Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2000

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Problème 1

Notations:

- n désigne un entier supérieur ou égal à 3.
- $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coe cients réels. I_n désigne la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$. La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$.
- $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique noté $< \, , \, >$ défini par: si $x = (x_1,x_2,...,x_n)$ et y = $(y_1,y_2,...,y_n)$ alors, $< x,y >= \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$.

  En notant les matrices unicolonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et en confondant les matrices d'ordre 1 et les scalaires, on a alors $< x,y >= {}^tXY$. La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|.\|$.
- $B = (e_1,e_2,...,e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que la matrice de passage P d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ à une autre base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ vérifie ${}^tP = P^{-1}$.
Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I.

1. On considère les matrices suivantes de $M_3(\mathbb{R})$:

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

   (a) Justifier que S est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $M_3(\mathbb{R})$ telle que $S = PD{}^tP$.

2. On considère la matrice M $= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$.

   (a) Vérifier que $(M - 2I_3)^3 = I_3$.
   (b) M est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
   (c) Calculer le produit ${}^tMM$.

Partie II.

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice A relativement à la base B et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice ${}^tA$ relativement à la base B.

1. Montrer, pour tout x et tout y de $\mathbb{R}^n$: $< g(y),x > = < y,f(x) >$ puis $< (g \circ f)(x),x > = \|f(x)\|^2$.
2. Montrer que l'endomorphisme $g \circ f$ est symétrique.
3. Montrer que $g \circ f$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.
4. Justifier l'existence d'une base orthonormale $B' = (e'_1,e'_2,...,e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituées de vecteurs propres de $g \circ f$.
   On note Q la matrice de passage de la base B à la base B'.
5. Montrer l'existence de n réels positifs ou nuls λ_1, λ_2,..., λ_n (non nécessairement distincts) tels que la matrice diagonale $\mathbf{\Delta} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$ de $M_n(\mathbb{R})$ vérifie : ${}^tAA = Q\mathbf{\Delta}^2\, {}^tQ$.
6. Montrer que la famille $(f(e'_1),f(e'_2),...,f(e'_n))$ est une famille orthogonale et que pour tout entier j de $\{1,2,...,n\}$, $\|f(e'_j)\| = \lambda_j$.
7. Dans cette question, on suppose que A est inversible.
   (a) Vérifier que les nombres réels $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ sont tous non nuls.
   (b) Montrer que la famille $C = \left(\frac{1}{\mu_1}f(e_1),\frac{1}{\mu_2}f(e_2),...,\frac{1}{\mu_n}f(e_n)\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
   (c) Soit R la matrice de passage de la base B à la base C. Montrer que $A = R\mathbf{\Delta}^tQ$.

Partie III.

Déterminer deux matrices orthogonales Qet R d'ordre 3 et une matrice diagonale $\mathbf{\Delta}$ d'ordre 3 telles que : $M = R\mathbf{\Delta}^tQ$ où M est la matrice définie dans **I**.2.

Problème 2

Dans tout ce problème, a est un réel tel que $0 < a < 1$.

Calcul d'une somme et d'une intégrale.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}^\times$ et tout x de $[0, +\infty]$, on note: $C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$.
   (a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^\times$ et tout x de $[0, +\infty]$: $1 + 2C_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.
   (b) Etablir, pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$: $\sum_{k=-n}^{n} z^k = z^{-n}\dfrac{1 - z^{2n+1}}{1 - z}$.
   (c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^\times$ et tout x de $]0, +\infty]$: $\dfrac{1}{2} + C_n(x) = \dfrac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$
2. Soit n dans $\mathbb{N}^\times$. Montrer que l'intégrale $J_n = \int_0^{\pi} \dfrac{sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}dx$ existe et calculer sa valeur.

   On note $\omega : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $\omega(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\cos(ax) - 1}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{si} \quad x \in]0, +\infty] \end{cases}$

3. Montrer que ω est de classe C^1 sur $[0, +\infty]$ et calculer $\omega'(0)$.
4. On note, pour tout n de $\mathbb{N}^\times$: $I_n = \int_0^\pi \varphi(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) dx$.
   Montrer, grâce à une intégration par parties, que I_n tend vers 0 quand l'entier n tend vers l'infini.

Calcul de la somme d'une série.

On note, pour n $\in \mathbb{N}^\times$: $u_n = \int_0^\pi \cos(ax)\cos(nx)dx$.

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$: $\sum_{k=1}^{n} u_k = -\frac{sin(a\pi)}{2a} + \frac{1}{2}I_n + J_n$.
2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, et calculer sa somme (on pourra utiliser les résultats de **I**.2.et **I**.4.).
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, u_n en fonction de a et de n.
4. Etablir : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}a}{n-a} = \frac{\pi}{sin(a\pi)} - \frac{1}{a}$.

Calcul d'une intégrale.

Dans cette partie, α désigne un réel tel que $\alpha > 1$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$.
   On note: $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$, $G(\alpha) = \int_0^{1} \frac{dt}{1+t^\alpha}$, $H(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$.
2.
   (a) Montrer, pour tout réel t de [0,1] et tout n de $\mathbb{N}$: $\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1}\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}$.
   (b) Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}dt$ tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini.
   (c) En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{1+k\alpha}$ converge et que : $G(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k\alpha}$
3.
   (a) En utilisant le changement de variable défini par $u = t^{1-\alpha}$, montrer :
   $$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right),$$
   et en déduire
   $$H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha-1}$$
   (b) Etablir: $F(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n\alpha-1}$.
4. En utilisant le résultat de **II**.4., établir finalement : $F(\alpha) = \dfrac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$.