

TRAVAUX DIRIGÉS : ESPACES PROBABILISÉS (RÉPONSES - INDICATIONS)

Exercice 1. La proba vaut $\frac{n!}{n^n}$.

Exercice 2. La proba vaut $\frac{pq(p-1)}{(p+q)(p+q-1)(p+q-2)}$.

Exercice 3.

(1) La proba d'avoir tiré une boule blanche vaut $\frac{7}{24}$.

(2) La proba d'avoir obtenu face sachant qu'on a tiré une boule blanche vaut $\frac{3}{7}$.

Exercice 4. La proba d'ouvrir la porte au k -ème essai est toujours égale à $\frac{1}{15}$.

Exercice 5.

(1) La proba que la première boîte soit vide vaut $\left(\frac{2}{3}\right)^4$.

(2) La proba que la première boîte ou la deuxième boîte soit vide vaut $\frac{31}{81}$.

Exercice 6.

(1) On trouve que : $\forall n \geq 1, p_n = (a+b-1)p_{n-1} + 1 - b$.

(2) On a : $\forall n \geq 0, p_n = \left(\frac{1-a-b}{2-a-b}\right)(a+b-1)^n + \frac{1-b}{2-a-b}$.

(3) La proba que l'appareil ne tombe jamais en panne vaut 0.

Exercice 7. On lance simultanément deux dés jusqu'à ce qu'une somme de 5 ou 7 apparaisse. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement "une somme de 5 apparaît au n -ème lancer et sur les $(n-1)$ premiers lancers, ni la somme de 5 ni celle de 7 n'apparaît".

(1) On trouve que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(E_n) = \frac{4}{36} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1}$.

(2) La proba que le jeu s'arrête sur une somme de 5 vaut $\frac{2}{5}$.

(3) La proba que le jeu s'arrête sur une somme de 7 vaut $\frac{3}{5}$.

(4) La proba que le jeu ne s'arrête jamais vaut 0.

Exercice 8. On trouve que : $\forall n \geq 1, P(A_n) = \frac{1}{2}$.

Exercice 9. La proba que A tire une boule rouge le premier vaut $\frac{7}{12}$.

Exercice 10.

(1) A démontrer par récurrence!

(2) Appliquer l'inégalité de Boole aux événements $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$.

Exercice 11. La proba d'avoir choisi la 5-ème pièce vaut $\frac{1}{9}$.

Exercice 12.

- (1) On trouve que $P(A_n) = \frac{n+1}{2^n}$ et $P(B_n) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$. De plus, A_n et B_n sont indépendants si et seulement si $n = 3$.
- (2) On trouve que $P(A) = 0$ et $P(B) = 1$, et donc A et B sont indépendants.

Exercice 13. La proba d'obtenir une boule blanche vaut $\frac{1}{3}$.

Exercice 14.

- (1) On trouve que $p_n = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- (2) On a $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$.

Exercice 15.

- (1) Utiliser la convexité de la fonction exponentielle.
- (2) (a) Utiliser le fait que l'indépendance passe au contraire et le résultat de la question (1).
- (b) On trouve que $P(A_k) = 0$ si $k < 10$ et $P(A_k) = \frac{1}{k}$ si $k \geq 10$.
- (c) La proba que la boule 10 sorte au moins une fois à partir du n -ème tirage vaut 1.
- (d) La proba que la boule 10 sorte une infinité de fois vaut 1.
- (e) La proba que la boule 10 sorte une infinité de fois de suite vaut 0.
- (3) (a) A démontrer par récurrence sur $l \geq 1$.
- (b) La proba que le numéro 10 sorte une infinité de fois vaut 0.

Exercice 16.

- (1) On trouve que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{4}p_n$.
- (2) Utiliser le fait que les racines de l'équation caractéristique ont une valeur absolue < 1 .

Exercice 17.

- (1) On trouve que $P(A_k) = \frac{1}{2^k} \binom{k-1}{n}$ pour tout $k \in [1, 2n+1]$.
- (2) Vérifier que $\sum_{k=n+1}^{2n+1} P(A_k)$ est égale à la probabilité de l'événement B : "on a obtenu au moins $n+1$ piles lors des $2n+1$ lancers". Conclure par un argument de symétrie.

1. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 18.

- (1) La proba que les 4 boules choisies soient de la même couleur vaut $\frac{104}{441}$.
- (2) La proba d'obtenir 2 boules blanches et 2 boules noires vaut $\frac{121}{441}$.

Exercice 19.

- (1) La proba d'obtenir face au premier lancer vaut $\frac{3}{5}$.
- (2) La proba d'avoir choisi la pièce truquée sachant qu'on a obtenu face au premier lancer vaut $\frac{1}{3}$.
- (3) La proba de n'obtenir que des faces aux n lancers vaut $\frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{2^{n-2}}\right)$.
- (4) On trouve que $p_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^{n-2}}}$.
- (5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$.

