérons l'application $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \geq 0$ par $h(x) = f(x) - x$. Tout d'abord, on voit que h est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$. De plus, la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de la bijection, h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $h(\mathbb{R}_+)$, et il nous reste juste à calculer l'ensemble $h(\mathbb{R}_+)$. Comme h est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, $h(\mathbb{R}_+)$ est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Reste donc à en déterminer les bornes. D'après la question (5), on a :

$$h(0) = f(0) - 0 = 1.$$

Toujours d'après la question (5), on sait que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et donc $h(x) = f(x) - x$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Mais comme h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, il s'ensuit que :

$$h(\mathbb{R}_+) =]-\infty, 1].$$

Dès lors, la fonction h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, 1]$. Mais comme 0 appartient à $]-\infty, 1]$, il admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}_+$. Par conséquent :

l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

- (7) Soit α l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+$. Justifions que α appartient à $]0, 1]$. Par définition, on sait que $f(\alpha) = \alpha$, et donc α appartient à $f(\mathbb{R}_+)$. Mais comme $f(\mathbb{R}_+) =]0, 1]$ d'après la question (5), il s'ensuit que :

α appartient à $]0, 1]$.

- (8) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : |\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Tout d'abord, comme $u_0 = 0$ et que $\alpha \in]0, 1]$, on voit que $|\alpha - u_0| = |\alpha| = \alpha \leq 1 = 1/2^0$, et donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. D'après les arguments de la question (6), on sait que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|y - x|}{2}.$$

Si l'on remplace x par α et y par u_n dans cette inégalité, il vient que :

$$|f(\alpha) - f(u_n)| \leq \frac{|\alpha - u_n|}{2}.$$

Comme $f(\alpha) = \alpha$ et que $f(u_n) = u_{n+1}$, il s'ensuit que :

$$|\alpha - u_{n+1}| \leq \frac{|\alpha - u_n|}{2}.$$

Mais par hypothèse de récurrence, on sait que $|\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$, et donc :

$$|\alpha - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}},$$

d'où il s'ensuit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Comme $1/2^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes entraîne que $(\alpha - u_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha.}$$

(9) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leq \frac{h^2}{3}.$$

Par des calculs simples, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} &= \frac{(x+e^t) - (x+h+e^t)}{(x+e^t)(x+h+e^t)} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \\ &= \frac{-h}{(x+e^t)(x+h+e^t)} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \\ &= \frac{h[-(x+e^t) + (x+h+e^t)]}{(x+e^t)^2(x+h+e^t)} \\ &= \frac{h^2}{(x+e^t)^2(x+h+e^t)}. \end{aligned}$$

Dès lors, il vient que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left| \frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \right| = \left| \frac{h^2}{(x+e^t)^2(x+h+e^t)} \right|.$$

Comme $x, x+h, e^t$ sont ≥ 0 , il vient que $x+e^t, x+h+e^t \geq e^t$, et donc pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\left| \frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \right| \leq \frac{h^2}{(e^t)^2 \cdot e^t} = h^2 e^{-3t}.$$

Comme les intégrales impropres $f(x), f(x+h), g(x)$ convergent, il s'ensuit que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \right) dt$ converge aussi par linéarité. De plus, comme la valeur absolue de la fonction $t \mapsto \frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}$ est majorée par $t \mapsto h^2 e^{-3t}$, et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} h^2 e^{-3t} dt$ converge d'après la question (1), il s'ensuit que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \right) dt$ est absolument convergente d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. Dès lors, d'après l'inégalité triangulaire et par croissance de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \right) dt \right| &\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \right| dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} h^2 e^{-3t} dt. \end{aligned}$$

Comme $\int_0^{+\infty} e^{-3t} dt = \frac{1}{3}$ d'après la question (1), il s'ensuit par linéarité que :

$$\left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \right) dt \right| \leq \frac{h^2}{3}.$$

Toujours par linéarité de l'intégrale, on obtient que :

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+h+e^t} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t} + h \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2} \right| \leq \frac{h^2}{3}.$$

Mais par définition de $f(x+h), f(x), g(x)$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in \mathbb{R}_+^*$, on a l'inégalité :

$$\boxed{|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leq \frac{h^2}{3}.}$$

(10) Justifions que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = -g(x)$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$0 \leq |f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leq \frac{h^2}{3}.$$

En divisant cet encadrement par $|h|$, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$0 \leq \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - (-g)(x) \right| \leq \frac{|h|}{3}.$$

Comme $|h|$ tend vers 0 quand h tend vers 0, le théorème des gendarmes entraîne que l'expression $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - (-g)(x)$ tend vers 0 quand h tend vers 0, et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -g(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et de plus : } f' = -g.}$$

(11) Soit $T : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par : $T(x) = xf(x)$. Montrons que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

D'après la question précédente, on sait que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc la fonction T est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme de plus $f' = -g$, il s'ensuit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$T'(x) = 1.f(x) + xf'(x) = f(x) - xg(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t} - x \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2}.$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} T'(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+e^t} - \frac{x}{(x+e^t)^2} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x+e^t - x}{(x+e^t)^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(x+e^t)^2} dt. \end{aligned}$$

