

EXERCICE 1

On définit la suite des polynômes de Tchebychev par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

On rappelle que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

1.(a) Expliciter T_2 et T_3 .

(b) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de T_n .

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos(x) \cos((n+1)x)$$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

3.(a) Montrer que pour tout couple $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente.

(b) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{aligned}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ce produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme associée.

(c) Montrer que si n et m sont deux entiers naturels distincts, alors $\int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx = 0$.

(d) Montrer que si n et m sont deux entiers naturels distincts, $\langle T_n, T_m \rangle = 0$.

Indication : On pourra procéder au changement de variable $t = \cos(x)$ après avoir justifié sa validité.

(e) Montrer que :

$$\|T_n\|^2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n \geq 1, \\ \pi & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

(f) En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

4. Soit n un entier non nul. On définit d_n la distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par :

$$d_n = \inf \left\{ \|X^n - P\|, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \right\}.$$

(a) Justifier que : $X^n = \sum_{k=0}^n \langle X^n, T_k \rangle \frac{T_k}{\|T_k\|^2}$.

(b) Montrer alors que : $d_n = \frac{|\langle X^n, T_n \rangle|}{\|T_n\|}$.

(c) Déterminer en particulier la valeur de d_2 .

EXERCICE 2

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geq 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{0,n} = u_n$.

Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n .

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

(a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante sous laquelle $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

On se place désormais sous cette condition.

(b) Pour tout entier $k \geq 2$, justifier que :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

(c) En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

(d) En déduire que :

$$R_{1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

(e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α , la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

(f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

2. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : u_n = \frac{1}{n^n}$.

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

(b) Montrer que, pour tout $k \geq 3$, $u_k \leq \frac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

(c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2, et que, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4 \cdot 3^n}$$

(d) Montrer que, pour tout $p \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

(e) La série $\sum_{n \geq 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

(a) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0.$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$, montrer que :

$$\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt.$$

(c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et que, pour tout $n \geq 0$:

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt.$$

(d) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geq 0$:

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt.$$

PROBLÈME

On étudie dans ce problème un processus temporel de comptage appelé **processus de Poisson**.

L'objectif de ce problème est d'étudier ce processus en partant de deux définitions différentes, qui se révéleront être équivalentes.

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Partie A - Définition par $X_1, X_2, \dots, X_n$.

On considère dans cette partie une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

avec la convention $S_0 = 0$.

Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note N_t la variable aléatoire égale à la plus grande valeur de n pour laquelle S_n est inférieure ou égale à t , c'est-à-dire :

$$N_t = \sup \{n \in \mathbb{N}, S_n \leq t\}.$$

Par convention, si l'ensemble écrit ci-dessus n'est pas fini, on pose : $N_t = -1$.

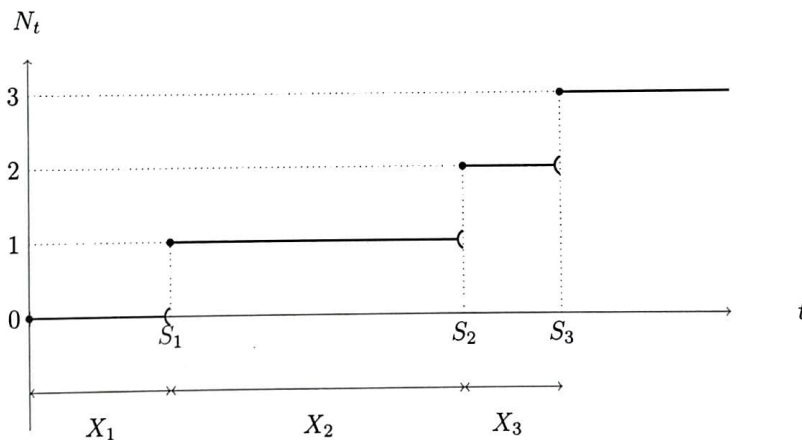


FIGURE 1 – Exemple de réalisation de N_t en fonction de t .

1. Pour tout réel t strictement positif, montrer que : $P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$.
2. Montrer qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ si et seulement si λX suit la loi γ de paramètre 1.
3. Pour tout entier n non nul, en déduire une densité de la variable aléatoire λS_n .
4. Pour tout réel t strictement positif et pour tout entier naturel n , comparer les événements $[N_t \geq n]$ et $[S_n \leq t]$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$:

$$P(N_t = n) = \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} du - \int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n!} e^{-u} du.$$

6. En intégrant par parties une des intégrales ci-dessus, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Quelle est la loi de N_t ?

7. On rappelle que l'instruction Scilab `grand(n,p,"exp",1/lambda)` renvoie une matrice à n lignes et p colonnes dont les coefficients sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre `lambda`.

On rappelle également que l'instruction Scilab `plot2d(x,y)` effectue un tracé qui relie les points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ si $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ et $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ sont deux vecteurs de même taille.

