BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : H.E.C.

CODE EPREUVE :

280

HEC_M1_S

OPTION : SCIENTIFIQUE

# MATHEMATIQUES I

Mercredi 3 Mai 2006, de 8 h. à 12 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

Pour tout couple $(p, q)$ d'entiers strictement positifs, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à $p$ lignes et $q$ colonnes à coefficients réels. Si $A$ est un élément quelconque de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on note $A^T$ la transposée de $A$.

Dans tout le problème, pour $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on identifie $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à $n$ lignes et à coefficients réels. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire de deux vecteurs $X$ et $Y$ étant noté $\langle X, Y\rangle$ ou $Y^T X$.

Pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, sa norme est donnée par $\|X\| = \sqrt{X^T X} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k^2\right)^{1/2}$.

Le module et le conjugué d'un nombre complexe $z$ sont notés respectivement $|z|$ et $\overline{z}$. On rappelle que $|z|^2 = z\overline{z}$. Le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$ est noté $i$.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la matrice $H_n = (h_{k,j}^{(n)})_{1\leqslant k,j\leqslant n}$ (appelée matrice de Hilbert) de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, de terme générique $h_{k,j}^{(n)} = \dfrac{1}{k+j-1}$, les entiers $k$ et $j$ décrivant $[\![1, n]\!]$.

Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, la matrice $H_n$ s'écrit donc :

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

**Préliminaire**

On rappelle que la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ admet une fonction réciproque notée arctan. On note (arctan)' sa dérivée.

1. a) Pour tout réel $x$, rappeler l'expression de $(\arctan)'(x)$ en fonction de $x$.

b) Montrer, pour tout $x$ de $\mathbb{R}^{+*}$, l'égalité : $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

c) Établir, pour tout $x$ de $\mathbb{R}^{+}$, l'encadrement : $0 \leqslant \arctan x \leqslant x$.

2. a) Montrer que la fonction $\psi$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $U$ une variable aléatoire réelle de densité $\psi$. On note $F$ sa fonction de répartition. Déterminer la loi de la variable aléatoire $F(U)$.

c) On rappelle que la fonction Pascal `random` rend un nombre aléatoire de l'intervalle $[0,1]$ suivant une loi uniforme sur cet intervalle. Écrire, dans le langage Pascal, une fonction `Cauchy` simulant la variable aléatoire $U$.

**Partie I. Dimension du sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre de $H_n$**

1. Calculer, pour tout couple $(k,j)$ de $[\![1,n]\!]^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{k+j-2}dt$.

En déduire, pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, l'égalité : $X^T H_n X = \displaystyle\int_0^1 (x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1}t^{n-1})^2 dt$.

2. a) Justifier l'existence d'une matrice diagonale $D$ à coefficients diagonaux strictement positifs, et d'une matrice orthogonale $P$ telles que : $H_n = PDP^T$.

b) On désigne par $\alpha_n$ (resp. $\beta_n$) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de $H_n$.
Montrer, pour tout vecteur $X$ de $\mathbb{R}^n$, l'encadrement suivant :

$$\alpha_n \|X\|^2 \leqslant X^T H_n X \leqslant \beta_n \|X\|^2$$

3. On note $\mathcal{V}$ le sous-espace propre de $H_n$ associé à la valeur propre $\beta_n$.
a) Soit $Y$ un vecteur de $\mathcal{V}$. Montrer que $Y^T H_n Y = \beta_n \|Y\|^2$.

b) Réciproquement, soit $Y$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $Y^T H_n Y = \beta_n \|Y\|^2$. Montrer que $Y$ appartient à $\mathcal{V}$.

4. Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$. On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$ le vecteur dont les composantes sont les valeurs absolues des composantes de $X_0$.

a) Établir l'inégalité : $|X_0|^T H_n |X_0| \geqslant X_0^T H_n X_0$.

b) En déduire que $|X_0|$ est un élément de $\mathcal{V}$.

c) Montrer que les composantes du vecteur $H_n|X_0|$ sont toutes strictement positives. En déduire que le vecteur $X_0$ n'a aucune composante nulle.

d) En utilisant le fait que $X_0^T H_n X_0 = |X_0|^T H_n |X_0|$, montrer que les composantes de $X_0$ sont toutes de même signe.

5. a) Montrer qu'il n'existe pas deux vecteurs non nuls de $\mathcal{V}$ orthogonaux.

b) En déduire la dimension du sous-espace propre $\mathcal{V}$.

**Partie II. Croissance et convergence de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$**

On rappelle que $\beta_n$ désigne la plus grande valeur propre de la matrice $H_n$.

1. Soit $X' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de $H_n$ associé à $\beta_n$. Soit $Z$ le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par $Z = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $Z^T H_{n+1} Z = X'^T H_n X'$. En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

2. