Lycée Clemenceau **Jeudi 5 novembre 2026**
ECG 2 **Durée : 4 heures**

Corrigé du devoir Surveillé de Mathématiques n^o2

Corrigé de l'exercice 1. Etant donnés deux réels a, b, on considère les suites $(u_k)_{k\geq 0}$ et $(v_k)_{k\geq 0}$ telles que $u_0 = a$, $v_0 = b$ et telles que, pour tout entier $k \geq 0$, on ait $u_{k+1} = 1 + u_k + v_k$ et $v_{k+1} = 2 - 3u_k + 4u_k v_k$. Complétons la fonction en Python suivante qui, étant donnés des réels a, b et un entier $n \geq 0$, calcule u_n et v_n. Pour ce faire, on procède comme suit :

```
def suite(n,a,b):
    u=a
    v=b
    if n==0:
        return a,b
    else:
        for k in range(1,n+1):
            w=u
            u=1+u+v
            v=2-(3*w)+(4*w*v)
        return u,v
```

Corrigé de l'exercice 2. Ecrivons une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 1$, calcule le réel $S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{kl}$. Pour ce faire, on va utiliser deux boucles `for` comme suit :

```
def doublesomme(n):
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        for l in range(1,k+1):
            s=s+(1/(k*l))
    return s
```

Corrigé de l'exercice 3. On admet que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et que sa somme est égale à $\frac{\pi}{4}$.

(1) Ecrivons une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 0$, calcule et affiche la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Pour ce faire, on va utiliser une boucle `for` comme suit :

```
def somme(n):
    s=0
    for k in range(0,n+1):
        s=s+(((-1)**k)/(2*k+1))
    return s
```

(2) Déterminons une fonction en Python qui, étant donné un réel $\varepsilon > 0$, calcule et affiche le plus petit entier $n \geq 0$ tel que :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{\pi}{4} \right| \leq \varepsilon.$$

Pour ce faire, on va utiliser une boucle `for` comme suit :

```
import numpy as np

def entier(e):
    s=1
    n=0
    while np.abs(s-(np.pi/4)):
        n=n+1
        s=s+(((-1)**n)/(2*n+1))
    return n
```

1. Sujet type ECRICOME-EDHEC-EML

Corrigé de l'exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans cet exercice, on se propose de déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant l'équation $(\mathcal{E}_n) : \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) + P(x+1) = 2x^n$.

(1) Soit Φ l'application qui, à tout élément Q de $\mathbb{R}[x]$, associe le polynôme $\Phi(Q) : x \longmapsto Q(x) + Q(x+1)$.

(a) Etablissons que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$. Comme Φ envoie tout polynôme de $\mathbb{R}[x]$ sur un polynôme de $\mathbb{R}[x]$, Φ est une application de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathbb{R}[x]$. Reste donc à montrer que Φ est linéaire. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x]$. Alors, on obtient par définition de Φ que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) + (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x+1) \\
&= \lambda_1 P_1(X) + \lambda_2 P_2(x) + \lambda_1 P_1(X+1) + \lambda_2 P_2(x+1) \\
&= \lambda_1 \left[P_1(x) + P_1(x+1)\right] + \lambda_2 \left[P_2(x) + P_2(x+1)\right] \\
&= \lambda_1 \Phi(P_1)(x) + \lambda_2 \Phi(P_2)(x),
\end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $\Phi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 \Phi(P_1) + \lambda_2 \Phi(P_2)$, et donc Φ est linéaire. Par conséquent :

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[x].}$$

(b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on désigne par Φ_p la restriction de Φ à $\mathbb{R}_p[x]$, c'est-à-dire l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_p[x]$ par $\Phi_p(P) = \Phi(P)$.

(i) Montrons que Φ_p est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[x]$. Soit P un élément de $\mathbb{R}_p[x]$. Alors P est un polynôme de $\mathbb{R}[x]$, de degré $\leq p$. D'après les propriétés du degré (notamment vis-à-vis de la composition des polynômes), on voit que :

$$\deg(x \longmapsto P(x+1)) = \deg(P) \times \deg(x \longmapsto x+1) \leq p \times 1 = p.$$

De plus, d'après les propriétés du degré (concernant la somme des polynômes), on a :

$$\deg(x \longmapsto P(x) + P(x+1)) \leq \max\{\deg(P), \deg(x \longmapsto P(x+1))\} \leq \max\{p, p\} = p.$$

Mais comme $\Phi_p(P)(x) = \Phi(P)(x) = P(x) + P(x+1)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_p[x]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, il s'ensuit que Φ_p envoie tout élément de $\mathbb{R}_p[x]$ sur un élément de $\mathbb{R}_p[x]$, et donc Φ_p est une application de $\mathbb{R}_p[x]$ dans $\mathbb{R}_p[x]$. Reste donc à montrer que Φ_p est linéaire. Pour ce faire, on peut simplement dire que la restriction d'une application linéaire est linéaire, ou procéder comme suit. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_p[x]$. Alors, on a par définition de Φ_p que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Phi_p(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) + (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x+1) \\
&= \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) + \lambda_1 P_1(x+1) + \lambda_2 P_2(x+1) \\
&= \lambda_1 \left[P_1(x) + P_1(x+1)\right] + \lambda_2 \left[P_2(x) + P_2(x+1)\right] \\
&= \lambda_1 \Phi_p(P_1)(x) + \lambda_2 \Phi_p(P_2)(x),
\end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $\Phi_p(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 \Phi_p(P_1) + \lambda_2 \Phi_p(P_2)$, et donc Φ_p est linéaire. Par conséquent :

$$\boxed{\Phi_p \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_p[x].}$$

(ii) Etablissons que la matrice A de Φ_p dans la base canonique $\mathcal{B}_p = (x \longmapsto 1, x \longmapsto x, ..., x \longmapsto x^p)$ de $\mathbb{R}_p[x]$ est triangulaire supérieure, et donnons ses coefficients diagonaux. D'après la formule du binôme, on trouve que, pour tout $k \in \{0, ..., p\}$:

$$\Phi_p(x^k) = x^k + (x+1)^k = x^k + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i (1)^{k-i} = x^k + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i,$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme (vu que $\binom{k}{k} = 1$) :

$$\begin{aligned} \Phi_p(x^k) &= \binom{k}{0}1 + \binom{k}{1}x + ... + \binom{k}{k-1}x^{k-1} + \left[1 + \binom{k}{k}\right]x^k \\ &= \binom{k}{0}1 + \binom{k}{1}x + ... + \binom{k}{k-1}x^{k-1} + 2x^k \end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit que la matrice de Φ_p dans la base canonique de $\mathbb{R}_p[x]$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & \binom{p}{0} \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & \binom{p}{1} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & \binom{p}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$\boxed{A \text{ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 2.}}$

(iii) Montrons que Φ_p est un isomorphisme de $\mathbb{R}_p[x]$ dans $\mathbb{R}_p[x]$. D'après la question précédente, on sait que la matrice A de Φ_p dans la base canonique $\mathcal{B}_p$ de $\mathbb{R}_p[x]$ est triangulaire supérieure, et que tous ses coefficients diagonaux sont égaux à 2. En particulier, comme A est triangulaire supérieure et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, la matrice A est inversible, ce qui entraine que :

$\boxed{\text{l'endomorphisme } \Phi_p \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_p[x] \text{ dans } \mathbb{R}_p[x].}$

(c) Prouvons que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathbb{R}[x]$. D'après la question $(1)(a)$, on sait que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$. Reste donc à montrer que Φ est bijectif. Pour ce faire, on va commencer par montrer que Φ est injectif. Soit P un élément de $\ker(\Phi)$. Alors il existe un entier $p \geq 0$ (supérieur ou égal au degré de P) tel que $P \in \mathbb{R}_p[x]$, et donc :

$$\Phi(P) = \Phi_p(P) = 0_{\mathbb{R}_p[x]}.$$

Comme Φ_p est un isomorphisme de $\mathbb{R}_p[x]$ dans $\mathbb{R}_p[x]$, il s'ensuit que $\ker(\Phi_p) = \{0_{\mathbb{R}_p[x]}\}$, et donc P est le polynôme nul. Mais comme ceci est vrai pour tout $P \in \ker(\Phi)$, on en déduit que :

$\boxed{\ker(\Phi) = \{0_{\mathbb{R}[x]}\} \text{ et } \Phi \text{ est injectif.}}$

A présent, montrons que Φ est surjectif. Soit Q un élément de $\mathbb{R}[x]$. Alors il existe un entier $p \geq 0$ (supérieur ou égal au degré de Q) tel que $Q \in \mathbb{R}_p[x]$. Comme Φ_p est un isomorphisme de $\mathbb{R}_p[x]$ dans $\mathbb{R}_p[x]$, il s'ensuit que Φ_p est surjectif, et donc il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_p[x]$ tel que :

$$\Phi(P) = \Phi_p(P) = Q.$$

Mais comme ceci est vrai pour tout $Q \in \mathbb{R}[x]$, on en déduit que :

$\boxed{\mathfrak{Im}(\Phi) = \mathbb{R}[x] \text{ et } \Phi \text{ est surjectif.}}$

En conclusion, on vient de montrer que :

$\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}[x] \text{ dans } \mathbb{R}[x].}$

(d) Montrons qu'il existe un unique polynôme $E_n \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant l'équation $(\mathcal{E}_n)$. Par définition, on voit que l'équation $(\mathcal{E}_n)$ peut se réécrire sous la forme :

$$(\mathcal{E}_n) : \Phi(P) = (x \longmapsto 2x^n).$$

Comme Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[x]$, on sait que Φ est une bijection de $\mathbb{R}[x]$ dans lui-même, et donc le polynôme $x \longmapsto 2x^n$ admet un unique antécédent (noté E_n) par Φ. Mais comme les antécédents de $x \longmapsto 2x^n$ par Φ sont exactement les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_n)$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{il existe un unique polynôme } E_n \in \mathbb{R}[x] \text{ vérifiant l'équation } (\mathcal{E}_n).}$$

(e) Précisons le degré de E_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$. Fixons un entier $n \in \mathbb{N}$. Si p désigne le degré de E_n, alors on sait qu'il existe des réels $a_0, ..., a_p$ avec $a_p \neq 0$ tels que :

$$E_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_p x^p.$$

D'après la formule du binôme, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\Phi(E_n)(x) &= a_0 + ... + a_p x^p + a_0 + ... + a_p (x+1)^p \\
&= a_0 + ... + a_p x^p + a_0 + ... + a_p \left[1 + \binom{p}{1} x + ... + \binom{p}{p-1} x^{p-1} + x^p\right] \\
&= [a_0 + a_1 + ... + a_p] + \left[\binom{1}{1} a_1 + ... + \binom{p}{1} a_p\right] x + ... + 2a_p x^p,
\end{aligned}$$

et donc $\deg(\Phi(E_n)) = p$. Mais comme $\Phi(E_n)(x) = 2x^n$, il s'ensuit que $\deg(\Phi(E_n)) = n$, et donc $p = n$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\deg(E_n) = n.}$$

(2) Dans cette question, on pose $E_n : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^k$.

