BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 297

Conception : EDHEC BS

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 5 mai 2020, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$\forall (x,y,z)\in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x\,\mathrm{e}^{x\left(y^2+z^2+1\right)}$$

1) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer le seul point critique A de f.

3) a) Calculer les valeurs des dérivées partielles d'ordre 2 de f en A.
   b) Former la hessienne de f au point A et vérifier qu'elle est diagonale. Montrer que f présente un minimum local en A. Préciser la valeur de ce minimum.

4) a) Montrer que, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)\geq x\,\mathrm{e}^x$.
   b) Que peut-on en déduire pour le minimum de f trouvé à la question 3b) ?

5) On souhaite étudier les extrema de f sous la contrainte linéaire (C) : $\begin{cases} x=1 \\ y+z=0 \end{cases}$. Montrer que, sous la contrainte (C), f présente un minimum global au point $(1,0,0)$. Quelle est sa valeur ?

6) On souhaite maintenant étudier les extrema de *f* sous la contrainte (C') : $x\left(y^2+z^2+1\right)=1$.
Montrer que *f* possède un maximum global sous la contrainte (C'). En quel point est-il atteint ? Quelle est sa valeur ?

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur le segment $[0\,;\theta]$, où θ (theta) désigne un réel strictement positif.
1) On note f une densité de X, F sa fonction de répartition, $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.
   a) Rappeler l'expression explicite de $F(x)$ en fonction de x et θ.
   b) Donner les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.

Dans la suite, on suppose que le réel θ est inconnu et on en propose deux estimateurs. Pour construire ces estimateurs, on dispose d'un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de la loi de X, ce qui signifie que $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi que X.

2) On pose $Y_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire, elle aussi, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   a) On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(x,y,'unf',a,b)` simule $x \times y$ variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[a\,;b]$. Écrire des commandes `Scilab` permettant d'entrer les valeurs des variables qui sont nécessaires et de simuler Y_n.
   b) On note F_n la fonction de répartition de Y_n. Pour tout réel x, écrire $F_n(x)$ à l'aide de $F(x)$ puis déterminer explicitement $F_n(x)$.
   c) En déduire que Y_n est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité f_n de Y_n.
   d) Montrer que Y_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ.

3) On pose maintenant $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer $E(Z_n)$ puis proposer un estimateur $\widehat{Z_n}$, construit de façon affine à partir de Z_n, et qui soit un estimateur sans biais de θ.

Définition

On dit qu'un estimateur T_n de θ est d'ordre de convergence $\alpha > 0$ lorsque la suite $\left(n^{\alpha}(T_n - \theta)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui n'est pas quasi-certainement nulle.

4) a) Utiliser le théorème de Slutsky pour établir le résultat suivant : si une suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires converge en loi vers une variable aléatoire R et si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels qui converge vers le réel a, alors la suite $(a_nR_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire aR.
   b) Déduire de ce résultat l'unicité de l'ordre de convergence d'un estimateur (on pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'un estimateur T_n de θ possède deux ordres distincts, α et β, avec par exemple $0 < \alpha < \beta$).

5) On considère, dans cette question, une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$ et on pose $Y = -T$. Déterminer la fonction de répartition, que l'on notera F_Y, de Y.

6) a) Justifier que, pour tout réel x positif ou nul, on a $P(n(Y_n - \theta) \leq x) = 1$.

b) Montrer que, pour tout réel x strictement négatif et pour tout entier naturel n supérieur à $-\frac{x}{\theta}$, on a l'égalité :

$$P(n(Y_n - \theta) \leq x) = \left(1 + \frac{x}{n\theta}\right)^n$$

c) Établir enfin que $n(Y_n - \theta)$ converge en loi vers la variable aléatoire Y. Conclure quant à l'ordre de convergence de Y_n.

