

EML 2008, option S

On confond polynôme et application polynomiale de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$.

On note E l'ensemble des applications $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2 e^{-x^2} dx$ converge.

On note F le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à n .

Préliminaire : Valeur de l'intégrale de Gauss

En considérant une variable aléatoire suivant une loi normale, justifier :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Partie I : Un produit scalaire sur E

1) Établir, pour tout $(\alpha, \beta) \in [0; +\infty[^2$: $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$.

2) En déduire que, pour tout $(u, v) \in E^2$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2} dx$ converge.

On note $(\cdot|\cdot)$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui, à tout $(u, v) \in E^2$, associe $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2} dx$.

On notera la présence du facteur $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3)a) Démontrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

b) Montrer que l'application $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E .

4) Démontrer : $F \subset E$.

On note encore $(\cdot|\cdot)$ la restriction à F ou à F_n , pour $n \in \mathbb{N}$, du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur E . On admet que cette restriction est encore un produit scalaire sur F ou sur F_n .

On note $\| \cdot \|$ la norme sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, définie, pour tout $u \in E$, par :

$$\|u\| = \sqrt{(u|u)}$$

Partie II : Polynômes d'Hermite

On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ , définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = e^{-x^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x), \quad \text{où } w^{(n)} \text{ désigne la dérivée } n\text{-ième de } w.$$

En particulier : $H_0(x) = 1$.

1) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$.

Faire figurer les calculs sur la copie.

2)a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n .

c) Contrôler alors les résultats obtenus en II.1 et calculer H_4 .

Faire figurer les calculs sur la copie.

3) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient du terme de plus haut degré de H_n .

4) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

Qu'en déduit-on, en terme de parité, pour l'application H_n ?

Partie III : Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

- 1)a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in F$:

$$(P'|H_{n-1}) = (P|H_n),$$

où $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire sur F défini en I.4.

À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un intervalle fermé borné.

- b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in F_{n-1}$: $(P|H_n) = 0$.
- c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est orthogonale dans F .
- 2) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de F_n .
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}$.
- a) Montrer : $\|H_n\|^2 = (H_n^{(n)}|H_0)$, où $\|\cdot\|$ est définie en I.4.
- b) En déduire la valeur de $\|H_n\|$.

Partie IV : Un endomorphisme symétrique

On note f, g, h les applications définies de F dans F , pour tout $P \in F$, par :

$$f(P) = -P'' + 2XP' + P, \quad g(P) = 2XP - P', \quad h(P) = P'$$

Ainsi, par exemple, pour tout $P \in F$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $(g(P))(x) = 2xP(x) - P'(x)$.

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de F .

On admet que g et h sont aussi des endomorphismes de F , et on note Id_F l'application identique de F .

- 2)a) Établir : $g \circ h = f - Id_F$ et $h \circ g = f + Id_F$.
- b) En déduire : $f \circ g - g \circ f = 2g$.
- 3) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in F$, si $f(P) = \lambda P$, alors $f(g(P)) = (\lambda + 2)g(P)$.
- 4)a) Calculer $f(H_0)$.
- b) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g(H_k)$, et en déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $f(H_k) = (2k + 1)H_k$.
- 5) Établir, pour tout $(P, Q) \in F^2$:

$$(P'|Q') = (f(P)|Q) - (P|Q)$$

A cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un intervalle fermé borné.

- 6) Soit $n \in \mathbb{N}$.
- a) Montrer : $\forall P \in F_n, \quad f(P) \in F_n$.
- On note f_n l'endomorphisme de F_n défini par :
- $$\forall P \in F_n, \quad f_n(P) = f(P).$$
- b) Montrer que f_n est un endomorphisme symétrique de F_n .
- 7) Donner une base orthonormale de F_n constituée de vecteurs propres de f_n .

Partie V : Intervention d'exponentielles

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$, φ_a l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi_a(x) = e^{ax}$$

- 1) Vérifier, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\varphi_a \in E$.
- 2) Montrer, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: $(\varphi_a|\varphi_b) = e^{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$.
- 3) Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^{-2}$.
- 4) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2}$ converge et calculer sa somme.

Partie VI : Une limite de probabilité conditionnelle

Soit la fonction Φ définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \Phi(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

- 1) Montrer que Φ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et déterminer sa dérivée Φ' .
- 2) Soient G et K les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad G(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3}\right) \frac{e^{-x^2}}{2} \quad \text{et} \quad K(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

- a) Déterminer les limites des fonctions Φ , G et K en $+\infty$.
 - b) Déterminer les sens de variation des fonctions $G - \Phi$ et $\Phi - K$.
 - c) En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad G(x) \leq \Phi(x) \leq K(x)$.
 - d) Montrer : $\Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.
- 3) Soit X une variable aléatoire normale d'espérance égale à 0 et d'écart-type égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- a) Pour tout réel x strictement positif, exprimer la probabilité $P(X \leq x)$ à l'aide de la fonction Φ .
 - b) Soit c un réel strictement positif.
Pour tout réel x , on considère la probabilité conditionnelle $P_{(X > x)}(X \leq x + c)$.
Montrer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_{(X > x)}(X \leq x + c) = 1$.