

Programme ESC d E.M.LYON

CONCOURS D ENTREE 2005

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d aucun document; l utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l utilisation d une règle graduée est autorisée.

Premier problème.

On considère la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1; \quad T_1 = 2X \quad \text{et, pour tout entier } n \geq 2; \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel x ,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

PARTIE I : Etude de la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Calculer T_2 et T_3 .
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , T_n est un polynôme de degré n dont on déterminera le coefficient du terme de degré n .
(b) Etablir que, si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).
3. Calculer, pour tout entier naturel n , $T_n(1)$ en fonction de n .
4. (a) Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0; \pi[$: $T_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$.
(b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $] -1; 1[$, que l'on explicitera.
(c) Etablir, pour tout entier naturel non nul n : $T_n = 2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$.
(d) En déduire, pour tout entier naturel non nul n , la valeur de $\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de n .
5. (a) Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0; \pi[$:

$$\sin^2 \theta \cdot T_n''(\cos \theta) - 3 \cos \theta \cdot T_n'(\cos \theta) + (n^2 + 2n) T_n(\cos \theta) = 0:$$

Indication: On pourra dériver deux fois la fonction (nulle): $\theta \mapsto \sin \theta \cdot T_n(\cos \theta) - \sin(n+1)\theta$:

- (b) En déduire, pour tout entier naturel n : $(X^2 - 1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2 + 2n)T_n = 0$.

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel $\neq 0$ tel que $n \geq 2$, et on note E l'espace vectoriel réel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n .

On note L l'application qui, à un polynôme P de E , associe le polynôme $L(P)$ défini par :

$$L(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP':$$

PARTIE II: Etude de l'endomorphisme L

1. Montrer que L est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .
2. (a) Calculer $L(T_k)$ pour tout k de $\{0; 1; \dots; n\}$.
(b) En déduire les valeurs propres de L et, pour chaque valeur propre de L , une base et la dimension du sous-espace propre associé.

PARTIE III: Etude d'un produit scalaire

Dans la suite du problème, on note I l'application qui, à tout couple $(P; Q)$ de polynômes de E , associe le réel

$$I(P; Q) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x) Q(x) dx.$$

1. Montrer que I est un produit scalaire sur E .
2. Démontrer, pour tous polynômes P, Q de E : $I(L(P); Q) = I(P; L(Q))$.

Indication: On pourra, à l'aide d'une intégration par parties, montrer : $I(L(P); Q) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{3/2} P'(x) Q'(x) dx$.

3. Etablir que $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de E .

DEUXIEME PROBLEME

PARTIE I: Calcul de la somme d'une série convergente

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.
2. Etablir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout t de $]0; \pi[$:

$$\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it} = \frac{\sin \frac{tm}{2}}{\sin \frac{t}{2}} e^{\frac{i(m+1)t}{2}}; \quad \text{puis} \quad \sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

3. Soit $u : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 .

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties : $\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.

4. Soit l'application $f : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\frac{t^2}{2} - t}{2 \sin \frac{t}{2}}$ si $t \in]0; \pi[$ et $f(0) = -1$.

Montrer que f est de classe C^1 sur $[0; \pi]$

5. (a) Montrer : $m \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt$:

(b) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{6}$.

PARTIE II: Etude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente.

1. (a) Montrer que, pour tout couple $(x; y) \in ([0; +\infty[)^2$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

- (b) Montrer que, pour tout x de $[0; +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ converge.

On note S l'application définie, pour tout x de $[0; +\infty[$, par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$.

2. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

3. (a) Etablir : $\forall (x; y) \in ([0; +\infty[)^2$; $S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

- (b) En déduire: $\forall (x; y) \in ([0; +\infty[)^2$; $|S(y) - S(x)| = \frac{2}{6} |y-x|$:

- (c) Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0; +\infty[$.

4. (a) Montrer, pour tout couple $(x; y)$ de $([0; +\infty[)^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

- (b) En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que: $\forall x \in [0; +\infty[$; $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

- (c) Préciser les valeurs de $S'(0)$ et $S'(1)$.

5. On admet que S est deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$ et que: $\forall x \in [0; +\infty[$; $S''(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3}$.
Montrer que S est concave.

6. Soit $x \in]0; +\infty[$. On note $!$ la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\forall t \in [1; +\infty[; \quad !(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}.$$

- (a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} !(t) dt$ converge et calculer sa valeur.

- (b) Montrer: $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $!(n+1) \leq \int_n^{n+1} !(t) dt \leq !(n)$, et en déduire: $\int_1^{+\infty} !(t) dt \leq S(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} !(t) dt$:

- (c) Conclure que $S(x)$ équivaut $\ln x$ en $+\infty$.

7. (a) Dresser le tableau de variation de S , en précisant la limite de S en $+\infty$.

- (b) Tracer l'allure de la courbe représentative de S .