Exercice 20. La proba qu'un sujet dont le test est négatif soit atteint par la maladie vaut $\frac{2}{1883}$.

Exercice 21. La proba que le document se trouve dans le dernier tiroir sachant qu'il n'est pas dans les 4 premiers vaut $\frac{p}{5-4p}$.

Exercice 22.

- (1) La proba d'obtenir un perdant lors de cette expérience vaut $\frac{n}{2^{n-1}}$.
- (2) La proba d'obtenir le premier perdant à la i -ème expérience vaut $\frac{n}{2^{n-1}} \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{i-1}$.

Exercice 23.

- (1) On voit que $a_n + b_n + c_n = 1$.
- (2) Avec la formule des probas totales, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{3}c_n \end{cases}.$$

- (3) Vérifier avec la question précédente que les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques de raison $\frac{1}{2}$.
- (4) On trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_n &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ b_n &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ c_n &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \end{cases}.$$

Exercice 24.

- (1) On trouve que $P(A_n) = 1 - \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \geq 1$.
- (2) Ecrire A à l'aide des A_n et utiliser la propriété de limite monotone.

Exercice 25.

- (1) $P(A_1) = \frac{1}{2}$ et $P(A_n) = \frac{n}{2^{n+1}}$ pour tout $n \geq 2$.
- (2) $P(A) = 1$.
- (3) $P(B) = \frac{1}{2}$.

Exercice 26.

- (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'événement E_n : "la famille a exactement n enfants". Utiliser alors le fait que $(E_n)_{n \geq 0}$ est un système complet d'événements.
- (2) La proba qu'une famille ait exactement N filles vaut $\frac{\alpha \left(\frac{p}{2}\right)^N}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^{N+1}}$.

Exercice 27.

- (1) (a) La proba de jouer avec la pièce équilibrée après le premier lancer vaut $\frac{5}{12}$.
- (b) La proba d'obtenir "face" au n -ème lancer vaut $\frac{43}{72}$.
- (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n) = \frac{43}{72}$.
- (2) (a) On trouve que, pour tout $n \geq 1$: $P(T_{n+1}) = \frac{1}{6}P(T_n) + \frac{1}{2}$.
- (b) On trouve que, pour tout $n \geq 1$: $P(T_n) = -\frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{3}{5}$.
- (c) La proba d'obtenir "face" au n -ème lancer vaut $-\frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{3}{5}$.

- (d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n) = \frac{3}{5}$.
- (3) On vérifie que $\frac{43}{72} < \frac{3}{5}$. Donc la deuxième stratégie est la meilleure à long terme pour obtenir "face".

Exercice 28.

- (1) Montrer que $U_n \subset U_{n+1}$, et donc la suite (u_n) est croissante et majorée. En particulier, elle converge.
- (2) (a) On trouve que $P(B_n) = \frac{1}{8}$.
- (b) Tout d'abord, les événements B_n et B_{n+1} sont incompatibles car on ne peut pas avoir à la fois "pile" et "face" au n -ème lancer. Idem pour B_n, B_{n+2} et B_{n+1}, B_{n+2} .
- (c) On trouve que $u_3 = \frac{1}{8}$, $u_4 = \frac{1}{4}$, $u_5 = \frac{3}{8}$.
- (3) (a) Comme $U_n = U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n$, on conclut avec la question (2)(b) que $U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}$.
- (b) Comme $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$, on trouve que :

$$P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_{n-2} \cap B_{n+1}).$$

On conclut alors avec l'indépendance de U_{n-2} et B_{n+1} .

- (c) On trouve que $l = 1$.
- (4) (a) $\beta = 8$ et $\gamma = -8$.
- (b) Montrer en sommant que, pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^n v_k = \beta(v_{n+2} + v_{n+1} - v_0 - v_1) + \gamma(v_{n+3} + v_{n+2} + v_{n+1} - v_0 - v_1 - v_2).$$

Vérifier avec la question (3)(c) que la suite (v_n) converge vers 0. Donc la série $\sum v_n$ et de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 8.$$

Exercice 29.

- (1) (a) On trouve que $\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.
- (b) Utiliser le critère de négligeabilité pour les séries.
- (c) Calcul à faire!
- (d) On trouve que $f_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1, 1[$.
- (2) Commencer d'abord par établir que, pour tout $n \geq k$:

$$P(A_n) = \binom{k-1}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Soit B l'événement "on n'obtient jamais k piles lors de cette infinité de lancers". Exprimer $\overline{B}$ en fonction des A_n , puis conclure à l'aide de la propriété de limite monotone.