7) a) Justifier que $\widehat{Z_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2X_i)$, où $\widehat{Z_n}$ est l'estimateur présenté à la troisième question.

b) On pose $\widehat{Z_n}^* = \sqrt{n}\,\frac{\widehat{Z_n} - E(2X)}{\sqrt{V(2X)}}$. En appliquant le théorème limite central à la suite de variables aléatoires $(2X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $\widehat{Z_n}^*$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.

c) Vérifier que $\widehat{Z_n}^* = \frac{\sqrt{3n}}{\theta}\left(\widehat{Z_n} - \theta\right)$ et en déduire que $\sqrt{n}\left(\widehat{Z_n} - \theta\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{3}\right)$. Donner l'ordre de convergence de $\widehat{Z_n}$.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, on désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n ($n \geq 2$), on note Id l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E. Pour tout endomorphisme f de E, on appelle trace de f, le réel, noté $\mathrm{Tr}(f)$, égal à la trace de n'importe laquelle des matrices représentant f. On admet que l'application trace, ainsi définie, est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Partie 1 : préliminaires

1) On considère un projecteur p de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.

a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$

b) Établir que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(Id - p)$

c) En déduire que p est diagonalisable et que l'on a :

$$\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$$

2) Montrer par récurrence sur k ($k \in \mathbb{N}^*$) que, si E_1, ..., E_k sont des sous-espaces vectoriels de E, alors on a l'inégalité :

$$\dim(E_1 + \ldots + E_k) \leq \dim(E_1) + \ldots + \dim(E_k)$$

Partie 2 : condition nécessaire et suffisante pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

Soit un entier naturel k supérieur ou égal à 2. On considère des projecteurs de E, notés $p_1, p_2, ..., p_k$, et on pose $q_k = p_1 + p_2 + ... + p_k$.

3) Montrer que si, pour tout couple (i, j) de $[\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$, alors q_k est un projecteur.

On suppose dans toute la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple (i, j) de $[\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

4) a) Montrer que $\mathrm{Im}(q_k)$ est inclus dans $\mathrm{Im}(p_1) + ... + \mathrm{Im}(p_k)$.

b) Établir, grâce aux résultats de la partie 1, que $\mathrm{rg}(q_k) = \dim(\mathrm{Im}(p_1) + ... + \mathrm{Im}(p_k))$, puis en déduire que $\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) + ... + \mathrm{Im}(p_k)$.

c) Établir finalement l'égalité :

$$\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}(p_k)$$

5) a) Montrer que, pour tout j de $[\![1, k]\!]$, on a l'égalité $q_k \circ p_j = p_j$.

b) En déduire que, pour tout j de $[\![1, k]\!]$, on a : $\forall x \in E$, $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} p_i(p_j(x)) = 0$.

c) Montrer alors que, pour tout couple (i, j) de $[\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

6) Conclure quant à l'objectif de cette partie.

Problème

Partie 1 : préliminaires (les trois questions sont indépendantes)

1) Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

a) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il calcule et affiche u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=1:n
u=------
disp(u)
```

b) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.

c) Utiliser la question précédente pour montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

2) Dans cette question, x désigne un réel élément de $[0\,;1[$.

a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0\,; x]$, simplifier la somme $\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt = 0$.

d) Établir alors que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente et que :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$$

3) On considère deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs et on suppose que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes, de sommes respectives $A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} c_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k$.

b) En déduire que la série de terme général c_n converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

c) Soit x un réel élément de $[0\,;1[$. On suppose dans cette question que l'on a : $a_k = \frac{x^k}{k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ et $b_k = x^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

i) Justifier rapidement que les séries de termes généraux a_n et b_n sont convergentes et à termes positifs.

ii) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur de c_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=input('entrez une valeur pour x :')
u=1:n
v=n-1:-1:0
a=------
b=------
c=------
disp(c)
```

iii) Donner l'expression de c_n sous forme de somme.

Partie 2 : étude d'une fonction définie comme somme de série

Dans cette partie, on désigne toujours par x un réel de $[0;1[$.

4) a) Utiliser la première question du préliminaire pour établir que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)$$

b) En déduire que : $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

5) a) Montrer que, pour tout réel u strictement positif, on a : $\ln u \leq u$.

b) En déduire que la série de terme général $(\ln n)x^n$, avec $n \geq 1$, est convergente.

6) On pose : $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)x^n$.

a) Établir, en utilisant le résultat de la question 1c), que : $\frac{-\ln(1-x)}{1-x}-\frac{x}{1-x} \leq f(x) \leq \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

b) Montrer finalement l'équivalent suivant : $f(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

7) a) Étudier les variations de la fonction f.

b) Dresser le tableau de variations de f (valeur en 0 et limite en 1^- comprises).

8) a) En remarquant que $f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}(\ln n)x^n$, montrer que l'on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{(1-x)^2}-x$.

b) En déduire que f est continue à droite en 0 et dérivable à droite en 0. Donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f.

c) On admet que f est continue sur $[0;1[$. Donner la nature de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 20 1079 – D'après documents fournis