

TRAVAUX DIRIGÉS : ESPACES PROBABILISÉS
CORRIGÉ DU MARDI 6 OCTOBRE 2026 - EXERCICES 1 À 6

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n boules numérotées de 1 à n . On place au hasard les n boules dans n boîtes, chaque boîte pouvant contenir de 0 à n boules. Déterminer la probabilité que chaque boîte contienne exactement une boule. Pour ce faire, on suppose que l'on place les boules dans les boîtes l'une après l'autre dans l'ordre, et on considère l'événement suivant B_i "la boule $n^o i$ va dans une boîte vide" pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Il s'agit alors de calculer la probabilité de l'événement $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$. Comme toutes les boîtes sont vides au départ, on voit que :

$$P(B_1) = 1 = \frac{n}{n}.$$

Supposons alors que l'événement $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{i-1}$ soit réalisé, avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors, cela signifie que $i - 1$ boîtes contiennent déjà exactement une boule. Dès lors, l'événement B_i est réalisé si et seulement si l'on place la boule $n^o i$ dans l'une des $n - i + 1$ boîtes restantes parmi les n boîtes disponibles, et donc :

$$P_{B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n - i + 1}{n}.$$

D'après la formule des probabilités composées, on trouve que :

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2) \dots P_{B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n) \\ &= \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \dots \times \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = \frac{n!}{n^n}.$$

Exercice 2. Une urne contient p boules blanches et q boules noires, avec $p, q \geq 3$. On tire alors 3 boules de cette urne successivement et sans remise. Déterminons la probabilité d'obtenir successivement une boule blanche, puis une boule noire, et enfin une boule blanche. Pour ce faire, on considère l'événement B_i "on tire une boule blanche au i -ème tirage" pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$. Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement $B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3$. Comme on dispose de p boules blanches sur un total de $p + q$ boules au départ, on voit que :

$$P(B_1) = \frac{p}{p + q}.$$

Supposons alors que l'événement B_1 soit réalisé. Alors, cela signifie qu'il reste $p - 1$ boules blanches et q boules noires dans l'urne. Dès lors, l'événement $\overline{B_2}$ est réalisé si et seulement si l'on tire une boule noire parmi les $p + q - 1$ boules de l'urne, et donc :

$$P_{B_1}(\overline{B_2}) = \frac{q}{p + q - 1}.$$

Supposons enfin que l'événement $B_1 \cap \overline{B_2}$ soit réalisé. Alors, cela signifie qu'il reste $p - 1$ boules blanches et $q - 1$ boules noires dans l'urne. Dès lors, l'événement B_3 est réalisé si et seulement si l'on tire une boule blanche parmi les $p + q - 2$ boules de l'urne, et donc :

$$P_{B_1 \cap \overline{B_2}}(B_3) = \frac{p - 1}{p + q - 2}.$$

D'après la formule des probabilités composées, on trouve que :

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3) &= P(B_1)P_{B_1}(\overline{B_2})P_{B_1 \cap \overline{B_2}}(B_3) \\ &= \frac{p}{p + q} \times \frac{q}{p + q - 1} \times \frac{p - 1}{p + q - 2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$P(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3) = \frac{p(p - 1)q}{(p + q)(p + q - 1)(p + q - 2)}.$$

Exercice 3. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 , ainsi que d'une pièce équilibrée. On suppose que l'urne U_1 contient 1 boule blanche et 2 boules noires, que l'urne U_2 contient 1 boule blanche et 3 boules noires. On lance alors la pièce. Si le résultat est pile, alors on tire une boule de l'urne U_1 , sinon on en tire une de l'urne U_2 .

- (1) Déterminons la probabilité d'avoir tiré une boule blanche. Pour ce faire, on considère l'événement B "on tire une boule blanche". De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$, on note U_i l'événement "On choisit l'urne $n^\circ i$ ". D'après la formule des probabilités totales appliquée à l'événement B et au système complet d'événements (U_1, U_2) , on trouve que :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(U_1)P_{U_1}(B) + P(U_2)P_{U_2}(B) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit après simplification que :

$$P(B) = \frac{7}{24}.$$

- (2) On suppose qu'on a tiré une boule blanche. Déterminons la probabilité d'avoir obtenu face, c'est-à-dire $P_B(U_2)$. D'après la formule de Bayes et le résultat de la question précédente, on trouve que :

$$P_B(U_2) = \frac{P_{U_2}(B)P(U_2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{24}}.$$

Par conséquent, on en déduit après simplification que :

$$P_B(U_2) = \frac{3}{7}.$$

Exercice 4. Une personne doit ouvrir une porte. Elle dispose pour cela d'un trousseau de 15 clés contenant la clé qui ouvre cette porte. Elle essaie les clés au hasard et l'une après l'autre. Déterminons la probabilité d'ouvrir la porte au k -ème essai. Pour ce faire, on considère l'événement O_i "on ouvre la porte au i -ème essai" pour tout $i \in \llbracket 1, 15 \rrbracket$. Supposons tout d'abord que l'on ouvre la porte au premier essai, c'est-à-dire que O_1 soit réalisé. Comme on dispose de 15 clés, on voit que :

$$P(O_1) = \frac{1}{15}.$$

Supposons maintenant que l'on ouvre la porte au k -ème essai, c'est-à-dire que O_k soit réalisé avec $k \in \llbracket 2, 15 \rrbracket$. Alors, cela signifie que l'on n'a pas ouvert la porte aux $(k-1)$ essais précédents, et donc :

$$O_k = \overline{O_1} \cap \overline{O_2} \cap \dots \cap \overline{O_{k-1}} \cap O_k.$$

D'après la formule des probabilités composées, on trouve que :

$$\begin{aligned} P(O_k) &= P(\overline{O_1} \cap \overline{O_2} \cap \dots \cap \overline{O_{k-1}} \cap O_k) \\ &= P(\overline{O_1}) P_{\overline{O_1}}(\overline{O_2}) \dots P_{\overline{O_1} \cap \dots \cap \overline{O_{k-1}}}(O_k) \\ &= \frac{14}{15} \times \frac{13}{14} \times \dots \times \frac{15-k}{15-k+1} \times \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit par télescopage que, pour tout $k \in \llbracket 2, 15 \rrbracket$:

$$P(O_k) = \frac{1}{15}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $k \in \llbracket 1, 15 \rrbracket$:

$$P(O_k) = \frac{1}{15}.$$

Exercice 5. On répartit au hasard 4 boules distinctes dans 3 boîtes numérotées de 1 à 3.