Si l'on pose $u = e^t$, alors on voit que $du = e^t dt$, que $u = 1$ si $t = 0$ et que $u = e^A$ si $t = A$. Dès lors, par changement de variable, on obtient que :

$$\int_0^A \frac{e^t}{(x+e^t)^2} dt = \int_1^{e^A} \frac{du}{(x+u)^2} = \left[-\frac{1}{x+u} \right]_1^{e^A} = -\frac{1}{x+e^A} + \frac{1}{x+1}.$$

Comme e^A tend vers $+\infty$ quand A tend vers $+\infty$, il s'ensuit que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(x+e^t)^2} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{e^t}{(x+e^t)^2} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x+e^A} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{T'(x) = \frac{1}{x+1}.$$

(12) D'après le résultat de la question précédente, il s'ensuit par intégration qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $T(x) = K + \ln(1+x)$. Mais comme $T(x) = xf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, il s'ensuit que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f(x) = \frac{K}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Comme $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on voit que $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$, et donc $\frac{\ln(1+x)}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 0. Mais comme f est continue en 0, il s'ensuit que $\frac{K}{x}$ admet une limite finie quand x tend vers 0^+ , ce qui n'est possible que si $K = 0$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Corrigé de l'exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}.$

- (1) Vérifions que I_n est une intégrale convergente. Pour ce faire, on peut commencer par remarquer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n(x+1)}$ est définie, continue et positive sur $[1, +\infty[$ comme inverse d'une fonction continue positive sur $[1, +\infty[$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$. Dès lors, l'intégrale I_n présente une impropriété en $+\infty$. De plus, comme tout polynôme non nul est équivalent à son terme de plus haut degré au voisinage de $+\infty$, on trouve que :

$$\frac{1}{x^n(x+1)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^n \times x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{n+1}}.$$

Comme $n \geq 1$, on voit que $n+1 \geq 2 > 1$, et donc l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}}$ converge d'après le cours. Dès lors, il s'ensuit d'après le critère d'équivalence des intégrales de fonctions positives que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } I_n \text{ converge pour tout } n \in \mathbb{N}^*}.$$

- (2) (a) Déterminons les réels a et b tels que, pour tout réel $x \neq -1, 0$, on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}.$$

Par des calculs simples, on trouve que, pour tout réel $x \neq -1, 0$:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) - x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Par conséquent, on en déduit par identification que :

$$\boxed{a = b = 1}.$$

- (b) Déterminons la valeur de I_1 . Pour ce faire, considérons un réel $y \geq 1$ quelconque. D'après la question précédente, on obtient que :

$$\int_1^y \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^y \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = [\ln(x) - \ln(1+x)]_1^y = \left[\ln \left(\frac{x}{1+x} \right) \right]_1^y.$$

Dès lors, on trouve par des calculs simples que :

$$\int_1^y \frac{dx}{x(x+1)} = \ln \left(\frac{y}{1+y} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \right) = \ln \left(\frac{1}{1+\frac{1}{y}} \right) + \ln(2).$$

Comme $\frac{1}{y}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$ et que la fonction $\ln$ est continue en 1, on a :

$$\int_1^y \frac{dx}{x(x+1)} \underset{y \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \ln(1) + \ln(2) = \ln(2).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \ln(2)}.$$

- (3) (a) Montrons que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

Comme $1+x \geq 2$ pour tout $x \in [1, +\infty[$, on voit que, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$0 \leq \frac{1}{x^n(x+1)} \leq \frac{1}{2x^n}.$$

Par positivité et croissance de l'intégrale, on obtient que, pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^n} dx.$$

Par définition de I_n , on trouve que, pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq I_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^n} dx. \quad (*)$$

Reste à calculer l'intégrale de droite. Pour ce faire, considérons un réel $y \geq 1$ quelconque. Par des calculs simples, on obtient que :

$$\int_1^y \frac{dx}{2x^n} = \left[-\frac{1}{2(n-1)x^{n-1}} \right]_1^y = -\frac{1}{2(n-1)y^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}.$$

Comme $\frac{1}{y^{n-1}}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$, on trouve que :

$$\int_1^y \frac{dx}{2x^n} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n-1)}.$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^n} = \frac{1}{2(n-1)}.$$

Par conséquent, on en déduit avec l'encadrement (*) que, pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

- (b) Établissons l'existence et déterminons la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

Comme $\frac{1}{2(n-1)}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème d'encadrement entraîne que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \text{ existe et est égale à } 0.$$

- (4) (a) Calculons $I_n + I_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégrale, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+1} &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}(x+1)} dx \\ &= \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{x^n(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)} \right] dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^{n+1}(x+1)} dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} dx \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^y \frac{1}{x^{n+1}} dx \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{(n+1-1)x^{n+1-1}} \right]_1^y \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{1}{ny^n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \geq 1$:

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}.$$

- (b) Montrons que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [1, +\infty[$, on voit que $0 < x^n \leq x^{n+1}$, ce qui entraîne que $0 < x^n(1+x) \leq x^{n+1}(1+x)$, et donc :

$$\frac{1}{x^{n+1}(1+x)} \leq \frac{1}{x^n(1+x)}.$$

Par croissance de l'intégrale, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}(1+x)} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(1+x)} dx.$$

