

TRAVAUX DIRIGÉS : APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES
CORRIGÉ DU VENDREDI 2 OCTOBRE 2026

1. CALCUL MATRICIEL

Exercice 1.

Exercice 2.

Exercice 3.

Exercice 4.

Exercice 5.

Exercice 6.

2. APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 7.

Exercice 8.

Exercice 9.

Exercice 10.

Exercice 11.

Exercice 12.

Exercice 13.

Exercice 14.

Exercice 15.

Exercice 16.

3. APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

Exercice 17.

(1)

(2)

(3) Vérifions que f est linéaire. Pour ce faire, considérons des éléments $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$\begin{aligned} f(\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2)) &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \\ &= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + 3\lambda_1 y_1 + 3\lambda_2 y_2, 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 x_2 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \\ &= \lambda_1(x_1 + 3y_1, 2x_1 + y_1) + \lambda_2(x_2 + 3y_2, 2x_2 + y_2) \\ &= \lambda_1 f(x_1, y_1) + \lambda_2 f(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est linéaire.}}$$

A présent, calculons $\text{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$. Pour ce faire, on pose $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (e_1, e_2)$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$f(e_1) = f(1, 1) = (4, 3) = a(1, 1) + b(1, 2).$$

En particulier, les réels a, b sont solutions du système :

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a + 2b = 3 \end{cases}.$$

En effectuant l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on obtient que :

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ b = -1 \end{cases}.$$

d'où il s'ensuit que $a = 5, b = -1$, et donc :

$$f(e_1) = 5(1, 1) - 1(1, 2) = 5e_1 - e_2.$$

De même, on peut trouver que :

$$f(e_2) = f(1, 2) = (7, 4) = 10(1, 1) - 3(1, 2) = 10e_1 - 3e_2.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}}.$$

- (4) Vérifions que f est linéaire. Pour ce faire, considérons des éléments $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$\begin{aligned} f(\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2)) &= f(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2, \lambda_1y_1 + \lambda_2y_2) \\ &= (\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + 2\lambda_1y_1 + 2\lambda_2y_2, 3\lambda_1x_1 + 3\lambda_2x_2 - 3\lambda_1y_1 - 3\lambda_2y_2) \\ &= \lambda_1(x_1 + 2y_1, 3x_1 - 3y_1) + \lambda_2(x_2 + 2y_2, 3x_2 - 3y_2) \\ &= \lambda_1f(x_1, y_1) + \lambda_2f(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est linéaire.}}$$

A présent, calculons $\text{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$. Pour ce faire, on pose $\mathcal{B} = (e_1, e_2) = ((2, 1), (1, -1))$ et $\mathcal{C} = (e'_1, e'_2) = ((1, 1), (1, -1))$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$f(e_1) = f(2, 1) = (4, 3) = a(1, 1) + b(1, -1).$$

En particulier, les réels a, b sont solutions du système :

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a - b = 3 \end{cases}.$$

En effectuant l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on obtient que :

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ -2b = -1 \end{cases}.$$

d'où il s'ensuit que $a = \frac{7}{2}, b = \frac{1}{2}$, et donc :

$$f(e_1) = \frac{7}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1) = \frac{7}{2}e'_1 + \frac{1}{2}e'_2.$$

De même, on peut trouver que :

$$f(e_2) = f(1, -1) = (-1, 6) = \frac{5}{2}(1, 1) - \frac{7}{2}(1, -1) = \frac{5}{2}e'_1 - \frac{7}{2}e'_2.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}}.$$

- (6) Vérifions que f est linéaire. Pour ce faire, considérons des éléments $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$\begin{aligned}
 f(\lambda_1(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2(x_2, y_2, z_2)) &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \\
 &= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - 2\lambda_1 y_1 - 2\lambda_2 y_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, \\
 &\quad -\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \\
 &= \lambda_1(x_1 - 2y_1, y_1 + z_1, -x_1 + z_1) + \lambda_2(x_2 - 2y_2, y_2 + z_2, -x_2 + z_2) \\
 &= \lambda_1 f(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2 f(x_2, y_2, z_2).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

f est linéaire.

