

TRAVAUX DIRIGÉS : APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES
CORRIGÉ DU LUNDI 5 OCTOBRE 2026 - EXERCICES 28 À 32

Exercice 28 Soit f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, définie pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(A) = A - {}^tA$.

- (1) Montrons que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Par construction, on voit que $f(A) = A - {}^tA$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comme combinaison linéaire de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et donc f va bien de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Reste à montrer que f est linéaire. Pour ce faire, considérons deux matrices A_1, A_2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la transposition, on trouve que :

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) &= \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - {}^t(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \\ &= \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - (\lambda_1 {}^tA_1 + \lambda_2 {}^tA_2) \\ &= \lambda_1 (A_1 - {}^tA_1) + \lambda_2 (A_2 - {}^tA_2) \\ &= \lambda_1 f(A_1) + \lambda_2 f(A_2), \end{aligned}$$

et donc f est linéaire. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

- (2) Déterminons tout d'abord une base de $\ker(f)$. Pour ce faire, considérons une matrice A de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors, on voit que :

$$\begin{aligned} A \in \ker(f) &\iff f(A) = 0 \\ &\iff A - {}^tA = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff b = c \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff A \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Si l'on pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on vient de montrer que :

$$\ker(f) = \text{Vect}(E_1, E_2, E_3).$$

En particulier, la famille (E_1, E_2, E_3) est génératrice de $\ker(f)$. De plus, supposons qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 = 0$. Alors cela signifie que :

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où il s'ensuit que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, et donc la famille (E_1, E_2, E_3) est libre. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{(E_1, E_2, E_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \ker(f).}$$

A présent, déterminons une base de $\mathfrak{Im}(f)$. Pour ce faire, considérons la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, que l'on écrit sous la forme :

$$\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Alors, on trouve que :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Im}(f) &= \text{Vect}(f(E_{1,1}), f(E_{1,2}), f(E_{2,1}), f(E_{2,2})) \\ &= \text{Vect}\left(f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad (\text{car les deux matrices ci-dessus sont colinéaires}). \end{aligned}$$

Si l'on pose $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, alors on voit que :

$$\mathfrak{Im}(f) = \text{Vect}(E_4).$$

En particulier, la famille (E_4) est génératrice de $\mathfrak{Im}(f)$. De plus, comme elle est formée d'une seule matrice non nulle, elle est libre, et donc :

$$(E_4) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \mathfrak{Im}(f).$$

Enfin, comme (E_1, E_2, E_3) est une base de $\ker(f)$, on voit que $\dim \ker(f) = 3 \neq 0$, ce qui entraîne que $\ker(f) \neq \{0\}$, et donc f n'est pas injectif. Par conséquent, on en déduit que :

$$f \text{ n'est pas un isomorphisme.}$$

- (3) Calculons tout d'abord la matrice M de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. D'après les calculs de la question précédente, on trouve que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(E_{1,1}) &= f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E_{1,1} + 0E_{1,2} + 0E_{2,1} + 0E_{2,2} \\ f(E_{1,2}) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0E_{1,1} + 1E_{1,2} - 1E_{2,1} + 0E_{2,2} \\ f(E_{2,1}) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0E_{1,1} - 1E_{1,2} + 1E_{2,1} + 0E_{2,2} \\ f(E_{2,2}) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E_{1,1} + 0E_{1,2} + 0E_{2,1} + 0E_{2,2} \end{array} \right.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A présent, déterminons la trace de f . Comme la trace de f est par définition la trace de la matrice de f dans toute base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il s'ensuit que $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(M) = 1 + 1 = 2$, et donc :

$$\text{Tr}(f) = 2.$$

- (4) Justifions que la concaténation d'une base de $\ker(f)$ et d'une base de $\mathfrak{Im}(f)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. D'après le cours, ceci revient à montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \ker(f) \oplus \mathfrak{Im}(f)$. D'après le théorème du rang, on sait que :

$$\dim \ker(f) + \dim \mathfrak{Im}(f) = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Reste donc à prouver que $\ker(f) \cap \mathfrak{Im}(f) = \{0\}$. Pour ce faire, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de composantes a, b, c, d comme précédemment. Comme (E_4) est une base de $\mathfrak{Im}(f)$, on trouve que :