(a) Vérifions l'égalité suivante pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_n(x+1) + E_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \left[a_{n,j} + \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_{n,k}\right] x^j.$$

En procédant comme à la question précédente, d'après la formule du binôme et les propriétés des sommes doubles, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Phi(E_n)(x) &= E_n(x+1) + E_n(x) \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} x^j + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} (x+1)^k \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} x^j + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j (1)^{k-j}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} x^j + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} x^j + \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_{n,k} \binom{k}{j} x^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} x^j + \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_{n,k} \binom{k}{j} x^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} x^j + \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} a_{n,k} \binom{k}{j}\right) x^j.
\end{aligned}$$

Par linéarité de la somme, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{E_n(x+1) + E_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \left[a_{n,j} + \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_{n,k}\right] x^j.}$$

(b) Déterminons le système linéaire dont les $a_{n,k}$ sont les solutions, et précisons la valeur de $a_{n,n}$. D'après la question précédente et comme $\Phi(E_n)(x) = 2x^n$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{j=0}^{n} \left[a_{n,j} + \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_{n,k} \right] x^j = 2x^n.$$

Par unicité de l'écriture réduite d'un polynôme, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall j \in \{0, ..., n-1\}, \quad a_{n,j} + \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_{n,k} = 0 \quad \text{et} \quad a_{n,n} + \sum_{k=n}^{n} \binom{k}{n} a_{n,k} = 2a_{n,n} = 2.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on voit que les $a_{n,k}$ sont solutions du système linéaire :

$$\boxed{\begin{cases} 2a_{n,0} + \binom{1}{0}a_{n,1} + \binom{2}{0}a_{n,2} + ... + \binom{n}{0}a_{n,n} = 0 \\ 2a_{n,1} + \binom{2}{1}a_{n,2} + ... + \binom{n}{1}a_{n,n} = 0 \\ \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \quad\quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \quad\quad\quad\quad 2a_{n,n} = 2 \end{cases}}.$$

En particulier, on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{a_{n,n} = 1.}$$

(c) Déterminons les polynômes E_0, E_1, E_2. D'après les questions précédentes, on sait que E_0 est de degré 0, et donc il est constant. Comme de plus $a_{0,0} = 1$, il s'ensuit que :

$$\boxed{E_0 : x \longmapsto 1.}$$

Toujours d'après les questions précédentes, on sait que E_1 est de degré 1, de la forme $E_1 : x \longmapsto a_{1,0} + a_{1,1}x$. Comme de plus $2a_{1,0} + a_{1,1} = 0$ et que $a_{1,1} = 1$, il s'ensuit que $a_{1,0} = -\frac{1}{2}$, et donc :

$$\boxed{E_1 : x \longmapsto x - \frac{1}{2}.}$$

Comme précédemment, on sait que E_2 est de degré 2, de la forme $E_2 : x \longmapsto a_{2,0} + a_{2,1}x + a_{2,2}x^2$. Comme de plus $(a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2})$ est solution du système :

$$\begin{cases} 2a_{2,0} + a_{2,1} + a_{2,2} = 0 \\ 2a_{2,1} + 2a_{2,2} = 0 \\ 2a_{2,2} = 2 \end{cases},$$

il s'ensuit que $a_{2,2} = 1$, $a_{2,1} = -1$, $a_{2,0} = 0$, et donc :

$$\boxed{E_2 : x \longmapsto x^2 - x.}$$

(d) Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $E_n'(x) = nE_{n-1}(x)$. Fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, on sait que E_n est l'unique solution de l'équation :

$$(\mathcal{E}_n) : \forall x \in \mathbb{R}, \ E_n(x) + E_n(x+1) = 2x^n.$$

D'après les propriétés de la dérivation, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_n'(x) + E_n'(x+1) = 2nx^{n-1}.$$

Posons $F_{n-1} = \frac{E_n'}{n}$. Alors on obtient en divisant la relation ci-dessus par n que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{n-1}(x) + F_{n-1}(x+1) = \frac{E_n'(x) + E_n'(x+1)}{n} = 2x^{n-1}.$$

En particulier, le polynôme F_{n-1} est solution de l'équation $(\mathcal{E}_{n-1})$. Mais comme cette équation admet E_{n-1} pour unique solution d'après les questions précédentes, il s'ensuit que :

$$F_{n-1} = \frac{E_n'}{n} = E_{n-1}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{E_n'(x) = nE_{n-1}(x).}$$

(e) Déterminons l'expression de la dérivée k-ème $E_n^{(k)}$ de E_n. Pour ce faire, fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons par une récurrence finie la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $k \in \{0, ..., n\}$ par :

$$\mathcal{P}(k) : \text{"}\forall x \in \mathbb{R},\ E_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}E_{n-k}(x).\text{"}$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, car on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_n^{(0)}(x) = E_n(x) \quad \text{et} \quad \frac{n!}{(n-0)!}E_{n-0}(x) = \frac{n!}{n!}E_n(x) = E_n(x).$$

A présent, supposons la propriété $\mathcal{P}(k)$ vraie, avec $0 \leq k < n$, et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}E_{n-k}(x).$$

Par dérivation et d'après la question précédente, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
E_n^{(k+1)}(x) &= \left(E_n^{(k)}\right)'(x) \\
&= \left(\frac{n!}{(n-k)!}E_{n-k}(x)\right)' \\
&= \frac{n!}{(n-k)!}(n-k)E_{n-k-1}(x) \\
&= \frac{n!}{(n-k-1)!(n-k)}(n-k)E_{n-k-1}(x) \\
&= \frac{n!}{(n-k-1)!}E_{n-k-1}(x),
\end{aligned}$$

et donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $k \in \{0, ..., n\}$. En particulier, on a pour tout $k \in \{0, ..., n\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}E_{n-k}(x).$$

De plus, comme E_n est de degré n d'après les questions précédentes, on voit que $E_n^{(k)} = 0_{\mathbb{R}_n[x]}$ si $k > n$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{E_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}E_{n-k}(x) & \text{si} \quad k \in \{0, ..., n\} \\ 0 & \text{si} \quad k > n \end{cases}.}$$

(f) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $E_n(x) = (-1)^n E_n(1-x)$. Fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, on sait que E_n est l'unique solution de l'équation :

$$(\mathcal{E}_n) : \text{"}\forall x \in \mathbb{R},\ E_n(x) + E_n(x+1) = 2x^n\text{"}.$$

Posons alors $G_n(x) = (-1)^n E_n(1-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
G_n(x) + G_n(x+1) &= (-1)^n E_n(1-x) + (-1)^n E_n(1-(x+1)) \\
&= (-1)^n E_n(1-x) + (-1)^n E_n(-x) \\
&= (-1)^n \left[E_n(-x) + E_n(-x+1)\right] \\
&= (-1)^n 2(-x)^n \\
&= (-1)^n 2(-1)^n x^n \\
&= 2x^n.
\end{aligned}$$

En particulier, le polynôme G_n est solution de l'équation $(\mathcal{E}_n)$. Mais comme cette équation admet E_n pour unique solution d'après les questions précédentes, il s'ensuit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G_n(x) = (-1)^n E_n(1-x) = E_n(x).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{E_n(x) = (-1)^n E_n(1-x).}$$

(g) Déterminons, pour tout entier pair $n > 0$, les valeurs de $E_n(0)$ et $E_n(1)$. D'après la question précédente, on sait que $E_n(x) = (-1)^n E_n(1-x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, si n est pair, on voit que $(-1)^n = 1$, et donc $E_n(x) = E_n(1-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En remplaçant x par 0, on trouve alors que :

$$E_n(0) = E_n(1-0) = E_n(1).$$

Comme de plus $E_n(x) + E_n(x+1) = 2x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient en remplaçant x par 0 que :

$$E_n(0) + E_n(0+1) = E_n(0) + E_n(1) = 2 \times 0^n = 0.$$

Mais comme $E_n(0) = E_n(1)$ et $E_n(0) + E_n(1) = 0$, on en déduit que, pour tout entier pair $n > 0$:

$$\boxed{E_n(0) = E_n(1) = 0.}$$

(h) Déterminons, pour tout entier impair n, la valeur de $E_n(\frac{1}{2})$. D'après la question précédente, on sait que $E_n(x) = (-1)^n E_n(1-x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, si n est impair, on voit que $(-1)^n = -1$, et donc $E_n(x) = -E_n(1-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En remplaçant x par $\frac{1}{2}$, on trouve alors que :

$$E_n\left(\frac{1}{2}\right) = -E_n\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -E_n\left(\frac{1}{2}\right).$$

Comme $E_n(\frac{1}{2}) = -E_n(\frac{1}{2})$, on en déduit que $2E_n(\frac{1}{2}) = 0$, et donc pour tout entier impair n :

$$\boxed{E_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0.}$$

(i) Déterminons les polynômes E_3 et E_4. Pour ce faire, partant des questions précédentes, on sait que $E_n'(x) = nE_{n-1}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dès lors, en remplaçant n par 3, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_3'(x) = 3E_{3-1}(x) = 3E_2(x) = 3(x^2 - x) = 3x^2 - 3x.$$

Par intégration, on voit qu'il existe un réel c tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + c.$$

Comme $E_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ pour tout entier impair n d'après la question précédente, il s'ensuit que :

$$E_3\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + c = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} + c = -\frac{1}{4} + c = 0.$$

et donc $c = \frac{1}{4}$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{E_3 : x \longmapsto x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}.}$$

Comme précédemment, on sait que $E_n'(x) = nE_{n-1}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dès lors, en remplaçant n par 4, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_4'(x) = 4E_{4-1}(x) = 4E_3(x) = 4\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}\right) = 4x^3 - 6x^2 + 1.$$

Par intégration, on voit qu'il existe un réel d tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E_4(x) = x^4 - 2x^3 + x + d.$$

Comme $E_n(0) = 0$ pour tout entier pair $n > 0$ d'après les questions précédentes, il s'ensuit que $d = 0$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{E_4 : x \longmapsto x^4 - 2x^3 + x.}$$

Corrigé de l'exercice 5. Soit A un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et soit I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout polynôme $P : x \longmapsto a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$ de $\mathbb{R}[x]$, on pose $P(A) = a_0I + a_1A + ... + a_mA^m$. Par la suite, on admet que, pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ et pour tous réels λ, μ, on a $(\lambda P + \mu Q)(A) = \lambda P(A) + \mu Q(A)$ et $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$. Dans cet exercice, on se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$. Pour ce faire, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

(1) Ecrivons une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 0$, calcule et affiche u_n. Pour ce faire, on va utiliser une fonction récursive comme suit :

```
def suiteu(n):
    if n==0:
        return 0
    elif n==1:
        return 1
    elif n==2:
        return 1
    else:
        return 4*suiteu(n-1)-5*suiteu(n-2)+2*suiteu(n-3)
```

(2) (a) Ecrivons la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. D'après la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n), on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_n.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

(b) Vérifions que $(A - I)^2(A - 2I) = 0$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$A - I = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

En particulier, ceci entraine que :

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$(A - I)^2(A - 2I) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{(A - I)^2(A - 2I) = 0.}$$

(3) On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ défini par : $P : x \longmapsto (x - 1)^2(x - 2)$.

(a) Justifions l'existence et l'unicité d'un couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}_2[x]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x).$$

Pour ce faire, fixons un entier $n \in \mathbb{N}$. Comme le polynôme P est de degré 3, le théorème sur la division euclidienne entraine l'existence d'un unique couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]$, avec $\deg(R_n) < 3$ tel que $x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais comme $\deg(R_n) < 3$, on voit que $\deg(R_n) \leq 2$, et donc R_n appartient à $\mathbb{R}_2[x]$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists!(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}_2[x],\ \forall x \in \mathbb{R},\ x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x).}$$

(b) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $R_n(x) = a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2$. Pour ce faire, fixons un entier $n \in \mathbb{N}$. Comme la famille $(x \longmapsto 1, x \longmapsto x-1, x \longmapsto (x-1)^2)$ est formée de polynômes de degrés échelonnés, elle est libre. De plus, comme cette famille compte trois éléments appartenant à $\mathbb{R}_2[x]$ et que $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, il s'ensuit que cette famille est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Mais comme R_n appartient à $\mathbb{R}_2[x]$ d'après la question précédente, ce polynôme doit s'exprimer comme combinaison linéaire des éléments de cette base. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ \exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3,\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ R_n(x) = a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2.}$$

(c) Etablissons que $a_n = 1$, $b_n = n$ et $c_n = 2^n - n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après les deux questions précédentes, on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x) = P(x)Q_n(x) + a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2. \quad (*)$$

Comme $P(x) = (x-1)^2(x-2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on voit que 1 est racine de P, et donc :

$$1^n = P(1)Q_n(1) + a_n + b_n(1-1) + c_n(1-1)^2 = 0 + a_n + b_n 0 + c_n 0 = a_n,$$

d'où il s'ensuit que $a_n = 1$. De plus, on obtient par dérivation de $(*)$ que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$nx^{n-1} = P'(x)Q_n(x) + P(x)Q_n'(x) + b_n + 2c_n(x-1).$$

Comme $P(x) = (x-1)^2(x-2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on voit que 1 est en fait racine double de P, ce qui entraine que $P(1) = P'(1) = 0$, et donc :

$$n(1)^{n-1} = P'(1)Q_n(1) + P(1)Q_n'(1) + b_n + 2c_n(1-1) = 0 + 0 + b_n + c_n 0 = b_n,$$

d'où il s'ensuit que $b_n = n$. Enfin, comme $P(x) = (x-1)^2(x-2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on voit que 2 est racine de P, et donc :

$$2^n = P(2)Q_n(2) + a_n + b_n(2-1) + c_n(2-1)^2 = 0 + a_n + b_n + c_n,$$

d'où il s'ensuit que $a_n + b_n + c_n = 2^n$. Mais comme $a_n = 1$ et $b_n = n$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n = 1,\ \ b_n = n,\ \ c_n = 2^n - n - 1.}$$