A présent, calculons $\text{mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)$. Pour ce faire, on pose $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) = ((1, 1, 0), (1, 0, 2), (1, 1, 1))$ et $\mathcal{C} = (e'_1, e'_2, e'_3) = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$f(e_1) = f(1, 1, 0) = (-1, 1, -1) = a(1, 1, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, 1).$$

En particulier, les réels a, b, c sont solutions du système :

$$\begin{cases} a & = & -1 \\ a + b & = & 1 \\ a + b + c & = & -1 \end{cases},$$

d'où il s'ensuit que $a = -1, b = 2, c = -2$, et donc :

$$f(e_1) = -(1, 1, 1) + 2(0, 1, 1) - 2(0, 0, 1) = -e'_1 + 2e'_2 - 2e'_3.$$

De même, on peut trouver que :

$$\begin{cases} f(e_2) &= f(1, 0, 2) &= (1, 2, 1) &= (1, 1, 1) + (0, 1, 1) - (0, 0, 1) &= e_1 + e_2 - e_3 \\ f(e_3) &= f(1, 1, 1) &= (-1, 2, 0) &= -(1, 1, 1) + 3(0, 1, 1) - 2(0, 0, 1) &= -e_1 + 3e_2 - 2e_3 \end{cases}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18.

Exercice 19.

- (1)
 (2) Montrons tout d'abord que l'application f est linéaire. Pour ce faire, considérons des éléments $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[x]$ et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve par linéarité de la dérivation que :

$$\begin{aligned}
 f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) &= nx(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) - x^2(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)'(x) \\
 &= nx(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) - x^2(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2')(x) \\
 &= \lambda_1 (nxP_1(x) - x^2 P_1'(x)) + \lambda_2 (nxP_2(x) - x^2 P_2'(x)) \\
 &= \lambda_1 f(P_1)(x) + \lambda_2 f(P_2)(x).
 \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, il s'ensuit que $f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$, et donc :

f est linéaire.

Montrons ensuite que f va bien de E dans E . Pour ce faire, considérons un polynôme quelconque $P : x \mapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve que :

$$\begin{aligned}
 f(P)(x) &= nxP(x) - x^2 P'(x) \\
 &= nx(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) - x^2(a_1 + 2a_2 x + \dots + na_n x^{n-1}) \\
 &= na_0 x + na_1 x^2 + \dots + na_{n-1} x^n + na_n x^{n+1} - a_1 x^2 - 2a_2 x^3 - \dots - (n-1)a_{n-1} x^n - na_n x^{n+1} \\
 &= na_0 x + (n-1)a_1 x^2 + \dots + a_{n-1} x^n.
 \end{aligned}$$

En particulier, on voit que $f(P)$ est de degré $\leq n$ pour tout $P \in E$, et donc :

$$\boxed{f : E \longrightarrow E.}$$

Enfin, on va calculer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$. Pour des raisons de simplicité, on note $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (e_0, \dots, e_n)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on trouve que :

$$\begin{aligned} f(e_k)(x) &= nxe_k(x) - x^2 e'_k(x) \\ &= nx(x-1)^k - x^2 k(x-1)^{k-1} \\ &= n((x-1)+1)(x-1)^k - ((x-1)+1)^2 k(x-1)^{k-1} \\ &= n(x-1)^k + n(x-1)^{k+1} - ((x-1)^2 + 2(x-1) + 1)k(x-1)^{k-1} \\ &= -k(x-1)^{k-1} + (n-2k)(x-1)^k + (n-k)(x-1)^{k+1} \\ &= -ke_{k-1}(x) + (n-2k)e_k(x) + (n-k)e_{k+1}(x). \end{aligned}$$