$$\begin{aligned}
 A \in \ker(f) \cap \mathfrak{Im}(f) &\iff A \in \ker(f) \quad \text{et} \quad A \in \mathfrak{Im}(f) \\
 &\iff f(A) = 0 \quad \text{et} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}, A = \alpha E_4 \\
 &\iff A - {}^t A = 0 \quad \text{et} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}, A = \alpha E_4 \\
 &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff b = c \quad \text{et} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}, a = d = 0, b = -c = \alpha \\
 &\iff a = b = c = d = 0 \\
 &\iff A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit que $\ker(f) \cap \mathfrak{Im}(f) = \{0\}$. Par conséquent, on en déduit que :

la concaténation d'une base de $\ker(f)$ et d'une base de $\mathfrak{Im}(f)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- (5) Montrons que M est semblable à une matrice diagonale que l'on donnera. Pour ce faire, on désigne par $\mathcal{C} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ la concaténation des bases de $\ker(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ trouvées à la question (2). D'après la question précédente, on sait que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, comme E_1, E_2, E_3 sont des éléments de $\ker(f)$, on trouve que :

$$f(E_1) = f(E_2) = f(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 0E_4.$$

En outre, on obtient par des calculs simples que :

$$f(E_4) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 2E_4.$$

Dès lors, il s'ensuit que la matrice D de f dans la base $\mathcal{C}$ est donnée par :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mais comme M et D sont les matrices du même endomorphisme f dans deux bases, on en déduit que M et D sont semblables, et donc :

$$M \text{ est semblable à la matrice diagonale } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 29 Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie n . Montrons que $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$. Comme p est un projecteur de E , on sait d'après le cours que $E = \ker(p) \oplus \mathfrak{Im}(p)$. On distingue alors trois cas.

(1) Si $\ker(p) = \{0\}$, alors on voit que $E = \mathfrak{Im}(p)$. Comme $p(x) = x$ pour tout $x \in \mathfrak{Im}(p)$, ceci nous donne que $p(x) = x$ pour tout $x \in E$. En particulier, il s'ensuit que $p = \text{Id}_E$, et donc $\text{Tr}(p) = n = \text{rg}(p)$.

(2) Si $\ker(p) = E$, alors on voit que $E = \ker(p)$, ce qui nous donne que $p(x) = 0$ pour tout $x \in E$, et donc p est l'endomorphisme nul. En particulier, il s'ensuit que $\text{Tr}(p) = 0 = \text{rg}(p)$.

(3) Si $\ker(p) \neq \{0\}$, E , fixons des bases $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_r)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\mathfrak{Im}(p)$ et $\ker(p)$ respectivement. Comme $E = \ker(p) \oplus \mathfrak{Im}(p)$, la concaténation $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ de ces bases donne une base de E . De plus, comme e_i appartient à $\mathfrak{Im}(p)$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et que p est un projecteur, on voit que $p(e_i) = e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

En outre, on peut remarquer que, pour tout $i \in \llbracket r+1, n \rrbracket$, on a $p(e_i) = 0$ car e_i appartient à $\ker(p)$. En particulier, ceci nous donne que :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme la trace d'un endomorphisme est égale à celle de sa matrice dans toute base de E , ceci nous donne que :

$$\text{Tr}(p) = \text{Tr}(\text{mat}_{\mathcal{C}}(p)) = 1 + \dots + 1 + 0 + \dots + 0 = r.$$

Comme $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_r)$ est une base de $\mathfrak{Im}(p)$, ceci entraîne que :

$$\text{rg}(p) = \dim \mathfrak{Im}(p) = r.$$

Dès lors, il s'ensuit que $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$.

Par conséquent, on en déduit dans tous les cas que, pour tout projecteur p de E :

$$\boxed{\text{Tr}(p) = \text{rg}(p).}$$

Exercice 30 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par H_n l'ensemble des matrices carrées de taille n et de trace nulle. Montrons tout d'abord que H_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour ce faire, on note Tr l'application trace, c'est-à-dire l'application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui, à toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe la trace de M . Comme H_n est l'ensemble des matrices carrées de taille n et de trace nulle, ceci nous donne que $H_n = \ker(\text{Tr})$. Mais comme le noyau d'une application linéaire est toujours un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de départ, il s'ensuit que :

$$\boxed{H_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

A présent, calculons la dimension de H_n . Comme Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on voit que $\mathfrak{Im}(\text{Tr}) \subset \mathbb{R}$. De plus, pour tout réel λ , on constate par linéarité de la trace que :

$$\text{Tr}\left(\frac{\lambda}{n}I_n\right) = \frac{\lambda}{n}\text{Tr}(I_n) = \frac{\lambda}{n} \times n = \lambda.$$