(4) (a) Ecrivons la matrice A^n comme combinaison linéaire des matrices $I, A-I, (A-I)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente et par définition de R_n, a_n, b_n, c_n, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$R_n(x) = 1 + n(x-1) + (2^n - n - 1)(x-1)^2.$$

Comme $x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $P(A) = 0$ d'après la question $(1)(b)$, on obtient que :

$$\begin{aligned} A^n &= P(A)Q_n(A) + R_n(A) \\ &= 0 \times Q_n(A) + R_n(A) \\ &= 0 \times Q_n(A) + I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2 \\ &= I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{A^n = I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2.}$$

(b) Donnons la troisième ligne de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on sait que $A^n = I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + (2^n - n - 1) \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Après calculs, on voit que la troisième ligne L_n de la matrice A^n est donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\boxed{L_n = \begin{pmatrix} 2^n - n - 1 & -2^{n+1} + 3n + 2 & 2^n - 2n \end{pmatrix}.}$$

(5) (a) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ".$$

Tout d'abord, on remarque que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En effet, on sait par définition de (u_n) que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, ce qui entraine par définition de X_0 que :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Comme $X_{n+1} = AX_n$ d'après la question $(1)(a)$, on a par hypothèse de récurrence que :

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où il s'ensuit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

(b) Déterminons l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions $(3)(b)$ et $(4)(a)$, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left[I + n(A - I) + (2^n - n - 1)(A - I)^2 \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Par des calculs simples, on obtient que :

$$(A - I) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De la même manière, on trouve que :

$$(A - I)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, il s'ensuit en reportant ces calculs dans l'égalité $(*)$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (2^n - n - 1) \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{n+2} + 2n + 5 \\ -2^{n+1} + 2n + 3 \\ -2^n + 2n + 1 \end{pmatrix}.$$

Mais comme u_n est la troisième composante de X_n, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_n = -2^n + 2n + 1.}$$

Corrigé du problème 1. Dans ce problème, on se propose d'étudier une fonction définie par une intégrale.

Partie I : étude d'une fonction f

(1) Montrons que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ converge. Tout d'abord, comme la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, on remarque que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ est impropre en $+\infty$. De plus, pour tout $x \in]0, +\infty[$ et pour tout $t \geq 0$, on voit par des calculs simples que :

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{x+t} \leq \frac{e^{-t}}{x}.$$

Comme l'intégrale exponentielle $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge d'après le cours, on obtient par linéarité que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}dt$ converge aussi pour tout $x \in]0,+\infty[$. Dès lors, il s'ensuit d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt \text{ converge.}}$$

On note $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in]0,+\infty[$ par : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$.

(2) Montrons tout d'abord que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt$. Par définition de f et d'après la relation de Chasles, on voit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt. \quad (*)$$

Comme $\frac{e^{-t}}{x+t} \geq 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ et pour tout $t \geq 1$, on obtient par positivité de l'intégrale que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt \geq 0.$$

D'après la relation $(*)$, on trouve que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}dt. \quad (**)$$

Par ailleurs, comme la fonction $t \longmapsto e^{-t}$ est décroissante sur $[0,1]$, on voit que $e^{-t} \geq e^{-1}$ pour tout $t \in [0,1]$. Dès lors, on obtient que, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et pour tout $t \in [0,1]$:

$$\frac{e^{-t}}{x+t} \geq \frac{e^{-1}}{x+t}.$$

Par croissance de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt. \quad (***)$$

En associant les inégalités $(**)$ et $(***)$, il s'ensuit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt.}$$

A présent, montrons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+. Par des calculs simples et par linéarité de l'intégrale, on obtient que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt = e^{-1}\int_0^1 \frac{1}{x+t}dt = e^{-1}\left[\ln(x+t)\right]_0^1 = e^{-1}\left[\ln(x+1) - \ln(x)\right].$$

Comme $\ln(x+1)$ tend vers $\ln(1) = 0$ quand x tend vers 0^+, et que $\ln(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0^+, il s'ensuit que $\ln(x+1) - \ln(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+, et donc :

$$\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

Mais comme $f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}dt$ pour tout $x \in]0,+\infty[$, on en déduit par comparaison que :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.}$$

(3) Montrons tout d'abord que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $0 < f(x) \leq \dfrac{1}{x}$. Pour ce faire, on commence par remarquer que, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$0 < \frac{e^{-t}}{x+t} \leq \frac{e^{-t}}{x}.$$

Comme l'intégrale exponentielle $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge d'après le cours, on obtient par linéarité que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}dt$ converge aussi pour tout $x \in]0,+\infty[$. Dès lors, comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$ converge d'après la question (1), on obtient par croissance et stricte positivité de l'intégrale que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$0 < \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}dt.$$

Par définition de f et par linéarité de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}dt.$$

D'après le cours sur les intégrales exponentielles, on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{0 < f(x) \leq \frac{1}{x}.}$$

A présent, montrons que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. D'après ce qui précède, on sait que $0 < f(x) \leq \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. Mais comme $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, il s'ensuit par encadrement que :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

(4) Montrons tout d'abord que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ converge. D'après le cours, on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ (correspondant à la fonction Γ) converge pour tout $x > 0$. En particulier, cette intégrale converge pour $x = 2$, ce qui entraine que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} te^{-t}dt \text{ converge.}}$$

A présent, montrons que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\left|f(x) - \frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}dt.$$

D'après les propriétés des intégrales exponentielles et par linéarité de l'intégrale, on trouve par des calculs simples que, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) - \frac{1}{x} &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt - \frac{1}{x} \times 1 \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{x+t} - \frac{e^{-t}}{x} \right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x} \right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{x-(x+t)}{x(x+t)} \right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{-t}{x(x+t)} \right) dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)} dt.
\end{aligned}$$

En passant aux valeurs absolues et sachant que $\frac{te^{-t}}{x(x+t)} \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, il s'ensuit par positivité de l'intégrale que :

$$\left| f(x) - \frac{1}{x} \right| = \left| -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)} dt \right| = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)} dt. \quad (*)$$

Comme $x(x+t) \geq x$ pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, on obtient que, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\frac{te^{-t}}{x(x+t)} \leq \frac{te^{-t}}{x^2}.$$

Par croissance de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x^2} dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, il s'ensuit que, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)} dt \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt. \quad (**)$$

En réunissant les relations $(*)$ et $(**)$, on en déduit que, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\boxed{\left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt.}$$

(5) Montrons que : $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$. D'après la question (4), on sait que, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt.$$

En divisant cette inégalité par $\frac{1}{x}$ (lequel est positif car $x > 0$), on obtient que, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$0 \leq \left| \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} - 1 \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt.$$

Comme $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, il s'ensuit par encadrement que :

$$\left|\frac{f(x)}{\frac{1}{x}} - 1\right| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, cela signifie que :

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui se retraduit sous la forme suivante :

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.}$$

Partie II : une autre expression intégrale de f

A - Dérivablité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale

(1) Soit $(x,h) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^*$ tel que $h > -\dfrac{x}{2}$.

(a) Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$ converge. Tout d'abord, comme la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, on remarque que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$ est impropre en $+\infty$. De plus, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et pour tout $t \geq 0$, on voit par des calculs simples que :

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \leq \frac{e^{-t}}{x^2}.$$

Comme l'intégrale exponentielle $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge d'après le cours, on obtient par linéarité que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2}dt$ converge aussi pour tout $x \in]0,+\infty[$. Dès lors, il s'ensuit d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt \text{ converge.}}$$

(b) Etablissons que, pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a :

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.$$

Par des calculs simples, on obtient que, pour tout $t \in [0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| &= \left|\frac{1}{h}\left(\frac{x+t-(x+t+h)}{(x+h+t)(x+t)}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\left(\frac{-h}{(x+h+t)(x+t)}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| \\
&= \left|-\frac{1}{(x+h+t)(x+t)} + \frac{1}{(x+t)^2}\right| \\
&= \left|\frac{-(x+t)+(x+t+h)}{(x+h+t)(x+t)^2}\right| \\
&= \left|\frac{h}{(x+h+t)(x+t)^2}\right| \\
&= \frac{|h|}{|x+h+t|(x+t)^2}.
\end{aligned}$$

Comme $x > 0$, $t \geq 0$ et $h > -\dfrac{x}{2}$, on voit que $x+t+h > \dfrac{x}{2} \geq 0$ et $x+t \geq x \geq 0$, et donc $|x+t+h| > \dfrac{x}{2}$ et $(x+t)^2 \geq x^2$. Dès lors, on obtient avec la relation ci-dessus que, pour tout $t \in [0,+\infty[$:

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right| \leq \frac{|h|}{\frac{x}{2}\times x^2} = \frac{2|h|}{x^3}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $t \in [0,+\infty[$:

$$\boxed{\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.}$$

(c) Montrons l'inégalité suivante :

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.$$

D'après la question précédente, on sait que, pour tout $t \in [0,+\infty[$:

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.$$

On peut alors remarquer que cette inégalité signifie que, pour tout $t \in [0,+\infty[$:

$$-\frac{2|h|}{x^3} \leq \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2} \leq \frac{2|h|}{x^3}.$$

En multipliant cet encadrement par e^{-t}, on obtient que, pour tout $t \in [0,+\infty[$:

$$-\frac{2|h|e^{-t}}{x^3} \leq \frac{1}{h}\left(\frac{e^{-t}}{x+h+t}-\frac{e^{-t}}{x+t}\right)+\frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \leq \frac{2|h|e^{-t}}{x^3}.$$

Comme $x > 0$ et $x+h > \dfrac{x}{2} > 0$, on voit que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+h+t}dt$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$ convergent toutes les trois d'après les questions précédentes. Comme de plus l'intégrale exponentielle $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}dt$ converge, il s'ensuit par croissance de l'intégrale que :

$$\int_0^{+\infty}-\frac{2|h|e^{-t}}{x^3}dt \leq \int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{e^{-t}}{x+h+t}-\frac{e^{-t}}{x+t}\right)+\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\right]dt \leq \int_0^{+\infty}\frac{2|h|e^{-t}}{x^3}dt.$$

Dès lors, on obtient par linéarité de l'intégrale que :

$$-\frac{2|h|}{x^3}\int_0^{+\infty}e^{-t}dt \leq \frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+h+t}dt-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}dt\right)+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt \leq \frac{2|h|}{x^3}\int_0^{+\infty}e^{-t}dt.$$

Par définition de la fonction f, on trouve que :

$$-\frac{2|h|}{x^3}\int_0^{+\infty}e^{-t}dt \leq \frac{1}{h}\left(f(x+h)-f(x)\right)+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt \leq \frac{2|h|}{x^3}\int_0^{+\infty}e^{-t}dt.$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}dt = 1$ d'après le cours, il s'ensuit que :

$$-\frac{2|h|}{x^3} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt \leq \frac{2|h|}{x^3}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.}$$

(2) Montrons que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt.$$

D'après la question précédente, on sait que, pour tout $(x,h) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^*$ tel que $h > -\dfrac{x}{2}$:

$$0 \leq \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.$$

D'après le théorème d'encadrement, on obtient que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt\right| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

En d'autres termes, cela signifie que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et : } \forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = -\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt.}$$

(3) Montrons que, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $(\varepsilon, A) \in]0,1] \times [1,+\infty[$, on a :

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt = -\frac{e^{-A}}{x+A}+\frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon}-\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{x+t}dt.$$

Pour ce faire, posons $u(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = \dfrac{1}{x+t}$ pour tout $t \in [\varepsilon, A]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, A]$, et de plus $u'(t) = e^{-t}$ et $v'(t) = -\dfrac{1}{(x+t)^2}$ pour tout $t \in [\varepsilon, A]$. Dès lors, par intégration par parties, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt &= \int_\varepsilon^A u(t)v'(t)dt \\
&= [u(t)v(t)]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A u'(t)v(t)dt \\
&= \left[-\frac{e^{-t}}{x+t}\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A -\frac{e^{-t}}{x+t}dt \\
&= \left[-\frac{e^{-t}}{x+t}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t}dt.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $(\varepsilon, A) \in]0,1] \times [1,+\infty[$:

$$\boxed{\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt = -\frac{e^{-A}}{x+A}+\frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon}-\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{x+t}dt.}$$

(4) Montrons que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a : $f'(x) = -\dfrac{1}{x} + f(x)$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $(\varepsilon, A) \in]0,1] \times [1,+\infty[$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt = -\frac{e^{-A}}{x+A}+\frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon}-\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{x+t}dt.$$

Par passage à la limite quand ε tend vers 0 dans l'égalité ci-dessus, on trouve que, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $A \in [1,+\infty[$:

$$\int_0^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt = -\frac{e^{-A}}{x+A}+\frac{1}{x}-\int_0^A\frac{e^{-t}}{x+t}dt.$$

Comme e^{-A} et $\dfrac{1}{x+A}$ tendent vers 0 quand A tend vers $+\infty$ et que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}dt$ convergent d'après les questions précédentes, on trouve par passage à la limite quand A tend vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt = \frac{1}{x}-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}dt.$$

Par définition de f et d'après la question (2) de la partie II, il s'ensuit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$-f'(x) = \frac{1}{x} - f(x).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x).}$$

(5) Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x).$$

D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x).$$

Comme les fonctions $x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ et f sont dérivables sur $]0,+\infty[$ d'après le cours et les questions précédentes, la fonction f' est aussi dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$. Dès lors, la fonction f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et de plus, on a pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x} + f(x)\right)' = \frac{1}{x^2} + f'(x).$$

Mais comme les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ et f' sont dérivables sur $]0,+\infty[$, elles sont en particulier continues sur $]0,+\infty[$, et donc la fonction f'' est continue sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions continues sur $]0,+\infty[$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et : } \forall x \in]0,+\infty[,\ f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x).}$$

B - Intervention d'une fonction auxiliaire g

On note $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in]0,+\infty[$ par : $g(x) = e^{-x} f(x)$.

