E.M.Lyon. Math 1 . Option S. 2003

PROBLEME 1

On considère l'application $\;: [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $t \in [0;+\infty[$, par :

$$(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

et on considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \big(\;(t)\big)^n \,\mathrm{d}t, \qquad J_n = \int_0^{1} \big(\;(t)\big)^n \,\mathrm{d}t, \qquad K_n = \int_1^{+\infty} \big(\;(t)\big)^n \,\mathrm{d}t$$

Partie I : Résultats généraux sur et J_n

1) Montrer que est continue sur $[0;+\infty[$ et que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale J_n existe.

2)a) Montrer que est strictement positive sur $[0;1]$ et que est strictement décroissante sur $[0;1]$.

b) Établir, pour tout réel $t \in]0,+\infty[$: $\;|\;(t)| < 1$.

3)a) Montrer, pour tout réel $t \in [0;+\infty[$: $\;(t) \geqslant 1 - t$.
(On pourra étudier les variations sur $[0;+\infty[$ de l'application $t \mapsto \sin t - t + t^2$).

b) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$: $J_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Partie II : Étude de I_1

1)a) Montrer, pour tout réel $x \in [1;+\infty[$: $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire que les intégrales K_1 et I_1 sont convergentes.

2)a) Montrer, pour tout réel $t \in [0;+\infty[$: $|\sin t| \geqslant \sin^2 t = \dfrac{1}{2}\big(1 - \cos(2t)\big)$.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ converge.

c) Déduire des deux questions précédentes que l'intégrale I_1 n'est pas absolument convergente.

Partie III : Étude de I_n, pour $n \geqslant 2$

1)a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'intégrale K_n est convergente.

b) Établir, pour tout entier $n \geqslant 2$: $|K_n| \leqslant \dfrac{1}{n-1}$

2)a) Montrer que la suite $(J_n)_{n \geqslant 2}$ est décroissante.

b) Montrer que la suite $(J_n)_{n \geqslant 2}$ converge ; on note sa limite.

c) Établir, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $a \in]0;1[$:

$$\int_0^a \big(\;(t)\big)^n \,\mathrm{d}t \leqslant a \quad \text{et} \quad \int_a^1 \big(\;(t)\big)^n \,\mathrm{d}t \leqslant (1-a)\big(\;(a)\big)^n$$

(On pourra utiliser I.2.).

d) En déduire, pour tout réel $a \in]0;1[$: $0 \leqslant \; \leqslant a$ et conclure : $\; = 0$.

3)a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'intégrale I_n est convergente.

b) Établir : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Partie IV : Étude de la série de terme général I_n, $n \geqslant 2$

1) Montrer, pour tout entier $p \geqslant 1$: $K_{2p} + K_{2p+1} \geqslant 0$.

2) En déduire, pour tout entier $N \geqslant 1$:

$$\sum_{p=1}^{N}(I_{2p} + I_{2p+1}) \geqslant \sum_{p=1}^{N}(J_{2p} + J_{2p+1})$$

3) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 2} I_n$ diverge. (On pourra utiliser I.3.b.).

PROBLEME 2

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et E est un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $\langle .,. \rangle$ et la norme associée est notée $\|.\|$. On note id_E l'application identique de E, et $\tilde{0}$ l'application nulle de E.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^{\perp}$ le sous-espace vectoriel supplémentaire orthogonal de F dans E.
Le projecteur de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelé projecteur orthogonal sur F.
Pour tout endomorphisme f de E et toute valeur propre   de f, on note $E_f(\ )$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre .

Partie I : Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

On considère un endomorphisme symétrique f de E, c'est-à-dire un endomorphisme f tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

On suppose de plus que f est non inversible et non nul.

1) Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au-moins une valeur propre non nulle.

2)a) Soient   et μ deux valeurs propres de f.
Montrer, pour tout vecteur x de $E_f(\ )$ et pour tout vecteur y de $E_f(\mu)$:

$$\langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

b) En déduire que les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

3) Montrer que les sous-espaces vectoriels Im f et Ker f sont supplémentaires orthogonaux dans E.

On suppose que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $_0, \ _1, \dots, \ _k$ avec $k \geqslant 1$, $_0 = 0$ et $0 < |\ _1| \leqslant \dots \leqslant |\ _k|$.
Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k, on note p_j le projecteur orthogonal sur $E_f(\ _j)$.

4) Soit x un vecteur de E.

a) Montrer qu'il existe un unique $(k+1)$-uplet $(x_0, x_1 \dots, x_k)$ de $E_f(0) \times E_f(\ _1) \times \dots \times E_f(\ _k)$ tel que $x = x_0 + x_1 + \dots + x_k$.

b) Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k, montrer : $p_j(x) = x_j$.
Ainsi, la relation suivante est clairement vérifiée :

$$id_E = p_0 + p_1 + \dots + p_k$$

5)a) Etablir, pour tout couple (i, j) d'entiers naturels inférieurs ou égaux à k :

$$i \neq j \Longrightarrow p_i \circ p_j = \tilde{0}$$

b) Montrer : $f = \ _1 p_1 + \ _2 p_2 + \dots + \ _k p_k$.

c) Montrer que le projecteur orthogonal p sur Im f vérifie :

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_k$$

On note $f^\sharp$ l'endomorphisme de E défini par $f^\sharp = \frac{1}{{}_1}p_1 + \frac{1}{{}_2}p_2 + \cdots + \frac{1}{{}_k}p_k$.

On dit que $f^\sharp$ est l'inverse généralisé de f.

6)a) Montrer : $\quad f \circ f^\sharp = p$.

b) En déduire : $\quad \forall (x, y) \in E^2, \ \Big(f(x) = p(y) \Longleftrightarrow x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f \Big)$.

7) Soit y un vecteur de E.

a) Montrer : $\quad \forall x \in E, \ \Big(\| f(x) - y\| = \inf_{z\in E} \| f(z) - y\| \Longleftrightarrow x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f \Big)$

b) En déduire que $f^\sharp(y)$ est le vecteur x de E de plus petite norme vérifiant :

$$\| f(x) - y\| = \inf_{z\in E} \| f(z) - y\|$$

Partie II : Application à un exemple

Dans cette question, E est un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de E. On note :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de E associé à la matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$.

1) Justifier que f est un endomorphisme symétrique non nul et non inversible.

2) Montrer que f admet exactement trois valeurs propres distinctes ${}_0$, ${}_1$, ${}_2$ avec ${}_0 < {}_1 < {}_2$.

On note p_1 le projecteur orthogonal sur $E_f({}_1)$ et M_1 la matrice associée à p_1 relativement à la base $\mathcal{B}$.
On note p_2 le projecteur orthogonal sur $E_f({}_2)$ et M_2 la matrice associée à p_2 relativement à la base $\mathcal{B}$.

3) Montrer : $\quad A = 2M_1 + 4M_2$.

4)a) Montrer que $E_f({}_2)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de $E_f({}_2)$ tel que $\|v_2\| = 1$.

b) Montrer : $\quad \forall x \in E, \quad p_2(x) = \langle x, v_2\rangle v_2$.

c) Déterminer la matrice M_2.

5) En déduire la matrice associée à $f^\sharp$ relativement à la base $\mathcal{B}$.