En particulier, on obtient que λ appartient à $\mathfrak{Im}(\text{Tr})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et donc $\mathbb{R} \subset \mathfrak{Im}(\text{Tr})$. Par double inclusion, ceci nous donne que :

$$\mathfrak{Im}(\text{Tr}) = \mathbb{R}.$$

D'après le théorème du rang, ceci entraîne que :

$$\dim H_n = \dim \ker(\text{Tr}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathfrak{Im}(\text{Tr}) = n^2 - 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\dim H_n = n^2 - 1.}$$

Exercice 31 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de rang ≤ 1 .

- (1) Montrons qu'il existe une matrice colonne C et une matrice ligne L telles que $A = CL$. Pour ce faire, on distingue deux cas.

(1) Si A est de rang 0, alors A est la matrice nulle et il suffit de prendre pour C et L les matrices colonne et ligne nulles.

(2) Supposons que $\text{rg}(A) = 1$. Alors toutes les colonnes $C_1, \dots, C_n$ de A sont proportionnelles entre elles, et l'une d'entre elles est non nulle. Fixons un indice $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $C_{j_0} \neq 0$. Comme toutes les colonnes de A sont proportionnelles entre elles, il existe pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ un réel λ_j tel que $C_j = \lambda_j C_{j_0}$. En particulier, la matrice A peut s'écrire avec ses colonnes sous la forme suivante :

$$A = (C_1 | C_2 | \dots | C_n) = (\lambda_1 C_{j_0} | \dots | \lambda_n C_{j_0})$$

Posons alors $C = C_{j_0}$ et $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$CL = C_{j_0}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_1 C_{j_0} | \dots | \lambda_n C_{j_0}) = (C_1 | C_2 | \dots | C_n) = A.$$

Dès lors, il s'ensuit qu'il existe une matrice colonne C et une matrice ligne L telles que $A = CL$.

Par conséquent, on en déduit dans tous les cas que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de rang ≤ 1 :

il existe une matrice colonne C et une matrice ligne L telles que $A = CL$.

- (2) Montrons que : $A^2 = \text{Tr}(A)A$. Comme A est de rang ≤ 1 , on sait d'après la question précédente qu'il existe une matrice colonne C et une matrice ligne L telles que $A = CL$. Dès lors, on voit par associativité du produit matriciel que :

$$A^2 = A \times A = CLCL = C(LC)L.$$

Comme le produit LC est le produit d'une matrice ligne et d'une matrice colonne dans cet ordre, on obtient que LC est une matrice carrée de taille 1, et donc c'est un nombre réel. En particulier, ceci nous donne que :

$$A^2 = C(LC)L = (LC)CL = (LC)A. \quad (*)$$

Si maintenant on écrit que $L = (l_1, \dots, l_n)$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, alors on trouve que :

$$LC = (l_1, \dots, l_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = l_1 c_1 + \dots + l_n c_n = \sum_{k=1}^n l_k c_k.$$

Par ailleurs, on obtient par des calculs simples que :

$$A = CL = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} (l_1, \dots, l_n) = \begin{pmatrix} l_1 c_1 & \dots & l_n c_1 \\ \vdots & & \vdots \\ l_1 c_n & \dots & l_n c_n \end{pmatrix}.$$

En particulier, on obtient avec ce qui précède que :

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} l_1 c_1 & \dots & l_n c_1 \\ \vdots & & \vdots \\ l_1 c_n & \dots & l_n c_n \end{pmatrix} \right) = l_1 c_1 + \dots + l_n c_n = \sum_{k=1}^n l_k c_k = LC. \quad (**)$$

Par conséquent, on en déduit avec les égalités (*) et (**) que :

$$A^2 = \text{Tr}(A)A.$$

Exercice 32 Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose : $f_a(P) : x \mapsto (a-x)P'(x) + nP(x)$.