En particulier, cela nous donne que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(e_0) & = & ne_0 + ne_1 \\ f(e_1) & = & -e_0 + (n-2)e_1 + (n-1)e_2 \\ f(e_2) & = & -2e_1 + (n-4)e_2 + (n-2)e_3 \\ & \vdots & \\ f(e_n) & = & -ne_{n-1} - ne_n \end{array} \right. .$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} n & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & n-2 & -2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -n \end{pmatrix} .}$$

- (3) Montrons tout d'abord que l'application f est linéaire. Pour ce faire, considérons des éléments $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[x]$ et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve par linéarité de la dérivation que :

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) &= (x^2 + 1)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)''(x) - (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)'(x) \\ &= (x^2 + 1)(\lambda_1 P_1'' + \lambda_2 P_2'')(x) - (\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2')(x) \\ &= \lambda_1 ((x^2 + 1)P_1''(x) - P_1'(x)) + \lambda_2 ((x^2 + 1)P_2''(x) - P_2'(x)) \\ &= \lambda_1 f(P_1)(x) + \lambda_2 f(P_2)(x). \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, il s'ensuit que $f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$, et donc :

$$\boxed{f \text{ est linéaire.}}$$

Montrons ensuite que f va bien de E dans E . Pour ce faire, considérons un polynôme quelconque $P : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve que :

$$\begin{aligned} f(P)(x) &= (x^2 + 1)P''(x) - P'(x) \\ &= (x^2 + 1)(2a_2 + 6a_3x) - (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) \\ &= 2a_2 + 6a_3x + 2a_2x^2 + 6a_3x^3 - a_1 - 2a_2x - 3a_3x^2 \\ &= (2a_2 - a_1) + (6a_3 - 2a_2)x + (2a_2 - 3a_3)x^2 + 6a_3x^3. \end{aligned}$$

En particulier, on voit que $f(P)$ est de degré ≤ 3 pour tout $P \in E$, et donc :

$$\boxed{f : E \longrightarrow E.}$$

A noter qu'ici, on pouvait aussi directement travailler avec les propriétés du degré des polynômes, ça marche très bien aussi!

Enfin, on va calculer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$. Pour des raisons de simplicité, on note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve que :

$$\left\{ \begin{array}{lll} f(e_0)(x) & = & 0 \\ f(e_1)(x) & = & (x^2 + 1)0 - 1 \\ f(e_2)(x) & = & (x^2 + 1)2 - 2(x - 1) \\ f(e_3)(x) & = & (x^2 + 1)6x - 3(x - 1)^2 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{lll} 0 \\ -1 \\ 4 - 2x + 2x^2 \\ -9 + 12x - 9x^2 + 6x^3 \end{array} \right.$$

En particulier, ceci entraîne que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(e_0) & = 0\varepsilon_0 + 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3 \\ f(e_1) & = -\varepsilon_0 + 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3 \\ f(e_2) & = 4\varepsilon_0 - 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3 \\ f(e_3) & = -9\varepsilon_0 + 12\varepsilon_1 - 9\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3 \end{array} \right.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 20. Comme f est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

on voit que $f(x, y, z) = (x - y + z, -3x - 3y + 3z, -2x - 2y + 2z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminons alors une base de $\ker(f)$. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on trouve que :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \ker(f) & \iff f(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ & \iff (x - y + z, -3x - 3y + 3z, -2x - 2y + 2z) = (0, 0, 0) \\ & \iff x - y + z = 0, \quad -3x - 3y + 3z = 0, \quad -2x - 2y + 2z = 0 \\ & \iff x - y + z = 0 \quad (\text{car les trois équations ci-dessus sont proportionnelles}) \\ & \iff x = y - z \\ & \iff (x, y, z) = (y - z, y, z) \\ & \iff (x, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \\ & \iff (x, y, z) \in \text{Vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1)). \end{aligned}$$