(1) Montrons que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.$$

Comme les fonctions $x \longmapsto e^{-x}$ et f sont dérivables sur $]0,+\infty[$ d'après les questions précédentes, la fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et de plus, on a pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$g'(x) = \left(e^{-x} f(x)\right)' = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = e^{-x}\left[f'(x) - f(x)\right] = e^{-x} \times -\frac{1}{x}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et : } \forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.}$$

(2) Montrons que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ converge. Tout d'abord, comme la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x,+\infty[$, on remarque que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ est impropre en $+\infty$. De plus, on peut remarquer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et pour tout $u \geq x$:

$$0 < \frac{e^{-u}}{u} \leq \frac{e^{-u}}{x}.$$

Comme l'intégrale exponentielle $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u} du$ converge, on obtient par linéarité que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x} du$ converge aussi pour tout $x \in]0,+\infty[$. En particulier, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x} du$ converge pour

tout $x \in]0,+\infty[$, et donc il s'ensuit d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \text{ converge.}}$$

A présent, montrons que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Pour ce faire, on commence par fixer un réel $A > 0$ et l'on pose pour tout $x > 0$:

$$H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

D'après la relation de Chasles, on constate que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_x^{A} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_A^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = -\int_A^{x} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_A^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

En outre, on peut remarquer que la fonction $h : x \longmapsto -\dfrac{e^{-x}}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur $]0,+\infty[$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. Comme la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_A^x -\frac{e^{-u}}{u} du$ est la primitive de la fonction h qui s'annule en $x = A$, on voit que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, de dérivée égale à h. En particulier, comme $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ est une constante, on obtient que H est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que de plus, on a pour tout $x > 0$:

$$H'(x) = h(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.$$

En particulier, on voit avec la question (1) que $H' = g'$ sur $]0,+\infty[$, et donc H et g sont toutes deux des primitives de h sur $]0,+\infty[$. Dès lors, il existe un réel C tel que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$H(x) = g(x) + C. \quad (*)$$

Mais comme $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ d'après la question (4) de la partie I et que $H(x)$ est le reste d'une intégrale convergente, il s'ensuit que :

$$g(x) = e^{-x} f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad H(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dès lors, on obtient par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$ dans la relation $(*)$ que $0 = 0 + C$, et donc $C = 0$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.}$$

Mais comme $g(x) = f(x)e^{-x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$, on en déduit aussi que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.}$$

(3) Montrons que : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$. Comme $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ d'après la question (5) de la partie I, on obtient d'après la question précédente que :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = f(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x} \times \frac{1}{x}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.}$$

(4) Déterminons la nature de la série $\sum_{n\geq 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$. D'après la question précédente, on sait que :

$$\int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-n}}{n}.$$

Dès lors, on obtient avec les règles de calcul des équivalents que :

$$n^2 \times n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{n\to+\infty}{\sim} n^4 \times \frac{e^{-n}}{n} \underset{x\to+\infty}{\sim} n^3 e^{-n}.$$

Comme $n^3 e^{-n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ par croissance comparée, il s'ensuit que :

$$n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Mais comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs et converge d'après le cours, il s'ensuit d'après le critère de négligeabilité des séries que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \text{ converge.}}$$

2. Sujet type ESSEC

Corrigé du problème 2. On désigne par I l'intervalle $[1,+\infty[$, par E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles et par $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs réelles. On fixe enfin un réel a strictement positif. Pour tout élément f de E, on dit qu'une fonction y de $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ est une solution du problème (E_f) si :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - ay(x) + f(x) = 0.$$

L'objectif de ce problème est de montrer qu'à tout élément f de E, on peut associer une unique solution g de (E_f) qui soit bornée sur I, puis d'étudier l'opérateur $U : f \longmapsto g$. Les trois parties du problèmes traitent, souvent à partir d'exemples, de propriétés de l'opérateur U.

(1) Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U :

(a) *Etude de l'équation* (E_f).

(i) On considère $f \in E$ et $y \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$. Commençons par écrire la dérivée de $x \longmapsto e^{-ax}y(x)$. Comme les fonctions y et exponentielles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on voit par produit que la fonction $g : x \longmapsto e^{-ax}y(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et de plus, on a pour tout $x \in I$:

$$\boxed{g'(x) = -ae^{-ax}y(x) + e^{-ax}y'(x) = e^{-ax}(-ay(x) + y'(x)).}$$

Montrons alors que y est solution du problème (E_f) si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad y(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at}f(t)dt\right).$$

Pour ce faire, on part du fait que :

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution du problème } (E_f) &\iff \forall x \in I,\ y'(x) - ay(x) + f(x) = 0 \\
&\iff \forall x \in I,\ g'(x) = -e^{-ax}f(x) \\
&\iff g \text{ est une primitive de } x \longmapsto -e^{-ax}f(x) \text{ sur } I \\
&\iff \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ g(x) = K - \int_1^x e^{-at}f(t)\,dt \\
&\iff \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ y(x) = e^{ax}\left[K - \int_1^x e^{-at}f(t)\,dt\right].
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{y \text{ est solution du problème } (E_f) \iff \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ y(x) = e^{ax}\left[K - \int_1^x e^{-at}f(t)\,dt\right].}$$

(ii) Montrons que, s'il existe une solution de (E_f) qui soit bornée sur I, celle-ci est unique. Pour ce faire, supposons qu'il existe deux solutions y_1 et y_2 de (E_f) qui sont bornées sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, il existe deux réels K_1 et K_2 tels que, pour tout $x \in I$:

$$y_1(x) = e^{ax}\left(K_1 - \int_1^x e^{-at}f(t)dt\right) \quad \text{et} \quad y_2(x) = e^{ax}\left(K_2 - \int_1^x e^{-at}f(t)dt\right).$$

Comme y_1 et y_2 sont bornées sur I, leur différence $y_2 - y_1$ l'est aussi. En particulier, la fonction $x \longmapsto (K_1 - K_2)e^{ax}$ est bornée sur I. Comme cette fonction tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si $K_1 \neq K_2$ (car $a > 0$), il s'ensuit que $K_1 = K_2$, et donc $y_1 = y_2$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{si } (E_f) \text{ admet une solution bornée, alors elle est unique.}}$$

(iii) Vérifions que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at}f(t)dt$ est convergente. Comme la fonction f est continue sur I par hypothèse, la fonction $t \longmapsto e^{-at}f(t)$ est continue sur I comme produit de fonctions continues sur I, et donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at}f(t)dt$ est impropre en $+\infty$. De plus, comme f appartient à E, cette fonction est bornée sur I par une constante positive que l'on notera K, et donc $|f(t)| \leq K$ pour tout $t \in I$. En particulier, ceci nous donne que $|e^{-at}f(t)| \leq Ke^{-at}$ pour tout $t \in I$. Comme $a > 0$, l'intégrale exponentielle $\int_1^{+\infty} e^{-at}dt$ converge, et donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} Ke^{-at}dt$ converge par linéarité. D'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, il s'ensuit

que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at}f(t)dt$ est absolument convergente, et donc convergente. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} e^{-at}f(t)dt \text{ converge.}}$$

(iv) Démontrons que la fonction $g : x \longmapsto e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt$ est l'unique solution de (E_f) qui soit bornée sur $[1, +\infty[$. D'après la relation de Chasles, on voit que, pour tout $x \in I$:

$$g(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt = e^{ax}\left(\int_1^{+\infty} e^{-at}f(t)dt - \int_1^x e^{-at}f(t)dt\right).$$

Si l'on pose $K = \int_1^{+\infty} e^{-at}f(t)dt$, alors ceci nous donne que, pour tout $x \in I$:

$$g(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at}f(t)dt\right).$$

En particulier, on obtient d'après la question $(1)(a)(i)$ que g est solution de (E_f). De plus, on trouve avec l'inégalité triangulaire que, pour tout $x \in I$:

$$|g(x)| = \left|e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt\right| \leq e^{ax}\int_x^{+\infty} |e^{-at}f(t)|dt.$$

Comme f appartient à E, la fonction f est bornée sur I. Soit C est un majorant de $|f|$ sur I. Comme $|f(t)| \leq C$ pour tout $t \in I$, ceci entraine par croissance et linéarité de l'intégrale que, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
|g(x)| &\leq Ce^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}dt \\
&\leq Ce^{ax}\lim_{y\to+\infty}\int_x^y e^{-at}dt \\
&\leq Ce^{ax}\lim_{y\to+\infty}\left[-\frac{e^{-at}}{a}\right]_x^y \\
&\leq Ce^{ax}\times\frac{e^{-ax}}{a} \quad = \frac{C}{a}.
\end{aligned}$$

En particulier, la fonction g est bornée sur I, et donc g est une solution bornée de (E_f) sur I. D'après la question $(1)(a)(ii)$, on en déduit que :

$$\boxed{g : x \longmapsto e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt \text{ est l'unique solution bornée de } (E_f) \text{ sur } I.}$$

Dans toute la suite du problème, si $f \in E$, on note $U(f)$ la fonction g obtenue à la question $(1)(a)(iv)$.

(b) *Linéarité de U.*

(i) Explicitons $U(f)$ dans le cas où $f = 1$. Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
U(f)(x) &= e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}\times 1\times dt \\
&= e^{ax}\lim_{y\to+\infty}\int_x^y e^{-at}dt \\
&= e^{ax}\lim_{y\to+\infty}\left[-\frac{e^{-at}}{a}\right]_x^y \\
&= e^{ax}\times\frac{e^{-ax}}{a} \quad = \frac{1}{a}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{U(f) : \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{a} \end{array}\right.}.$$

(ii) Montrons que U est un endomorphisme de E. Pour ce faire, soient f_1, f_2 des éléments de E et soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Comme f_1, f_2 sont continues et bornées sur I, la fonction $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ est continue et bornée sur I. De plus, on obtient par linéarité de l'intégrale que, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} U\left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\right)(x) &= e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} \left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\right)(t) dt \\ &= \alpha_1 e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f_1(t) dt + \alpha_2 e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f_2(t) dt \\ &= \alpha_1 U\left(f_1\right)(x) + \alpha_2 U\left(f_2\right)(x), \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $U\left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\right) = \alpha_1 U\left(f_1\right) + \alpha_2 U\left(f_2\right)$, et donc U est linéaire. De plus, pour tout $f \in E$, on sait d'après la question $(1)(a)(iv)$ que la fonction $U(f)$ est bornée sur I. Dès lors, comme f est continue sur I, la fonction $t \longmapsto e^{-at} f(t)$ est continue sur I comme produit de fonctions continues sur I. En particulier, la fonction $x \longmapsto \int_1^x e^{-at} f(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et donc continue) sur I comme primitive d'une fonction continue sur I. Or on voit d'après la relation de Chasles que, pour tout $x \in I$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt - \int_1^x e^{-at} f(t) dt.$$