Par définition de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, il s'ensuit que $I_{n+1} \leq I_n$. Mais comme ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que :

$$\text{la suite } (I_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}$$

- (c) Calculons tout d'abord un équivalent de I_n . D'après la question (3)(a), on a pour tout $n \geq 2$:

$$I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

Comme $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$ d'après la question (4)(a) et que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est décroissante d'après la question (4)(b), on trouve que, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n} = I_n + I_{n+1} \leq I_n + I_n = 2I_n.$$

En particulier, on obtient que, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2n} \leq I_n.$$

Dès lors, on trouve que, pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{1}{2n} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

Si l'on divise par $\frac{1}{2n}$, on obtient après calculs que, pour tout $n \geq 2$:

$$1 \leq \frac{I_n}{\frac{1}{2n}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}.$$

D'après le théorème d'encadrement, il s'ensuit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\frac{1}{2n}} = 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

A présent, donnons la nature de la série de terme général I_n . Comme la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge d'après le cours, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n}$ diverge aussi par linéarité. Mais comme cette dernière est à termes positifs, le critère d'équivalence des séries à termes positifs entraîne que :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} I_n \text{ diverge.}$$

- (5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2}$.

- (a) Montrons que J_n est une intégrale convergente. Pour ce faire, on peut commencer par remarquer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n(x+1)^2}$ est définie, continue et positive sur $[1, +\infty[$ comme inverse d'une fonction continue positive sur $[1, +\infty[$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$. Dès lors, l'intégrale J_n présente une impropreté en $+\infty$. De plus, comme tout polynôme non nul est équivalent à son terme de plus haut degré au voisinage de $+\infty$, on trouve que :

$$\frac{1}{x^n(x+1)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^n \times x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{n+2}}.$$

Comme $n \geq 0$, on voit que $n+2 \geq 2 > 1$, et donc l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+2}}$ converge d'après le cours. Dès lors, il s'ensuit d'après le critère d'équivalence des intégrales de fonctions positives que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ converge pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

- (b) Calculons la valeur de J_0 . Pour ce faire, considérons un réel $y \geq 1$ quelconque. Par des calculs simples, on obtient que :

$$\int_1^y \frac{dx}{x^0(x+1)^2} = \int_1^y \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{x+1} \right]_1^y = -\frac{1}{y+1} + \frac{1}{2}.$$

Comme $\frac{1}{1+y}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$, on trouve que :

$$\int_1^y \frac{dx}{x^0(x+1)^2} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$J_0 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^0(x+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

- (6) (a) Exprimons $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégrale, on obtient que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 J_k + J_{k-1} &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k(x+1)^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2} dx \\
 &= \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{x^k(x+1)^2} + \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2} \right] dx \\
 &= \int_1^{+\infty} \frac{1+x}{x^k(x+1)^2} dx \\
 &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k(x+1)} dx = I_k.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $k \geq 1$:

$$\boxed{J_k + J_{k-1} = I_k.}$$

- (b) Déterminons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k$ en fonction de J_n . D'après la question précédente, on obtient par linéarité de la somme que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} [J_k + J_{k-1}] \\
 &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} J_k + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} J_{k-1}.
 \end{aligned}$$

Si l'on effectue le changement d'indice $l = k - 1$ dans la deuxième somme de droite, alors on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} J_k + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} J_{k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} J_k + \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l J_l \\
 &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} J_k - \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l-1} J_l \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} J_k + (-1)^{n-1} J_n - \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{l-1} J_l - (-1)^{0-1} J_0 \\
 &= (-1)^{n-1} J_n - (-1)^{0-1} J_0 \\
 &= (-1)^{n-1} J_n + J_0.
 \end{aligned}$$

Mais comme $J_0 = \frac{1}{2}$ d'après la question (5)(b), on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = (-1)^{n-1} J_n + \frac{1}{2}.}$$

- (c) Montrons tout d'abord que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}.$$

Comme $1+x \geq 2$ pour tout $x \in [1, +\infty[$, on voit que, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$0 \leq \frac{1}{x^n(x+1)^2} \leq \frac{1}{2x^n(x+1)}.$$

Par positivité et croissance de l'intégrale, on obtient que, pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)^2} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^n(x+1)} dx.$$

Par définition de I_n et de J_n et par linéarité de l'intégrale, on trouve que, pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{2} I_n.$$

Mais comme $I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$ pour tout $n \geq 2$ d'après la question (3)(a), on a pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2(n-1)}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}.$$

A présent, donnons la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$. D'après le théorème d'encadrement appliqué à l'encadrement ci-dessus, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0.$$

- (d) Montrons que la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ converge et donnons sa somme. D'après la question (6)(b), on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = (-1)^{n-1} J_n + \frac{1}{2}.$$

Comme de plus la suite (J_n) tend vers 0 d'après la question précédente, il s'ensuit que :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dès lors, comme la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} I_n$ converge vers $\frac{1}{2}$, on en déduit que :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} I_n \text{ converge et de plus : } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} I_n = \frac{1}{2}.$$