En particulier, on voit que $\ker(f) = \text{Vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$, et donc $((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une famille génératrice de $\ker(f)$. Mais comme elle est formée de deux vecteurs non colinéaires, cette famille est libre, et donc :

$$\boxed{((1, 1, 0), (-1, 0, 1)) \text{ est une base de } \ker(f).}$$

A présent, déterminons une base de $\mathfrak{Im}(f)$. Pour ce faire, on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Par définition, on trouve que :

$$\begin{aligned}\mathfrak{Im}(f) &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ &= \text{Vect}(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) \\ &= \text{Vect}((1, -3, -2), (1, -3, -2), (-1, 3, 2)) \\ &= \text{Vect}((1, -3, -2)) \quad (\text{car les trois vecteurs ci-dessus sont colinéaires})\end{aligned}$$

En particulier, on voit que $((1, -3, -2))$ est une famille génératrice de $\mathfrak{Im}(f)$. Mais comme elle est formée d'un seul vecteur non nul, cette famille est libre, et donc :

$$\boxed{((1, -3, -2)) \text{ est une base de } \mathfrak{Im}(f).}$$

Dès lors, on obtient par définition du rang que :

$$\boxed{\text{rg}(f) = 1.}$$

Enfin, calculons $f \circ f$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$A = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais comme A^2 est la matrice de f^2 dans la base canonique, on en déduit que :

$$\boxed{f^2 = 0.}$$

En particulier, l'endomorphisme f est nilpotent.

Exercice 21. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application l définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$ par :

$$l(P) : x \mapsto xP(x) + (x - x^2)P'(x) + (ax^3 - x^2 + x - 1)P''(x).$$

- (1) Montrons tout d'abord que l'application l est linéaire. Pour ce faire, considérons des éléments $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve par linéarité de la dérivation que :

$$\begin{aligned}l(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) &= x(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) + (x - x^2)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)'(x) \\ &\quad + (ax^3 - x^2 + x - 1)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)''(x) \\ &= x(\lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x)) + (x - x^2)(\lambda_1 P_1'(x) + \lambda_2 P_2'(x)) \\ &\quad + (ax^3 - x^2 + x - 1)(\lambda_1 P_1''(x) + \lambda_2 P_2''(x)) \\ &= \lambda_1 (xP_1(x) + (x - x^2)P_1'(x) + (ax^3 - x^2 + x - 1)P_1''(x)) \\ &\quad + \lambda_2 (xP_2(x) + (x - x^2)P_2'(x) + (ax^3 - x^2 + x - 1)P_2''(x)) \\ &= \lambda_1 l(P_1)(x) + \lambda_2 l(P_2)(x).\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, il s'ensuit que $l(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 l(P_1) + \lambda_2 l(P_2)$, et donc :

$$\boxed{l \text{ est linéaire.}}$$

A présent, déterminons un réel a pour lequel l est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$. Pour ce faire, considérons un polynôme quelconque $P : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2$. Par des calculs simples, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}l(P)(x) &= xP(x) + (x - x^2)P'(x) + (ax^3 - x^2 + x - 1)P''(x) \\ &= x(a_0 + a_1x + a_2x^2) + (x - x^2)(a_1 + 2a_2x) + (ax^3 - x^2 + x - 1)(2a_2) \\ &= a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_1x + 2a_2x^2 - a_1x^2 - 2a_2x^3 + 2a_2ax^3 - 2a_2x^2 + 2a_2x - 2a_2 \\ &= -2a_2 + (a_0 + a_1 + 2a_2)x + (-a_2 + 2a_2a)x^3.\end{aligned}$$

En particulier, on voit que $l(P)$ est un polynôme de degré ≤ 2 si et seulement si $-a_2 + 2a_2a = 0$. Comme ceci doit être vrai pour tous réels a_0, a_1, a_2 , il s'ensuit que $2a = 1$, et donc :

$$\boxed{a = \frac{1}{2}.}$$

- (2) Dans cette question, on suppose que a est la valeur trouvée en (1).