En particulier, la fonction $x \longmapsto \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est continue sur I comme différence d'une constante et d'une fonction continue sur I. Par produit avec la fonction $x \longmapsto e^{-ax}$, il s'ensuit que la fonction $U(f)$ est continue sur I, et donc $U(f)$ appartient à E car $U(f)$ est aussi bornée sur I. En d'autres termes, l'application U envoie tout élément de E sur un élément de E, d'où l'on déduit que :

$$\boxed{U \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

(iii) Montrons que l'endomorphisme U est injectif. Pour ce faire, il suffit de vérifier que $\ker(U) = \{0\}$. Soit f un élément de E tel que $U(f) = 0$. Alors, cela signifie que, pour tout $x \in I$:

$$U(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = 0.$$

Comme $e^{ax} \neq 0$ pour tout $x \in I$, ceci entraine que, pour tout $x \in I$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = 0.$$

D'après la relation de Chasles, on obtient que, pour tout $x \in I$:

$$\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt - \int_1^x e^{-at} f(t) dt = 0.$$

Comme la fonction $x \longmapsto \int_1^x e^{-at} f(t) dt$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto e^{-ax} f(x)$ sur l'intervalle I, il s'ensuit par dérivation que $-e^{-ax} f(x) = 0$ pour tout $x \in I$, ce qui entraine que $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$, et donc $f = 0$. Par conséquent, on en déduit que $\ker(U) = \{0\}$ et :

$$\boxed{U \text{ est injectif.}}$$

(iv) On définit les puissances successives de U par $U^0 = \mathrm{Id_E}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $U^n = U^{n-1} \circ U$. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{“}\forall f \in E,\ \forall x \in I,\ U^{n+1}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt.\text{”}$$

Tout d'abord, on remarque par définition de U que, pour tout $f \in E$ et pour tout $x \in I$:

$$U^{0+1}(f)(x) = U(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^0}{0!} e^{-at} f(t) dt,$$

et donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons maintenant que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Fixons un élément f de E et posons $g = U(f)$. Comme U est un endomorphisme de E d'après les questions précédentes, on voit que g appartient à E. Dès lors, on obtient par hypothèse de récurrence que, pour tout $x \in I$:

$$U^{n+2}(f)(x) = U^{n+1}(U(f))(x) = U^{n+1}(g)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} g(t) dt.$$

Comme $g = U(f)$ est solution du problème (E_f), on voit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que, de plus $g' - ag + f = 0$ $(*)$. Fixons un réel $y \geq x$ et posons $u(t) = e^{-at}g(t)$ et $v(t) = \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ pour tout $t \in [x, y]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, y]$ et de plus, on a $u'(t) = -ae^{-at}g(t) + e^{-at}g'(t) = -e^{-at}f(t)$ et $v'(t) = \frac{(t-x)^n}{n!}$ pour tout $t \in [x, y]$. Par intégration par parties, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\int_x^y \frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}g(t)dt &= \int_x^y u(t)v'(t)dt \\
&= [u(t)v(t)]_x^y - \int_x^y u'(t)v(t)dt \\
&= \left[-e^{-at}\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_x^y + \int_x^y e^{-at}f(t)\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}dt \\
&= -e^{-ay}\frac{(y-x)^{n+1}}{(n+1)!} + 0 + \int_x^y e^{-at}f(t)\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}dt.
\end{aligned}$$

Comme $e^{-ay}(y-x)^{n+1}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$ par croissances comparées, on obtient par passage à la limite quand y tend vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus que, pour tout $x \in I$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}g(t)dt = \int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}dt.$$

En particulier, ceci nous donne que, pour tout $x \in I$:

$$U^{n+2}(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}g(t)dt = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}dt,$$

et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall f \in E,\ \ \forall x \in I,\ \ U^{n+1}(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)dt.}$$

(c) *Cas des fonctions exponentielles.*

(i) Pour k un nombre réel positif et f_k la fonction $x \longmapsto e^{-kx}$, explicitons $U(f_k)$. Comme $k \geq 0$ et que $a > 0$, on voit que $k + a > 0$. Dès lors, on trouve que, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
U(f_k)(x) &= e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}e^{-kt}dt \\
&= e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-(a+k)t}dt \\
&= e^{ax}\lim_{y\to+\infty}\left[-\frac{1}{a+k}e^{-(a+k)t}\right]_x^y \\
&= e^{ax}\frac{1}{a+k}e^{-(a+k)x} \quad = \quad \frac{1}{a+k}e^{-kx}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $k \geq 0$:

$$\boxed{U(f_k) = \frac{1}{a+k}f_k.}$$

(ii) Montrons que, pour tout réel $\lambda \in]0, \frac{1}{a}]$, on a $\ker(U - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$. Fixons un réel $\lambda \in]0, \frac{1}{a}]$ et posons $k = \frac{1}{\lambda} - a$. Comme λ appartient à $]0, \frac{1}{a}]$, on voit que $\frac{1}{\lambda} \geq a$, et donc $k \geq 0$. De plus, d'après la question précédente, on trouve que :

$$U(f_k) = \frac{1}{a+k}f_k = \frac{1}{a+\frac{1}{\lambda}-a}f_k = \lambda f_k.$$

En particulier, ceci nous donne que $(U-\lambda \mathrm{Id}_E)(f_k) = U(f_k) - \lambda f_k = 0$. Comme la fonction f_k est non identiquement nulle sur I, il s'ensuit que $\ker(U-\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \neq \{0\}$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall \lambda \in \left]0, \frac{1}{a}\right], \ \ker(U-\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \neq \{0\}.}$$

(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, explicitons tout d'abord $U^n(f_k)$. D'après la question $(1)(c)(i)$, on sait que $U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k$. Montrons alors par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{“} U^n(f_k) = \left(\frac{1}{a+k}\right)^n f_k.\text{”}$$

Pour $n=0$, on constate que $U^0(f_k) = f_k = \left(\frac{1}{a+k}\right)^0 f_k$, et donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons maintenant que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que $U^n(f_k) = \left(\frac{1}{a+k}\right)^n f_k$, ce qui nous donne par linéarité de U que :

$$U^{n+1}(f_k) = U\left[\left(\frac{1}{a+k}\right)^n f_k\right] = \left(\frac{1}{a+k}\right)^n U(f_k) = \left(\frac{1}{a+k}\right)^n \frac{1}{a+k} f_k = \left(\frac{1}{a+k}\right)^{n+1} f_k,$$

et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \ U^n(f_k) = \left(\frac{1}{a+k}\right)^n f_k.}$$

A présent, pour tout $x \in I$, précisons $\lim_{n\to+\infty} [U^n(f_k)](x)$. D'après les propriétés des limites des suites géométriques, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} [U^n(f_k)](x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a+k>1 \\ e^{-kx} & \text{si } a+k=1 \\ +\infty & \text{si } a+k<1 \end{cases}.}$$

(d) *Cas des fonctions sinus et cosinus.*

Dans cet exemple seulement, on supposera que $a=1$.

(i) Explicitons $U(\sin)$ et $U(\cos)$. Pour tout $x \in I$, on voit que :

$$U(\sin)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\sin(t)dt.$$

Fixons un réel $y \geq x$ et posons $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -\cos(t)$ pour tout $t \in [x,y]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,y]$ et de plus, on a $u'(t) = -e^{-t}$ et $v'(t) = \sin(t)$ pour tout $t \in [x,y]$. Par intégration par parties, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\int_x^y e^{-t}\sin(t)dt &= \int_x^y u(t)v'(t)dt \\
&= [u(t)v(t)]_x^y - \int_x^y u'(t)v(t)dt \\
&= \left[-e^{-t}\cos(t)\right]_x^y - \int_x^y e^{-t}\cos(t)dt \\
&= -e^{-y}\cos(y) + e^{-x}\cos(x) - \int_x^y e^{-t}\cos(t)dt.
\end{aligned}$$

Posons maintenant $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = \sin(t)$ pour tout $t \in [x,y]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,y]$ et de plus, on a $u'(t) = -e^{-t}$ et $v'(t) = \cos(t)$ pour tout $t \in [x,y]$. De nouveau par intégration par parties, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\int_x^y e^{-t}\sin(t)dt &= -e^{-y}\cos(y) + e^{-x}\cos(x) - \left(\left[e^{-t}\sin(t)\right]_x^y - \int_x^y -\sin(t)\,e^{-t}dt\right) \\
&= -e^{-y}\cos(a) + e^{-x}\cos(x) - e^{-y}\sin(y) + e^{-x}\sin(x) - \int_x^y e^{-t}\sin(t)dt.
\end{aligned}$$

En particulier, ceci nous donne que $2\int_x^y e^{-t}\sin(t)dt = -e^{-y}\cos(y) + e^{-x}\cos(x) - e^{-y}\sin(y) + e^{-x}\sin(x)$, et donc :

$$\int_x^y e^{-t}\sin(t)dt = \frac{1}{2}\left[-e^{-y}\cos(y) + e^{-x}\cos(x) - e^{-y}\sin(y) + e^{-x}\sin(x)\right].$$

Comme les fonctions cos et sin sont bornées sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $t \longmapsto e^{-t}$ tend vers 0 en $+\infty$, on voit que $e^{-y}\cos(y)$ et $e^{-y}\sin(y)$ tendent vers 0 quand y tend vers $+\infty$. Dès lors, il s'ensuit par passage à la limite quand y tend vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus que :

$$\int_x^{+\infty} e^{-t}\sin(t)dt = \frac{1}{2}\left[e^{-x}\cos(x) + e^{-x}\sin(x)\right].$$

En particulier, ceci entraine que, pour tout $x \in I$:

$$U(\sin)(x) = e^x \times \frac{1}{2}\left[e^{-x}\cos(x) + e^{-x}\sin(x)\right] = \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{U(\sin) = \frac{1}{2}(\cos + \sin).}$$

Par des calculs analogues, on trouve aussi que :

$$\boxed{U(\cos) = \frac{1}{2}(\cos - \sin).}$$

(ii) Montrons tout d'abord que le sous-espace P de E engendré par les fonctions sin et cos est stable par U. Pour ce faire, on considère un élément f de P. Par définition, il existe des réels α, β tels que $f = \alpha\sin + \beta\cos$. Comme U est linéaire d'après la question $(1)(b)(ii)$, on trouve d'après la question précédente que :

$$\begin{aligned} U(f) &= U(\alpha\sin + \beta\cos) \\ &= \alpha U(\sin) + \beta U(\cos) \\ &= \alpha \times \frac{1}{2}(\cos + \sin) + \beta \times \frac{1}{2}(\cos - \sin) \\ &= \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\sin + \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos, \end{aligned}$$

et donc $U(f)$ appartient à P. Comme ceci est vrai pour tout $f \in P$, on en déduit que :

$$\boxed{P \text{ est stable par } U.}$$

A présent, montrons que $(\sin, \cos)$ est une base de P. Comme P est le sous-espace vectoriel engendré par sin et cos, la famille $(\sin, \cos)$ est génératrice dans P. De plus, pour tous réels a, b tels que $a\sin + b\cos = 0$, on on constate en évaluant cette relation en $x = 0$ et en $x = \frac{\pi}{2}$ que :

$$a\sin(0) + b\cos(0) = b = 0 \quad \text{et} \quad a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + b\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = a = 0,$$

d'où il s'ensuit que $a = b = 0$, et donc la famille $(\sin, \cos)$ est libre. Par conséquent :

$$\boxed{(\sin, \cos) \text{ est une base de } P.}$$

Enfin, écrivons la matrice M de l'endomorphisme $U_P : P \longrightarrow P,\ f \longmapsto U(f)$ dans la base $(\sin, \cos)$. D'après la question précédente, on sait que :

$$U(\sin) = \frac{1}{2}(\sin + \cos) \quad \text{et} \quad U(\cos) = \frac{1}{2}(-\sin + \cos).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(iii) Calculons M^2, M^3, M^4. Par des calculs simples, on trouve que :

$$M^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Dès lors, ceci nous donne que :

$$M^3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}.$$

Enfin, on obtient avec les calculs précédents que :

$$M^4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix} = \frac{-1}{4}I_2.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{M^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \quad M^3 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}, \quad M^4 = \frac{-1}{4}I_2.}$$

A présent, explicitons M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En multipliant la dernière relation ci-dessus par M^n, on voit que $M^{n+4} = \frac{-1}{4}M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dès lors, il est facile de vérifier par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{M^{4n} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n I, \quad M^{4n+1} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n M, \quad M^{4n+2} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n M^2, \quad M^{4n+3} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n M^3.}$$