- (1) Montrons que f_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. Tout d'abord, on va vérifier que f_a va de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$. Pour ce faire, considérons un élément P de $\mathbb{R}_n[x]$. Comme $\deg(P) \leq n$, on obtient que :

$$\deg(x \mapsto (a-x)P'(x)) \leq 1 + \deg(P') \leq 1 + n - 1 = n.$$

En particulier, on trouve que :

$$\deg(f_a(P)) \leq \max\{\deg(x \mapsto (a-x)P'(x)), \deg(nP)\} \leq \max\{n, n\} = n,$$

et donc $f_a(P)$ appartient à $\mathbb{R}_n[x]$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, ce qui montre que :

$$f_a : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x].$$

A présent, montrons que f_a est linéaire. Pour ce faire, considérons des éléments $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[x]$ et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve par linéarité de la dérivation que :

$$\begin{aligned} f_a(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) &= (a-x)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)'(x) + n(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) \\ &= (a-x)(\lambda_1 P_1'(x) + \lambda_2 P_2'(x)) + n(\lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x)) \\ &= \lambda_1 ((a-x)P_1'(x) + nP_1(x)) + \lambda_2 ((a-x)P_2'(x) + nP_2(x)) \\ &= \lambda_1 f_a(P_1)(x) + \lambda_2 f_a(P_2)(x). \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, il s'ensuit que $f_a(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 f_a(P_1) + \lambda_2 f_a(P_2)$, et donc :

$$f_a \text{ est linéaire.}$$

- (2) Calculons tout d'abord la matrice M_a de f_a dans la base $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_n) = (x \mapsto 1, \dots, x \mapsto x^n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on trouve que :

$$\begin{aligned} f_a(e_k)(x) &= (a-x)e'_k(x) + ne_k(x) \\ &= (a-x)kx^{k-1} + nx^k \\ &= ake_{k-1}(x) + (n-k)e_k(x). \end{aligned}$$

De plus, on constate que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_a(e_0)(x) = (a-x)e'_0(x) + ne_0(x) = 0 + n = ne_0(x).$$

En particulier, cela nous donne que :

$$\begin{cases} f_a(e_0) &= ne_0 \\ f_a(e_1) &= ae_0 + (n-1)e_1 \\ f_a(e_2) &= 2ae_1 + (n-2)e_2 \\ &\vdots \\ f_a(e_n) &= nae_{n-1} + 0e_n \end{cases}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$M_a = \begin{pmatrix} n & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 2a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & na \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A présent, donnons la trace de f_a . Comme la trace de l'endomorphisme f_a est égale à celle de sa matrice dans toute base de $\mathbb{R}_n[x]$, ceci nous donne que :

$$\text{Tr}(f_a) = \text{Tr}(M_a) = n + n-1 + \dots + 0 = \sum_{k=0}^n k.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{Tr}(f_a) = \frac{n(n+1)}{2}}.$$

- (3) Calculons $f_a(x \mapsto (x-a)^k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} f_a(x \mapsto (x-a)^k)(x) &= (a-x)(x \mapsto (x-a)^k)'(x) + n(x \mapsto (x-a)^k)(x) \\ &= (a-x)k(x-a)^{k-1} + n(x-a)^k \\ &= (n-k)(x \mapsto (x-a)^k)(x). \end{aligned}$$

De plus, on constate que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_a(x \mapsto 1)(x) = (a-x)(x \mapsto 1)'(x) + n(x \mapsto 1)(x) = 0 + n = n(x \mapsto 1)(x).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\boxed{f_a(x \mapsto (x-a)^k) = (n-k)(x \mapsto (x-a)^k)}.$$

- (4) Montrons que M_a est semblable à une matrice diagonale D_a que l'on donnera. Pour ce faire, considérons la famille $\mathcal{B}_a = (x \mapsto 1, x \mapsto x-a, \dots, x \mapsto (x-a)^n)$. Par définition, il s'agit d'une famille de $\mathbb{R}_n[x]$ qui compte $n+1$ éléments. Comme de plus elle est échelonnée en degrés, elle est libre, et donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ car $\text{card}(\mathcal{B}_a) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$. De plus, on voit d'après la question précédente que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$f_a(x \mapsto (x-a)^k) = (n-k)(x \mapsto (x-a)^k).$$

En particulier, la matrice D_a de f_a dans la base $\mathcal{B}_a$ est donnée par :

$$D_a = \text{mat}_{\mathcal{B}_a}(f_a) = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais comme M_a et D_a sont les matrices du même endomorphisme f_a dans deux bases distinctes, il s'ensuit qu'elles sont semblables. Par conséquent, on en déduit que :

$$M_a \text{ est semblable à la matrice diagonale } D_a = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$