- (a) Montrons que $\mathcal{B} = (x \mapsto x, x \mapsto x - 1, x \mapsto \frac{1}{2}x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Comme $\text{card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$, il suffit de montrer que cette famille est libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$a(x \mapsto x) + b(x \mapsto x - 1) + c\left(x \mapsto \frac{1}{2}x^2\right) = 0.$$

Alors, cela signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$ax + b(x - 1) + \frac{c}{2}x^2 = 0.$$

En particulier, on obtient que $-b = 0$, $a + b = 0$ et $c/2 = 0$, ce qui entraîne que $a = b = c = 0$, et donc $\mathcal{B}$ est libre. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[x].}$$

A présent, calculons $\text{mat}_{\mathcal{B}}(l)$. Pour ce faire, on pose $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$. Par définition, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} l(e_0)(x) &= x.1 + (x - x^2).0 + \left(\frac{1}{2}x^3 - x^2 + x - 1\right).0 &= x \\ l(e_1)(x) &= x(x - 1) + (x - x^2).1 + \left(\frac{1}{2}x^3 - x^2 + x - 1\right).0 &= 0 \\ l(e_2)(x) &= x.\frac{1}{2}x^2 + (x - x^2).x + \left(\frac{1}{2}x^3 - x^2 + x - 1\right).1 &= x - 1 \end{cases}.$$

En particulier, ceci entraîne que :

$$\begin{cases} f(e_0) &= 0e_0 + 1e_1 + 0e_2 \\ f(e_1) &= 0e_0 + 0e_1 + 0e_2 \\ f(e_2) &= 0e_0 + 1e_1 + 0e_2 \end{cases}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{mat}_{\mathcal{B}}(l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Décrivons tout d'abord le noyau de l . D'après les calculs de la question (1), on sait que, pour tout polynôme $P : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$l(P)(x) = -2a_2 + (a_0 + a_1 + 2a_2)x + (-a_2 + 2a_2a)x^3.$$

En prenant $a = 1/2$, on trouve que, pour tout $P : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$l(P)(x) = -2a_2 + (a_0 + a_1 + 2a_2)x.$$

En particulier, on voit que $l(P) = 0$ si et seulement si $a_2 = 0$ et $a_0 + a_1 + 2a_2 = 0$, ce qui signifie que $a_2 = 0$ et $a_0 = -a_1$, et donc $P : x \mapsto -a_1 + a_1x = a_1e_1$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\ker(l) = \text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(x \mapsto x - 1).}$$

A présent, décrivons l'image de l . Comme $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$, on trouve d'après les calculs de la question précédente que :

$$\mathfrak{Im}(l) = \text{Vect}(l(e_0), l(e_1), l(e_2)) = \text{Vect}(e_0, 0, e_1) = \text{Vect}(e_0, e_1).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\mathfrak{Im}(l) = \text{Vect}(e_0, e_1) = \text{Vect}(x \mapsto x, x \mapsto x - 1).}$$

Enfin, comparons les applications l^2 et l^3 . Si l'on note $L = \text{mat}_{\mathcal{B}}(l)$, alors on trouve par des calculs simples que :

$$L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De même, on obtient que :

$$L^3 = L \times L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on voit que $L^2 = L^3$. Mais comme L est la matrice de l'endomorphisme l dans la base $\mathcal{B}$, on en déduit que :

$$\boxed{l^2 = l^3.}$$

Exercice 22. Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts, et soit f l'application de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ par $f(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on pose :

$$L_i : x \longmapsto \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right).$$

- (1) Montrons que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Tout d'abord, on va commencer par vérifier que f est linéaire. Pour ce faire, considérons des éléments $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[x]$ et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve que :

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= ((\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x_0), \dots, (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x_n)) \\ &= (\lambda_1 P_1(x_0) + \lambda_2 P_2(x_0), \dots, \lambda_1 P_1(x_n) + \lambda_2 P_2(x_n)) \\ &= \lambda_1 (P_1(x_0), \dots, P_1(x_n)) + \lambda_2 (P_2(x_0), \dots, P_2(x_n)) \\ &= \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est linéaire.}}$$