Enfin, précisons la limite des coefficients de M^n lorsque n tend vers l'infini. D'après les résultats précédents et comme tous les coefficients de I, M, M^2, M^3 sont majorés en valeur absolue par $\frac{1}{2}$, on voit que tous les coefficients de $M^{4n}, M^{4n+1}, M^{4n+2}, M^{4n+3}$ sont majorés en valeur absolue par $\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, tous les coefficients de M^n sont majorés en valeur absolue par $\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^{\lfloor n/4 \rfloor}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $0 \leq \frac{1}{4} < 1$, la suite géométrique $((\frac{1}{4})^n)$ tend vers 0. Par encadrement, on en déduit que :

$$\boxed{\text{tous les coefficients de } M^n \text{ tendent vers 0 quand } n \text{ tend vers l'infini.}}$$

(e) *Une autre famille de fonctions.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction φ_n de E définie par $\varphi_n : x \longmapsto e^{-x}x^n$, et on note ψ_n la fonction $U(\varphi_n)$.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établissons une relation entre $\psi_n, \varphi_n, \psi_{n-1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on voit que :

$$\psi_n(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}e^{-t}t^n dt = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-(1+a)t}t^n dt.$$

Fixons un réel $y \geq x$ et posons $u(t) = -\frac{1}{1+a}e^{-(1+a)t}$ et $v(t) = t^n$ pour tout $t \in [x, y]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, y]$ et de plus, on a $u'(t) = e^{-(a+1)t}$ et $v'(t) = nt^{n-1}$ pour tout $t \in [x, y]$. Par intégration par parties, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\int_x^y e^{-(1+a)t}t^n dt &= \int_x^y u'(t)v(t)dt \\
&= [u(t)v(t)]_x^y - \int_x^y u(t)v'(t)dt \\
&= \left[-\frac{1}{1+a}e^{-(1+a)t}t^n\right]_x^y - \int_x^y -\frac{1}{1+a}e^{-(1+a)t}nt^{n-1}dt \\
&= -\frac{1}{1+a}e^{-2y}y^n + \frac{1}{1+a}e^{-(1+a)x}x^n + \frac{n}{1+a}\int_x^y e^{-(1+a)t}t^{n-1}dt.
\end{aligned}$$

Comme $e^{-(1+a)y}y^n$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$ par croissances comparées, on obtient par passage à la limite quand y tend vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus que :

$$\int_x^{+\infty} e^{-(1+a)t}t^n dt = \frac{1}{1+a}e^{-(1+a)x}x^n + \frac{n}{1+a}\int_x^{+\infty} e^{-(1+a)t}t^{n-1}dt.$$

Par produit avec l'exponentielle, il s'ensuit que, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}\psi_n(x) &= e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-(1+a)t}t^n dt \\ &= \frac{1}{1+a}e^{-x}x^n + \frac{n}{1+a}e^x\int_x^{+\infty} e^{-(1+a)t}t^{n-1}dt \\ &= \frac{1}{1+a}e^{-x}x^n + \frac{n}{1+a}\psi_{n-1}(x).\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\psi_n = \frac{1}{1+a}\varphi_n + \frac{n}{1+a}\psi_{n-1}.}$$

(ii) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrons tout d'abord que le sous espace F_p de E engendré par $(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_p)$ est stable par U. Pour ce faire, on commence par vérifier par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{“}U(\varphi_n) \text{ est combinaison linéaire de } \varphi_0, ..., \varphi_n.\text{”}$$

Tout d'abord, on sait d'après les questions précédentes que $U(\varphi_0) = U(f_1) = \frac{1}{1+a}f_1 = \frac{1}{1+a}\varphi_0$, ce qui entraine que $U(\varphi_0)$ est combinaison linéaire de φ_0, et donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons maintenant que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. D'après la question précédente, on sait que :

$$U(\varphi_{n+1}) = \psi_{n+1} = \frac{1}{2}\varphi_{n+1} + \frac{n+1}{2}\psi_n = \frac{1}{2}\varphi_{n+1} + \frac{n+1}{2}U(\varphi_n).$$

Comme $U(\varphi_n)$ est combinaison linéaire de $\varphi_0, ..., \varphi_n$ par hypothèse de récurrence, il s'ensuit d'après l'égalité ci-dessus que $U(\varphi_{n+1})$ est combinaison linéaire de $\varphi_0, ..., \varphi_n, \varphi_{n+1}$, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ U(\varphi_n) \text{ est combinaison linéaire de } \varphi_0, ..., \varphi_n.}$$

A partir de là, considérons un élément f de F_p. Par définition, il existe des réels $\alpha_0, ..., \alpha_p$ tels que $f = \sum_{i=0}^p \alpha_i\varphi_i$. Par linéarité de U, on trouve que $U(f) = \sum_{i=0}^p \alpha_i U(\varphi_i)$. Comme chaque $U(\varphi_i)$ est combinaison linéaire de $\varphi_0, ..., \varphi_i$, il est combinaison linéaire de $\varphi_0, ..., \varphi_p$ (vu que $i \leq p$), et donc il appartient à F_p. Comme F_p est un espace vectoriel, il s'ensuit que la combinaison linéaire $U(f) = \sum_{i=0}^p \alpha_i U(\varphi_i)$ appartient à F_p. Mais comme ceci est vrai pour tout $f \in F_p$, on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{F_p \text{ est stable par } U.}$$

A présent, montrons que F_p admet pour base $(\varphi_0, ..., \varphi_p)$. Comme F_p est engendré par $\varphi_0, ..., \varphi_p$, la famille $(\varphi_0, ..., \varphi_p)$ est génératrice dans F_p. Reste à vérifier que cette famille est libre. Pour ce faire, considérons des réels $\alpha_0, ..., \alpha_p$ tels que $\sum_{i=0}^p \alpha_i\varphi_i = 0$. Alors on a pour tout $x \in I$:

$$\sum_{i=0}^p \alpha_i\varphi_i(x) = \sum_{i=0}^p \alpha_i x^i e^{-x} = 0.$$

Par multiplication avec l'exponentielle, on trouve que, pour tout $x \in I$:

$$\sum_{i=0}^p \alpha_i x^i = 0.$$

En particulier, le polynôme $x \longmapsto \sum_{i=0}^p \alpha_i x^i$ admet une infinité de racines, à savoir tous les éléments de I, ce qui entraine qu'il est nul, et donc $\alpha_0 = ... = \alpha_p = 0$. Dès lors, la famille $(\varphi_0, ..., \varphi_p)$ est libre, d'où l'on déduit que :

$$\boxed{(\varphi_0, ..., \varphi_p) \text{ est une base de } F_p}.$$

(iii) On prend ici $p = 2$. Ecrivons tout d'abord la matrice T_2 de l'endomorphisme $U_2 : F_2 \longrightarrow F_2,\ f \longmapsto U(f)$ dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$. Comme $\varphi_0 = f_1$ par définition, on voit d'après les questions précédentes que $U(\varphi_0) = U(f_1) = \frac{1}{1+a}f_1 = \frac{1}{1+a}\varphi_0$, et donc :

$$U(\varphi_0) = \frac{1}{1+a}\varphi_0 + 0 \times \varphi_1 + 0 \times \varphi_2.$$

D'après la relation de la question $(1)(e)(i)$, on trouve que :

$$\begin{aligned} U(\varphi_1) &= \frac{1}{1+a}\varphi_1 + \frac{1}{1+a}U(\varphi_0) \\ &= \frac{1}{1+a}\varphi_1 + \frac{1}{1+a} \times \frac{1}{1+a}\varphi_0 \\ &= \frac{1}{(1+a)^2}\varphi_0 + \frac{1}{1+a}\varphi_1 + 0 \times \varphi_2. \end{aligned}$$

Partant de là, on obtient aussi que :

$$\begin{aligned} U(\varphi_2) &= \frac{1}{1+a}\varphi_2 + \frac{2}{1+a}U(\varphi_1) \\ &= \frac{1}{1+a}\varphi_2 + \frac{2}{1+a}\left[\frac{1}{(1+a)^2}\varphi_0 + \frac{1}{1+a}\varphi_1\right] \\ &= \frac{2}{(1+a)^3}\varphi_0 + \frac{2}{(1+a)^2}\varphi_1 + \frac{1}{1+a}\varphi_2. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{T_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 & 2\alpha^3 \\ 0 & \alpha & 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha = \frac{1}{1+a}.}$$

A présent, calculons T_2^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, on commence par écrire que :

$$T_2 = \alpha I + N \quad \text{avec} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 & 2\alpha^3 \\ 0 & 0 & 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par des calculs simples, on trouve que :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\alpha^4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^3 = 0.$$

En particulier, ceci nous donne que, pour tout $k \geq 3$, on a $N^k = N^{k-3} \times N^3 = N^{k-3} \times 0 = 0$. Comme αI et N commutent, on obtient d'après la formule du binôme que, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} T_2^n &= (\alpha I + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \alpha^{n-k} I^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k \alpha^{n-k} I^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} N^0 \alpha^{n-0} I^{n-0} + \binom{n}{1} N^1 \alpha^{n-1} I^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 \alpha^{n-2} I^{n-2} \\ &= \alpha^n I + n\alpha^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2} N^2. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier par le calcul que cette formule est encore valide pour $n = 0$ et $n = 1$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{T_2^n = \alpha^n I + n\alpha^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2} N^2.}$$

Enfin, précisons la limite des coefficients de T_2^n lorsque n tend vers l'infini. D'après le résultat ci-dessus, on voit que tous les coefficients de T_2^n sont des combinaisons linéaires des termes généraux des suites $(\alpha^n), (n\alpha^{n-1}), (n^2\alpha^{n-2})$. Comme $\alpha = \frac{1}{1+a}$ et que $a > 0$, on obtient que

$0 < \alpha < 1$, et donc ces trois suites convergent vers 0 par croissances comparées. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{tous les coefficients de } T_2^n \text{ tendent vers 0 quand } n \text{ tend vers l'infini.}}$$

(f) *Une autre expression de $U(f)$.*

Soit $f \in E$. Montrons que, pour tout $x \in I$, on a :

$$U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt.$$

Pour ce faire, on pose $u = x + t$ pour tout $t \geq 0$. Alors la fonction u est bijective de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $[x, +\infty[$ et de plus, on a $du = dt$, u tend vers x quand t tend vers 0 et u tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Par changement de variables dans l'intégrale de droite ci-dessus, on trouve que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt = \int_x^{+\infty} e^{-a(u-x)} f(u) du = \int_x^{+\infty} e^{ax} e^{-au} f(u) du.$$

Par linéarité de l'intégrale, il s'ensuit que, pour tout $x \in I$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-au} f(u) du = U(f)(x).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $f \in E$ et pour tout $x \in I$:

$$\boxed{U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt.}$$

(g) *Positivité de U.*

(i) Pour tout $f \in E$, montrons que : $|U(f)| \leq U(|f|)$. D'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales, on trouve que, pour tout $x \in I$ (vu que toutes les intégrales ci-dessous convergent) :

$$|U(f)(x)| = \left| e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt \right| \leq e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} |f(t)| dt = U(|f|)(x).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $f \in E$:

$$\boxed{|U(f)| \leq U(|f|).}$$

On considère maintenant un élément φ de E à valeurs positives et l'on pose $\psi = U(\varphi)$.

(ii) Montrons que ψ est à valeurs positives. Comme φ est positive sur I, on obtient d'après la question (1)(f) et par positivité de l'intégrale que, pour tout $x \in I$:

$$\psi(x) = U(\varphi)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt \geq 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\psi \text{ est à valeurs positives.}}$$

(iii) On suppose que φ est décroissante. Montrons tout d'abord que $a\psi \leq \varphi$. D'après les résultats sur les intégrales exponentielles, on sait que $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge et vaut $\frac{1}{a}$. En particulier, on voit par linéarité de l'intégrale que, pour tout $x \in I$:

$$\varphi(x) = a\varphi(x) \times \frac{1}{a} = a\varphi(x) \int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \int_0^{+\infty} a e^{-at} \varphi(x) dt.$$

Comme φ est décroissante, on voit que $\varphi(x+t) \leq \varphi(x)$ pour tout $t \geq 0$. Dès lors, on obtient par croissance et linéarité de l'intégrale et d'après la question (1)(f) que, pour tout $x \in I$:

$$a\psi(x) = aU(\varphi)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} a\varphi(x+t) dt \leq \int_0^{+\infty} a e^{-at} \varphi(x) dt = \varphi(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{a\psi \leq \varphi.}$$

A présent, montrons que ψ est décroissante. Pour ce faire, fixons deux éléments x, y de I tels que $x \leq y$. Alors on voit que $x + t \leq y + t$ pour tout $t \geq 0$, et donc $\varphi(x+t) \geq \varphi(y+t)$ pour

tout $t \geq 0$ vu que φ est décroissante. Dès lors, on obtient par croissance de l'intégrale et d'après la question $(1)(f)$ que :

$$\psi(x) = U(\varphi)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at}\varphi(x+t)dt \geq \int_0^{+\infty} e^{-at}\varphi(y+t)dt = U(\varphi)(y) = \psi(y).$$

Comme $\psi(x) \geq \psi(y)$ pour tous $x, y \in I$ tels que $x \geq y$, on en déduit que :

$$\boxed{\psi \text{ est décroissante sur } I.}$$

(h) *Commutation de U avec la dérivation.*

On note $E_1 = \left\{f \in E \cap \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \ / \ f' \text{ bornée sur } I\right\}$ et D l'opérateur de dérivation qui, à tout élément de E_1, associe sa dérivée.

