EML 2007, option S

PROBLEME 1

On considère l'application

$$f \ : \ [0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Etude de l'application f

1) Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

2) On considère l'application

$$A \ : \ [0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{A(x)}{x^2}$.

b) Montrer que f' admet $-\dfrac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.

c) Démontrer que f est de classe C^1 sur $[0;+\infty[$ et préciser $f'(0)$.

d) Dresser le tableau de variation de A.
En déduire que f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3) On considère l'application

$$B \ : \ [0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x)$$

a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$, et que, pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}.$$

b) Dresser le tableau de variation de B.
En déduire que f est convexe sur $]0;+\infty[$.

4) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II : Un développement en série

1) Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0;1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}$$

2) En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x) \ ,$$

où on a noté $J_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t$.

3) Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$: $\quad |J_N(x)| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$.

4) En déduire que, pour tout $x \in [0;1]$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

Partie III : Egalité d'une intégrale et d'une somme de série

1) Montrer, en utilisant le résultat de **II.3.**, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leqslant \frac{x^{N+1}}{N+2}$$

2) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

3) Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \end{cases}$$

4) On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.

Partie IV : Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $F\ :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

et $G\ :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto G(x,y) = F(xy) - F(x) - F(y)$.

1) Montrer que G est de classe C^2 sur $]0;+\infty[^2$.
Exprimer, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, les dérivées partielles premières et secondes de G en (x,y) en fonction de x, y, $f(x)$, $f(y)$, $f(xy)$, $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(xy)$.

2) Établir que G admet $(1,1)$ comme unique point critique.

3) Est-ce que G admet un extremum local ?

PROBLEME 2

On note n un nombre entier fixé supérieur ou égal 2, E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.

Partie I : Étude d'un endomorphisme de E

1) Montrer que, pour tout polynôme P de E, le polynôme $\big((X^2-1)P\big)''$ est élément de E, où $\big((X^2-1)P\big)''$ désigne le polynôme dérivée seconde de $(X^2-1)P$.

On note $\Phi\ :\ E \to E$ l'application qui, à tout polynôme P de E, associe $\Phi(P) = \big((X^2-1)P\big)''$.

2) Vérifier : $\Phi(1) = 2, \quad \Phi(X) = 6X$.

3) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

4) Calculer $\Phi(X^k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et écrire la matrice A de Φ dans la base $\mathcal{B}$.

5)a) Montrer que Φ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes que l'on notera $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.

b) Est-ce que Φ est bijectif ?

c) Montrer que Φ est diagonalisable et déterminer, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la dimension du sous-espace propre de Φ associé à λ_k.

6) Soient $k \in [\![0, n]\!]$ et P un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ_k.

a) Montrer que le degré du polynôme P est égal à k.

b) Montrer que le polynôme Q défini par $Q(X) = P(-X)$ est un vecteur propre de Φ associé à λ_k.

7) En déduire qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de Φ telle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.
Que peut-on en déduire sur la parité de P_k ?

8) Calculer P_0, P_1, P_2, P_3.

Partie II : Un produit scalaire sur E

1) Montrer que l'application : $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^2)P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur E.

On munit dorénavant E de ce produit scalaire noté $(.|.)$.

2)a) À l'aide d'intégrations par parties, établir que Φ est un endomorphisme symétrique de E.

b) Montrer que la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E obtenue à la question **I.7** est orthogonale.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

3)a) Montrer que pour tout polynôme S de degré inférieur ou égal à $j - 1$, on a : $(S|P_j) = 0$.

b) En considérant $(1|P_j)$, montrer que P_j ne garde pas un signe constant sur l'intervalle $]-1; 1[$.

c) En déduire que P_j admet au moins, dans l'intervalle $]-1; 1[$, une racine d'ordre de multiplicité impair.

4) On note $\{x_1, \ldots, x_m\}$ l'ensemble des racines d'ordre de multiplicité impair de P_j appartenant à l'intervalle $]-1; 1[$ et $S_m = (X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_m)$.

a) Justifier : $m \leqslant j$.

b) Montrer que le polynôme $S_m P_j$ (produit des polynômes S_m et P_j) garde un signe constant sur l'intervalle $]-1; 1[$.

c) En considérant $(S_m|P_j)$, montrer que $m = j$.

d) En déduire que P_j admet j racines simples réelles toutes situées dans l'intervalle $]-1, 1[$.