A présent, montrons que f est injective. Pour ce faire, considérons un élément P de $\mathbb{R}_n[x]$. Alors :

$$\begin{aligned} P \in \ker(f) &\iff f(P) = (0, \dots, 0) \\ &\iff (P(x_0), \dots, P(x_n)) = (0, \dots, 0) \\ &\iff P(x_0) = 0, \dots, P(x_n) = 0 \\ &\iff x_0, \dots, x_n \text{ sont racines de } P \\ &\iff P = 0_{\mathbb{R}_n[x]} \quad (\text{car } \deg(P) \leq n \text{ et } P \text{ a au moins } n+1 \text{ racines distinctes}). \end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit que $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}_n[x]}\}$, et donc :

$$\boxed{f \text{ est injective.}}$$

Mais comme $\dim \mathbb{R}_n[x] = \dim \mathbb{R}^{n+1} = n+1$, on voit que f est un endomorphisme injectif entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, et donc :

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.}}$$

- (2) Déterminons la matrice de f dans les bases canoniques $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathcal{B}' = (e'_0, \dots, e'_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$f(e_k) = ((x \mapsto x^k)(x_0), \dots, (x \mapsto x^k)(x_n)) = (x_0^k, \dots, x_n^k) = x_0^k e'_0 + \dots + x_n^k e'_n.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.}$$

- (3) Calculons l'expression de $f(L_i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Pour ce faire, on va commencer par montrer que, pour tout $(i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $L_i(x_k)$ est égal à 1 si $i = k$ et à 0 sinon. Pour ce faire, on procède à une distinction de cas. Tout d'abord, si $i = k$, alors on trouve que :

$$L_i(x_k) = \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} \left(\frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} \right) = \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} 1 = 1.$$

A présent, supposons que $i \neq k$. Comme $i \neq k$, l'un des facteurs $x_k - x_j$ est nul lorsque j parcourt $\llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}$, et donc :

$$L_i(x_k) = \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} \left(\frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} \right) = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $(i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$L_i(x_k) = 1 \text{ si } i = k \text{ et } L_i(x_k) = 0 \text{ si } i \neq k.$$

Dès lors, on trouve que, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$f(L_i) = (L_i(x_0), \dots, L_i(x_i), \dots, L_i(x_n)) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

où le 1 se trouve en $(i+1)$ -ème position. Par conséquent, on en déduit que, tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$f(L_i) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0).$$

- (4) Montrons que $\mathcal{C} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$. Tout d'abord, on peut remarquer que chaque polynôme L_i est un produit de n polynômes de degré 1, et donc L_i est de degré n pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En particulier, $\mathcal{C}$ est bien une famille de $\mathbb{R}_n[x]$. Dès lors, comme $\text{card}(\mathcal{C}) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$, il suffit de montrer que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est libre. Pour ce faire, considérons des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\lambda_0 L_0 + \dots + \lambda_n L_n = 0_{\mathbb{R}_n[x]}.$$

Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on obtient en évaluant cette égalité en $x = x_i$ que :

$$\lambda_0 L_0(x_i) + \dots + \lambda_i L_i(x_i) + \dots + \lambda_n L_n(x_i) = 0.$$

D'après les calculs de la question précédente, ceci entraîne que, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\lambda_0 \times 0 + \dots + \lambda_i \times 1 + \dots + \lambda_n \times 0 = 0.$$

d'où il s'ensuit que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et donc $\mathcal{C} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ est libre. Par conséquent, on en déduit que :

$$\mathcal{C} = (L_0, L_1, \dots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[x].$$

- (5) Calculons la matrice de f de la base $\mathcal{C}$ vers la base canonique $\mathcal{B}' = (e'_0, \dots, e'_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. D'après la question (3), on a pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$f(L_i) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = 0e'_0 + \dots + 1e'_i + \dots + 0e'_n.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}.$$

Exercice 23.