(i) Pour tout $f \in E_1$, montrons, en utilisant la question $(1)(f)$, que : $aU(f) = f + U(f')$. Pour ce faire, fixons un élément f de E_1 et un réel $x \in I$. D'après la question $(1)(f)$, on voit que :

$$U(f')(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at}f'(t+x)dt.$$

Fixons aussi un réel $y \geq 0$ et posons $u(t) = f(x+t)$ et $v(t) = e^{-at}$ pour tout $t \in [0,y]$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,y]$, les fonctions u et v le sont aussi et de plus, on a $u'(t) = f'(x+t)$ et $v'(t) = -ae^{-at}$ pour tout $t \in [0,y]$. Dès lors, on obtient par intégration par parties que :

$$\begin{aligned}
\int_0^y e^{-at}f'(t+x)dt &= \int_0^y u'(t)v(t)dt \\
&= [u(t)v(t)]_0^y - \int_0^y u(t)v'(t)dt \\
&= \left[e^{-at}f(x+t)\right]_0^y - \int_0^y ae^{-at}f(x+t)dt \\
&= e^{-ay}f(x+y) - f(x) + a\int_0^y e^{-at}f(x+t)dt.
\end{aligned}$$

Comme la fonction f est bornée sur I et que e^{-ay} tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$, on voit que $f(x+y)e^{-ay}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$. En particulier, on trouve par passage à la limite quand y tend vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus que :

$$U(f')(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at}f'(t+x)dt = -f(x) + a\int_0^{+\infty} e^{-at}f(x+t)dt = -f(x) + aU(f)(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{aU(f) = f + U(f').}$$

(ii) Montrons que, pour tout élément f de E_1, on a : $D(U(f)) = U(D(f))$. Comme $U(f)$ est solution du problème (E_f), on voit que $U(f)' - aU(f) + f = 0$. Dès lors, on trouve avec la question précédente que :

$$D(U(f)) = (U(f))' = aU(f) - f = f + U(f') - f = U(f') = U(D(f)).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $f \in E_1$:

$$\boxed{D(U(f)) = U(D(f)).}$$

(iii) Pour toute fonction f de E_1 à valeurs positives et décroissante, retrouvons le résultat de la question $(1)(g)(iii)$, c'est-à-dire : $U(f)$ est décroissante. Comme f est décroissante, on voit que $f' \leq 0$ sur I. Dès lors, on obtient avec la question précédente et la question $(1)(g)(ii)$ que $U(f)' = D(U(f)) = U(D(f)) = U(f') \leq 0$ sur I, et donc :

$$\boxed{U(f) \text{ est décroissante.}}$$

(2) **Comportement asymptotique de $U(f)$ au voisinage de $+\infty$:**

Dans cette partie, on traite ici quelques cas fondamentaux, en partant d'exemples de fonctions f pour lesquelles on peut connaître le comportement de $g = U(f)$ au voisinage de $+\infty$.

(a) *Résultats préliminaires.*

On considère ici α et β deux fonctions à valeurs réelles, continues sur I. On suppose que, pour tout $x \in I$, $\beta(x) > 0$ et que $\int_1^{+\infty} \beta(t)dt$ converge.

(i) On suppose ici que $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\beta(x))$ et on se propose de montrer que :

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t)dt\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Montrons tout d'abord que : $\exists A > 0$, $\forall x \geq A$, $\left|\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt\right| \leq \varepsilon \left(\int_x^{+\infty} \beta(t)dt\right)$. Pour ce faire, on revient à la définition axiomatique de la limite. Comme $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\beta(x))$, le quotient $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad \forall t \geq A, \quad \left|\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}\right| \leq \varepsilon.$$

Fixons un réel A qui convient pour le réel $\varepsilon > 0$ en question. Comme la fonction β est positive, on voit que $|\alpha(t)| \leq \varepsilon\beta(t)$ pour tout $t \geq A$. En particulier, on obtient que, pour tout $x \geq A$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt$ est absolument convergente (et donc convergente) d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. De plus, d'après l'inégalité triangulaire et par croissance de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \geq A$:

$$\left|\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt\right| \leq \int_x^{+\infty} |\alpha(t)|dt \leq \int_x^{+\infty} \varepsilon\beta(t)dt = \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t)dt.$$

En particulier, ceci nous donne que :

$$\boxed{\exists A > 0, \ \ \forall x \geq A, \ \ \left|\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt\right| \leq \varepsilon \left(\int_x^{+\infty} \beta(t)dt\right).}$$

En d'autres termes, on vient de montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists A > 0, \ \ \forall x \geq A, \ \ \left|\frac{\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt}{\int_x^{+\infty} \beta(t)dt}\right| \leq \varepsilon.$$

Dès lors, le quotient ci-dessus tend bien vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et donc :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t)dt\right).}$$

(ii) On suppose maintenant que $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \beta(x)$. Montrons que $\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \beta(t)dt$. Comme $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \beta(x)$, on voit que $\alpha(x) - \beta(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\beta(x))$. D'après la question précédente et par linéarité de l'intégrale, il s'ensuit que :

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt - \int_x^{+\infty} \beta(t)dt = \int_x^{+\infty} (\alpha - \beta)(t)dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t)dt\right).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \alpha(t)dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \beta(t)dt.}$$

(b) *Cas des fonctions admettant une limite en $+\infty$.*

Si f est un élément de E admettant une limite finie b en $+\infty$, montrons que $g = U(f)$ admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera. Pour ce faire, supposons tout d'abord que $b = 0$. Alors cela signifie que la fonction f tend vers 0 en $+\infty$, et donc $f(t) \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$. Par produit, on voit que $f(t)e^{-at} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{-at})$. Comme la fonction $t \longmapsto e^{-at}$ est strictement positive et que l'intégrale exponentielle $\int_1^{+\infty} e^{-at}dt$ converge, on obtient d'après la question $(2)(a)(i)$ que :

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-at}dt\right).$$

Comme à la question (1)(c)(i), on trouve que $\int_x^{+\infty} e^{-at}dt = \frac{e^{-ax}}{a}$ pour tout $x \geq 1$, et donc :

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-ax}\right).$$

Par produit avec l'exponentielle, il s'ensuit que :

$$U(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{ax}\times e^{-ax}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o(1),$$

ce qui signifie exactement que $U(f)(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{si } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \text{ alors } \lim_{x\to+\infty} U(f)(x) = 0.}$$

Supposons maintenant que f tend vers b en $+\infty$. Alors la fonction $f-b$ tend vers 0 en $+\infty$, et donc $U(f-b)$ tend vers 0 en $+\infty$ d'après ce qui précède. Comme l'application U est linéaire et que $U(1) = \frac{1}{a}$ d'après les questions (1)(b)(i) et (1)(b)(ii), il s'ensuit que $U(f-b) = U(f) - \frac{b}{a}$ tend vers 0 en $+\infty$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{si } \lim_{x\to+\infty} f(x) = b, \text{ alors } \lim_{x\to+\infty} U(f)(x) = \frac{b}{a}.}$$

(c) *Cas des fonctions puissances.*

Dans cette question et la suivante, on désigne par ω un réel > 0, par f_ω la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\omega}$ et l'on pose $g_\omega = U(f_\omega)$.

(i) Montrons tout d'abord que $g_\omega(x) = \dfrac{f_\omega(x)}{a} - \dfrac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x)$. Pour ce faire, fixons un réel $y \geq 0$ et posons $u(t) = \frac{1}{(t+x)^\omega}$ et $v(t) = -\frac{1}{a}e^{-at}$ pour tout $t \in [0,y]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,y]$ et de plus, on a $u'(t) = -\frac{\omega}{(t+x)^{\omega+1}}$ et $v'(t) = e^{-at}$ pour tout $t \in [0,y]$. Dès lors, on obtient par intégration par parties que :

$$\begin{aligned}
\int_0^y e^{-at}\frac{1}{(t+x)^\omega}dt &= \int_0^y u(t)v'(t)dt \\
&= [u(t)v(t)]_0^y - \int_0^y u'(t)v(t)dt \\
&= \left[-\frac{1}{a}e^{-at}\frac{1}{(t+x)^\omega}\right]_0^y - \int_0^y -\frac{\omega}{(t+x)^{\omega+1}} \times -\frac{1}{a}e^{-at}dt \\
&= -\frac{1}{a}e^{-ay}\frac{1}{(y+x)^\omega} + \frac{1}{a}\frac{1}{x^\omega} - \int_0^y \frac{\omega}{a(t+x)^{\omega+1}}e^{-at}dt.
\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{(y+x)^\omega}e^{-ay}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$ (vu que $\omega > 0$), on trouve par passage à la limite dans l'égalité ci-dessus et par linéarité de l'intégrale que :

$$\begin{aligned}
U(f_\omega)(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-at}\frac{1}{(t+x)^\omega}dt \\
&= \frac{1}{ax^\omega} - \int_0^{+\infty} \frac{\omega}{a(t+x)^{\omega+1}}e^{-at}dt \\
&= \frac{f_\omega(x)}{a} - \frac{\omega}{a}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^{\omega+1}}e^{-at}dt \\
&= \frac{f_\omega(x)}{a} - \frac{\omega}{a}U(f_\omega)(x)
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit par définition de g_ω que :

$$\boxed{g_\omega(x) = \frac{f_\omega(x)}{a} - \frac{\omega}{a}g_{\omega+1}(x).}$$

A présent, montrons que $g_\omega(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{f_\omega(x)}{a}$. Comme $f_{\omega+1}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(f_\omega(x))$ et que f_ω est >0 sur I, on obtient d'après la question $(2)(a)(i)$ que :

$$g_{\omega+1}(x) = U(f_{\omega+1})(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(U(f_\omega)(x)) \underset{x\to+\infty}{=} o(g_\omega(x)).$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$\frac{f_\omega(x)}{a} = g_\omega(x) + \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x) \underset{x\to+\infty}{=} g_\omega(x) + o(g_\omega(x)).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{g_\omega(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{f_\omega(x)}{a}.}$$

(ii) A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $g : t \longmapsto e^{-at}$, montrons que pour tout $x \in I$, on a :

$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k \cdot k!}(x^k - 1).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que la fonction $g : t \longmapsto e^{-at}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ et de plus, on a $g^{(n+1)}(t) = (-a)^{n+1} e^{-at}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, on a $|g^{(n+1)}(t)| \leq a^{n+1}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre n et à la fonction g sur l'intervalle $[0, t]$, on obtient que, pour tout $t > 0$:

$$\left| g(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} g^{(k)}(0) \right| \leq \frac{a^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En divisant le tout par t, on trouve que, pour tout $t > 0$:

$$\left| \frac{e^{-at}}{t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{k-1}}{k!} g^{(k)}(0) \right| \leq \frac{a^{n+1} t^n}{(n+1)!},$$

ce qui nous donne après simplification que, pour tout $t > 0$:

$$\left| \frac{e^{-at}}{t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!} \right| \leq \frac{a^{n+1} t^n}{(n+1)!}.$$

D'après l'inégalité triangulaire et par croissance de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} \left| \int_1^x \left(\frac{e^{-at}}{t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!} \right) dt \right| &\leq \int_1^x \left| \frac{e^{-at}}{t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!} \right| dt \\ &\leq \int_1^x \frac{a^{n+1} t^n}{(n+1)!} dt = \frac{a^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}(x^{n+1} - 1). \quad (*) \end{aligned}$$

Par ailleurs, on obtient par linéarité de l'intégrale que :

$$\begin{aligned} \int_1^x \left(\frac{e^{-at}}{t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!} \right) dt &= \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-a)^k}{k!} \int_1^x t^{k-1} dt \\ &= \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt - \ln(x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{a^k}{k.k!} \left(x^k - 1\right). \quad (**) \end{aligned}$$

En associant les relations $(*)$ et $(**)$, il s'ensuit que, pour tout $x \in I$:

$$\left| \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt - \ln(x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{a^k}{k.k!} \left(x^k - 1\right) \right| \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}(x^{n+1} - 1).$$

Comme le terme de droite ci-dessus tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ par croissances comparées, ceci entraine par encadrement que, pour tout $x \in I$:

$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt - \ln(x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{a^k}{k.k!} \left(x^k - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in I$:

$$\boxed{\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}dt = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{a^k}{k.k!}\left(x^k - 1\right).}$$

Par définition de g_1 et d'après la relation de Chasles, il s'ensuit que, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}dt \\ &= e^{ax}\left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}dt - \int_1^x \frac{e^{-at}}{t}dt\right) \\ &= e^{\alpha x}\left(-\ln(x) - \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{a^k}{k.k!}(x^k-1) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}dt\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in I$:

$$\boxed{g_1(x) = e^{ax}\left(-\ln(x) - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{a^k}{k.k!}(x^k-1) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}dt\right).}$$

(d) *Cas des fonctions comparables aux fonctions puissances f_ω.*
On note toujours f un élément de E et $g = U(f)$.