- (1) Déterminons la probabilité que la première boîte soit vide. Pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on note V_i l'événement "la i -ème boîte est vide". De plus, pour tout $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on note B_j l'événement "la j -ème boule ne va pas dans la boîte $n^\circ 1$ ". Alors, la première boîte est vide si et seulement si tous les événements B_1, B_2, B_3, B_4 sont réalisés, et donc :

$$V_1 = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4.$$

Par indépendance des répartition des boules dans les boîtes, on trouve que :

$$P(V_1) = P(B_1)P(B_2)P(B_3)P(B_4) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$P(V_1) = \frac{16}{81}.$$

- (2) Déterminons la probabilité que la première boîte ou la deuxième boîte soit vide, c'est-à-dire que l'événement $V_1 \cup V_2$ soit réalisé. D'après la formule du crible de Poincaré, on trouve que :

$$P(V_1 \cup V_2) = P(V_1) + P(V_2) - P(V_1 \cap V_2).$$

Par un raisonnement analogue à celui de la question (1), on trouve que $P(V_1) = P(V_2) = \frac{16}{81}$, et donc :

$$P(V_1 \cup V_2) = \frac{32}{81} - P(V_1 \cap V_2).$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on note T_j l'événement "la j -ème boule va dans la boîte $n^{\circ}3$ ". Alors l'événement $V_1 \cap V_2$ est réalisé si et seulement si les deux premières boîtes sont vides, c'est-à-dire si toutes les boules sont allées dans la troisième boîte, ou en d'autres termes si T_1, T_2, T_3, T_4 sont tous réalisés, et donc :

$$V_1 \cap V_2 = T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4.$$

Par indépendance des répartitions des boules dans les boîtes, on trouve que :

$$P(V_1 \cap V_2) = P(T_1)P(T_2)P(T_3)P(T_4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{81}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$P(V_1) = \frac{31}{81}.$$

Exercice 6. Soit $(a, b) \in]0, 1]^2$. Le fonctionnement d'un appareil au cours du temps obéit aux règles suivantes :

- si l'appareil fonctionne à la date $n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité a de fonctionner à la date n ,
- si l'appareil est en panne à la date $n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité b d'être en panne à la date n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n l'événement "l'appareil fonctionne à la date n " et p_n la probabilité de M_n . Enfin, on suppose que l'appareil fonctionne à la date 0.

- (1) Établissons une relation entre p_n et p_{n-1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales appliquée à l'événement M_n et au système complet d'événements $(M_{n-1}, \overline{M_{n-1}})$, on trouve que :

$$\begin{aligned} p_n &= P(M_n) \\ &= P(M_{n-1})P_{M_{n-1}}(M_n) + P(\overline{M_{n-1}})P_{\overline{M_{n-1}}}(M_n) \\ &= p_{n-1}a + (1 - p_{n-1})(1 - b) \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit après simplification que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_n = (a + b - 1)p_{n-1} + 1 - b.$$

- (2) Déterminons l'expression de p_n en fonction de n, a, b . D'après la question précédente, la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique de raison $(a + b - 1)$. Son point fixe c vérifie l'équation $c = (a + b - 1)c + 1 - b$, et donc :

$$c = \frac{1 - b}{2 - a - b}.$$

D'après le cours, on sait que la suite $(p_n - c)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $(a + b - 1)$, et donc on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n - c = (a + b - 1)^n(p_0 - c).$$

Comme l'appareil fonctionne à la date 0 par hypothèse, on voit que $p_0 = 1$. Dès lors, ceci entraîne que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = c + (a + b - 1)^n(1 - c) = \frac{1 - b}{2 - a - b} + (a + b - 1)^n \left(1 - \frac{1 - b}{2 - a - b} \right).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = \frac{1 - b}{2 - a - b} + (a + b - 1)^n \left(1 - \frac{1 - b}{2 - a - b} \right).$$

- (3) Déterminons la probabilité de l'événement U "l'appareil ne tombe jamais en panne". Par définition, on voit que U est réalisé si et seulement si l'appareil fonctionne à tous les instants n lorsque n parcourt $\mathbb{N}$, c'est-à-dire si $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ sont réalisés, et donc :

$$U = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n.$$

D'après la propriété de limite monotone, ceci nous donne que :

$$P(U) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(M_0 \cap M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n). \quad (*)$$

D'après la formule des probabilités composées et sachant que l'événement M_0 est certain par hypothèse, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(M_0 \cap M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n) = P(M_0)P_{M_0}(M_1) \dots P_{M_0 \cap \dots \cap M_{n-1}}(M_n) = 1 \times a \times \dots \times a = a^n.$$

Comme a appartient à $]0, 1[$ par hypothèse, la suite géométrique $(a^n)_{n \geq 1}$ converge vers 0, ce qui entraîne avec l'égalité (*) que :

$$P(U) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$P(U) = 0.$