Exercice 24. Dans cet exercice, on considère les sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$. Déterminons tout d'abord une base de F . Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on trouve que :

$$(x, y, z) \in F \iff x - y + z = 0, \quad x + y = 0$$

$$\iff x - y + z = 0, \quad y = -x$$

$$\iff x - (-x) + z = 0, \quad y = -x \quad (\text{par substitution})$$

$$\iff z = -2x, \quad y = -x$$

$$\iff (x, y, z) = (x, -x, -2x)$$

$$\iff (x, y, z) = x(1, -1, -2)$$

$$\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((1, -1, -2)).$$

En particulier, on voit que $F = \text{Vect}((1, -1, -2))$, et donc $((1, -1, -2))$ est une famille génératrice de F . Mais comme elle est formée d'un seul vecteur non nul, cette famille est libre, et donc :

$$((1, -1, -2)) \text{ est une base de } F.$$

Déterminons à présent une base de G . Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on trouve que :

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in G &\iff x - y + z = 0 \\
 &\iff x = y - z \\
 &\iff (x, y, z) = (y - z, y, z) \\
 &\iff (x, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \\
 &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1)).
 \end{aligned}$$

En particulier, on voit que $G = \text{Vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$, et donc $((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une famille génératrice de G . Mais comme elle est formée de deux vecteurs non colinéaires, cette famille est libre, et donc :

$$\boxed{((1, 1, 0), (-1, 0, 1)) \text{ est une base de } G.}$$

Avec les résultats précédents, on en déduit que :

$$\boxed{\dim(F) = 1 \text{ et } \dim(G) = 2.}$$

Maintenant, vérifions que $F \subset G$. Pour tout $(x, y, z) \in F$, on voit que $x - y + z = 0$ et $x + y = 0$, ce qui entraîne que $x - y + z = 0$, et donc $(x, y, z) \in G$. Dès lors, il s'ensuit que :

$$\boxed{F \subset G.}$$

Mais comme $F \subset G$, on en déduit que :

$$\boxed{F \cap G = F \text{ et } F \cup G = G.}$$

Enfin, calculons le noyau et l'image de l'endomorphisme f canoniquement associé à :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Par définition, on voit que $f(x, y, z) = (x + y + z, x - z, -y - 2z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminons alors une base de $\ker(f)$. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on trouve que :

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in \ker(f) &\iff f(x, y, z) = (0, 0, 0) \\
 &\iff (x + y + z, x - z, -y - 2z) = (0, 0, 0) \\
 &\iff x + y + z = 0, \quad x - z = 0, \quad -y - 2z = 0 \\
 &\iff x + y + z = 0, \quad x = z, \quad y = -2z \\
 &\iff z - 2z + z = 0, \quad x = z, \quad y = -2z \quad (\text{par substitution}) \\
 &\iff 0 = 0, \quad x = z, \quad y = -2z \\
 &\iff x = z, \quad y = -2z \\
 &\iff (x, y, z) = (z, -2z, z) \\
 &\iff (x, y, z) = z(1, -2, 1) \\
 &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((1, -2, 1)).
 \end{aligned}$$

En particulier, on voit que $\ker(f) = \text{Vect}((1, -2, 1))$, et donc $((1, -2, 1))$ est une famille génératrice de $\ker(f)$. Mais comme elle est formée d'un seul vecteur non nul, cette famille est libre, et donc :

$$\boxed{((1, -2, 1)) \text{ est une base de } \ker(f).}$$

A présent, déterminons une base de $\mathfrak{Im}(f)$. Pour ce faire, on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Par définition, on trouve que :

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{Im}(f) &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\
 &= \text{Vect}(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) \\
 &= \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, -1), (1, -1, -2)).
 \end{aligned}$$

Au passage, on peut remarquer que :

$$(1, 1, 0) - 2(1, 0, -1) + (1, -1, -2) = (0, 0, 0).$$

En particulier, on voit que le troisième vecteur est combinaison linéaire des deux premiers, et donc :

$$\mathfrak{Im}(f) = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, -1)).$$

Dès lors, la famille $((1, 1, 0), (1, 0, -1))$ est génératrice de $\mathfrak{Im}(f)$. Mais comme cette famille est formée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre, et donc :

$((1, 1, 0), (1, 0, -1))$ est une base de $\mathfrak{Im}(f)$.
--