(i) Prouvons que, si f est négligeable devant f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est négligeable devant g_ω au voisinage de $+\infty$. Comme f est négligeable devant f_ω au voisinage de $+\infty$, on voit par produit que :

$$e^{-at}f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-at}f_\omega(t)\right).$$

Comme la fonction $t \longmapsto e^{-at}f_\omega(t)$ est > 0 sur I, on a d'après la question $(2)(a)(i)$ que :

$$\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-at}f_\omega(t)dt\right).$$

En particulier, ceci nous donne par produit que :

$$U(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f_\omega(t)dt\right) \underset{x\to+\infty}{=} o(U(f_\omega(x))).$$

Par conséquent, on en déduit par définition de g et g_ω que :

$$\boxed{g \text{ est négligeable devant } g_\omega \text{ au voisinage de } +\infty.}$$

(ii) Prouvons que, si f est équivalent à f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est équivalent à $\frac{f}{a}$ au voisinage de $+\infty$. Comme f est équivalente à f_ω au voisinage de $+\infty$, on voit par produit que :

$$e^{-at}f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-at}f_\omega(t).$$

Comme la fonction $t \longmapsto e^{-at}f_\omega(t)$ est > 0 sur I, on a d'après la question $(2)(a)(ii)$ que :

$$\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} e^{-at}f_\omega(t)dt.$$

En particulier, ceci nous donne par produit que :

$$U(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f_\omega(t)dt \underset{x\to+\infty}{\sim} U(f_\omega(x)).$$

Dès lors, il s'ensuit par définition de g et g_ω que les fonctions g et g_ω sont équivalentes au voisinage de $+\infty$. Mais comme g_ω et $\frac{1}{a}f_\omega$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ d'après la question $(2)(c)(ii)$ et que f et f_ω le sont par hypothèse, il s'ensuit que :

$$g_\omega(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{f_\omega(x)}{a} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{f(x)}{a}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{g \text{ est équivalent à } \frac{f}{a} \text{ au voisinage de } +\infty.}$$

(3) **Convergence absolue de $\int_1^{+\infty} U(f)$:**

Dans cette partie, on s'intéresse à la convergence de $\int_1^{+\infty} U(f)(t)dt$ dans le cas où $\int_1^{+\infty} |f(t)|\,dt$ est elle-même convergente. On note toujours $g = U(f)$.

(a) *Etudes d'exemples.*

(i) Pour tout réel $k > 0$ et $f_k : t \longmapsto e^{-kt}$, on pose $g_k = U(f_k)$. Vérifions que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g_k(t)dt$ est convergente. D'après la question $(1)(c)(i)$, on sait que $g_k = U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k$. Comme l'intégrale exponentielle $\int_1^{+\infty} f_k(t)dt = \int_1^{+\infty} e^{-kt}dt$ converge vu que $k > 0$, on en déduit par linéarité que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} g_k(t)dt \text{ est convergente.}}$$

(ii) Pour tout réel $\omega > 0$, on note encore $f_\omega : t \longmapsto \frac{1}{t^\omega}$ et $g_\omega = U(f_\omega)$. Déterminons pour quelles valeurs de ω l'intégrale $\int_1^{+\infty} g_\omega(t)dt$ est convergente. D'après la question $(2)(c)(ii)$, on sait que :

$$g_\omega(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{f_\omega(x)}{a} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{ax^\omega}.$$

Or, on sait aussi d'après le cours que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\omega}dt$ converge si et seulement si $\omega > 1$. Par linéarité, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{at^\omega}dt$ converge si et seulement si $\omega > 1$. Dès lors, on en déduit d'après le critère d'équivalence des intégrales de fonctions positives que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} g_\omega(t)dt \text{ converge si et seulement si } \omega > 1.}$$

(b) *Cas des fonctions positives.*

Dans cette question, on désigne par f un élément de E, à valeurs positives et tel que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente. On note $F : x \longmapsto \int_1^x f(t)dt$, $g = U(f)$ et $G : x \longmapsto \int_1^x g(t)dt$.

(i) Vérifions que $G' - aG = -F + g(1)$. Comme g est continue sur I, la fonction G est par définition la primitive de g sur I qui s'annule en 1. De même, comme f est continue sur I, la fonction F est la primitive de f sur I qui s'annule en 1. En particulier, les fonctions F et G sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et de plus, on a $F' = f$ et $G' = g$. Posons alors :

$$H = G' - aG + (F - g(1)) = g - aG + F - g(1).$$

Comme g est l'unique solution du problème (E_f) qui est bornée sur I, la fonction g est dérivable sur I. Dès lors, la fonction H est dérivable sur I comme combinaison linéaire de fonctions dérivables sur I et de plus, on a pour tout $x \in I$:

$$H'(x) = g'(x) - ag(x) + f(x) = 0,$$

vu que g est solution de (E_f). En particulier, la fonction H est constante sur l'intervalle I. Mais comme $F(1) = G(1) = 0$ par construction, on trouve que :

$$H(1) = g(1) - aG(1) + F(1) - g(1) = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que H est nulle sur I, et donc :

$$\boxed{G' - aG = -F + g(1).}$$

(ii) Justifions tout d'abord que F appartient à E. Comme F est une primitive de f sur I, la fonction F est dérivable (et donc continue) sur I. De plus, comme f est positive sur I par hypothèse, on voit que $F' = f \geq 0$, et donc F est croissante sur I. En outre, comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge par hypothèse, on obtient que :

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} f(t)dt.$$

En particulier, comme F est croissante sur I, il s'ensuit que, pour tout $x \in I$:

$$F(1) \leq F(x) \leq \int_1^{+\infty} f(t)dt,$$

et donc la fonction F est bornée. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{F \in E.}$$

A présent, montrons qu'il existe une constante réelle K telle que, pour tout $x \in I$, on a :

$$G(x) = Ke^{\alpha x} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}.$$

D'après la question précédente, on voit que la fonction G est solution de l'équation $\left(E_{F-g(1)}\right)$. Dès lors, d'après la question $(1)(a)(i)$, il existe un réel K_0 tel que, pour tout $x \in I$, on a :

$$G(x) = e^{ax}\left(K_0 - \int_1^x e^{-at}\left[F(t) - g(1)\right]dt\right).$$

Par linéarité de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} G(x) &= e^{ax}\left(K_0 - \int_1^x e^{-at}\left[F(t) - g(1)\right]dt\right) \\ &= e^{ax}\left(K_0 - \int_1^x e^{-at}F(t)dt + g(1)\int_1^x e^{-at}dt\right) \\ &= e^{ax}\left(K_0 - \int_1^x e^{-at}F(t)dt + g(1)\left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_1^x\right) \\ &= e^{ax}\left(K_0 - \int_1^x e^{-at}F(t)dt - \frac{g(1)}{a}e^{-ax} + \frac{g(1)}{a}e^{-a}\right). \end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles, il s'ensuit que, pour tout $x \in I$:

$$G(x) = e^{ax}\left(K_0 - \int_1^{+\infty} e^{-at}F(t)dt + \int_x^{+\infty} e^{-at}F(t)dt - \frac{g(1)}{a}e^{-ax} + \frac{g(1)}{a}e^{-a}\right).$$

Si l'on pose $K = K_0 - \int_1^{+\infty} e^{-at}F(t)dt + \frac{g(1)}{a}e^{-a}$, on on voit que, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} G(x) &= e^{ax}\left(K + \int_x^{+\infty} e^{-at}F(t)dt - \frac{g(1)}{a}e^{-ax}\right) \\ &= Ke^{ax} + e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}F(t)dt - \frac{g(1)}{a}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit par définition de $U(F)$ que, pour tout $x \in I$:

$$\boxed{G(x) = Ke^{ax} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}.}$$

(iii) Vérifions que la fonction $x \longmapsto \frac{G(x)}{x}$ est bornée sur I. Comme U est un endomorphisme de E d'après la question $(1)(b)(ii)$ et que $g = U(f)$, la fonction g est bornée sur I. Considérons alors un réel $M \geq 0$ tel que $|g(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$. D'après l'inégalité triangulaire et par croissance de l'intégrale, on obtient que, pour tout $x \in I$:

$$\left|\int_1^x g(t)dt\right| \leq \int_1^x |g(t)|\,dt \leq \int_1^x M dt = M(x-1).$$

En particulier, ceci nous donne que, pour tout $x \in I$:

$$\left|\frac{G(x)}{x}\right| \leq M\frac{(x-1)}{x} \leq M.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } x \longmapsto \frac{G(x)}{x} \text{ est bornée sur } I.}$$

(iv) Montrons que $K = 0$ et $G = U(F) - \frac{g(1)}{a}$. D'après la question $(3)(b)(ii)$, on a pour tout $x \in I$:

$$G(x) = Ke^{ax} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}.$$

Après division par x et réarrangement, ceci nous donne que, pour tout $x \in I$:

$$K\frac{e^{ax}}{x} = \frac{G(x)}{x} - \frac{[U(F)](x)}{x} + \frac{g(1)}{ax}.$$

Comme U est un endomorphisme de E d'après la question $(1)(b)(ii)$, la fonction $U(F)$ est bornée sur I. En particulier, il est facile de voir que les fonctions $x \longmapsto \frac{[U(F)](x)}{x}$ et $x \longmapsto \frac{g(1)}{ax}$

sont bornées sur I. Comme de plus la fonction $x \longmapsto \frac{G(x)}{x}$ est bornée sur I, on obtient avec l'égalité ci-dessus que la fonction $x \longmapsto K\frac{e^{ax}}{x}$ est bornée sur I comme combinaison linéaire de fonctions bornées sur I. Mais comme $a > 0$, l'expression $\frac{e^{ax}}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Dès lors, comme la fonction $x \longmapsto K\frac{e^{ax}}{x}$ est bornée sur I, il s'ensuit que $K = 0$, et donc $G = U(F) - \frac{g(1)}{a}$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{K = 0 \text{ et } G = U(F) - \frac{g(1)}{a}.}$$

(v) Montrons alors que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est convergente. Comme la fonction $U(F)$ est bornée sur I et que $G = U(F) - \frac{g(1)}{a}$ d'après la question précédente, la fonction G est bornée sur I. Dès lors, comme la fonction f est positive sur I par hypothèse, la fonction $g = U(f)$ est positive sur I d'après la question $(1)(g)(ii)$. En particulier, comme $G' = g$ par construction, la fonction G est croissante sur I. Mais comme la fonction G est bornée (et donc majorée) sur I, il s'ensuit que G admet une limite finie en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. En d'autres termes, la fonction $x \longmapsto \int_1^x g(t)dt$ admet une limite finie en $+\infty$, d'où l'on déduit que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} g(t)dt \text{ converge.}}$$

(c) *Cas général.*

Dans cette question, on désigne par f un élément de E tel que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge absolument. Montrons que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est absolument convergente. Comme f appartient à E, la fonction f est continue et bornée sur I. Dès lors, la fonction $|f|$ est continue et bornée sur I, et donc elle appartient à E. De plus, comme $|f|$ est positive sur I, on voit d'après la question précédente que l'intégrale $\int_1^{+\infty} U(|f|)(t)dt$ converge. Mais comme $|g| = |U(f)| \leq U(|f|)$ d'après la question $(1)(g)(i)$, il s'ensuit d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives que l'intégrale $\int_1^{+\infty} |g(t)|dt$ converge, et donc :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} g(t)dt \text{ converge absolument.}}$$