- (a) Écrire une fonction d'en-tête `function U = simulation_S(n,lambda)` renvoyant une réalisation de S_n .
- (b) Écrire une fonction d'en-tête `function V = simulation_N(t,lambda)` renvoyant une réalisation de N_t .
- (c) On a commencé à écrire une fonction `evolution_S` renvoyant toutes les valeurs $S_1, S_2, \dots, S_n$ tant que $S_n \leq t$. Compléter cette fonction.

```
function L = evolution_S(t,lambda)
    L = []
    S = grand(1,1,"exp",1/lambda)
    while .....
        L=[L,S]
        S = S + .....
    end
endfunction
```

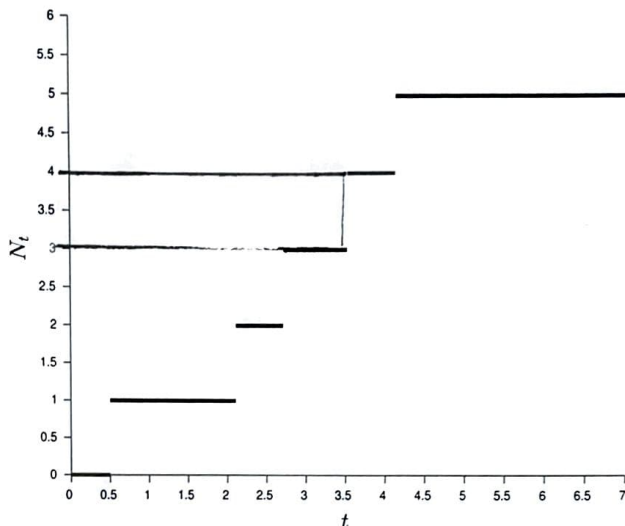
- (d) On a commencé à écrire un script Scilab ci-dessous. Dans ce script, on note $\mathbf{S} = [S_1, \dots, S_n]$ et on souhaite tracer l'évolution de N_t du temps 0 au temps S_n de la même manière que sur la figure 1.

```
function S = trace_N(t,lambda)
    S=evolution_S(T;lambda)
    n = length(S)
    plot2d([0,S(1)], [0,0])
    for i = 1:n-1
        .....
    end
endfunction
```

Par laquelle des instructions suivantes faut-il compléter la ligne manquante ?

- ☒ i) `plot2d([S(i),S(i+1)], [i,i])`
☒ ii) `plot2d([i,i+1], [S(i),S(i+1)])`
☐ iii) `plot2d([S(i-1),S(i)], [i,i])`
☒ iv) `plot2d([i,S(i+1)], [i,i])`

(e) Un·e étudiant·e exécute le script précédent pour $T = 7$ et $\lambda = 1$ et on obtient la figure suivante :



Que valent dans ce cas $N_{3.2}$ et $N_{5.5}$?

Donner une valeur approximative de S_2 et de X_4 .

Partie B - Définition par $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$

On rappelle que les parties de ce problème sont indépendantes.

Dans cette partie, on définit une famille de variables aléatoires $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(H_1) : $N_0 = 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $N_t(\Omega) \subset \mathbb{N}$;

(H_2) : pour tout $t > 0$, $P(N_t = 0) < 1$;

(H_3) : pour tous réels $h \geq 0$ et $t \geq 0$, la variable aléatoire $N_{t+h} - N_t$ est indépendante de la variable aléatoire N_t ; de plus, $N_{t+h} - N_t$ et N_h ont la même loi;

(H_4) : $P(N_h \geq 2) = o(h)$ lorsque h tend vers 0 par valeurs positives.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note :

$$p_n(t) = P(N_t = n).$$

8. Propriétés élémentaires.

(a) Que vaut $p_0(0)$?

(b) Montrer que le processus est croissant, c'est-à-dire que pour tous $t, h \in \mathbb{R}_+$:

$$P(N_{t+h} - N_t \geq 0) = 1.$$

9. Détermination de p_0 .

(a) En écrivant $N_{t+h} = N_t + (N_{t+h} - N_t)$, montrer que pour tout $t, h \in \mathbb{R}_+$:

$$p_0(t+h) = p_0(t)p_0(h).$$

(b) En déduire que la fonction p_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

- (c) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}_+$:

$$p_0(ns) = (p_0(s))^n.$$

En déduire que pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_0\left(\frac{m}{n}\right) = (p_0(1))^{m/n}.$$

On pourra poser $s = \frac{m}{n}$ et utiliser le début de la question.

- (d) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On admet qu'il existe deux suites $(u_n), (v_n)$ de nombres rationnels telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq t \leq v_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = t.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $p_0(1) = e^{-\lambda}$. Montrer que :

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

10. Loi de N_t .

Par la suite, $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$.

- (a) Donner le développement limité à l'ordre 1 de $p_0(h)$ lorsque h tend vers 0.
 (b) Après avoir justifié que $([N_h = 0], [N_h = 1], [N_h \geq 2])$ est un système complet d'événements, montrer que :

$$p_1(h) = \lambda h + o(h).$$

- (c) En écrivant $N_{t+h} = N_h + (N_{t+h} - N_h)$ et en utilisant le système complet d'événements introduit précédemment, montrer que

$$p_n(t+h) = p_0(h)p_n(t) + p_1(h)p_{n-1}(t) + o(h).$$

- (d) Déduire de cette dernière égalité que,

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t)) + o(1).$$

En déduire que p_n est dérivable en t et donner l'expression de $p'_n(t)$.

- (e) Pour tous n de $\mathbb{N}$ et t de $\mathbb{R}_+$, on pose $q_n(t) = e^{\lambda t} p_n(t)$.
 Justifier la dérivabilité de q_n , puis montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+, q'_n(t) = \lambda q_{n-1}(t).$$

- (f) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

- (g) Quelle est la loi de N_t ?

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n le premier instant t où N_t vaut n , c'est-à-dire :

$$S_n = \inf \{t \in \mathbb{R}_+, N_t = n\}.$$

- (a) Que vaut S_0 ? On le justifiera en revenant précisément à la définition donnée.
 (b) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Exprimer l'événement $[S_1 > t]$ en fonction de N_t .
 (c) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$P(S_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

- (d) Reconnaître la loi de S_1 .

- (e) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, N_t = \sup \{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leq t\}.$$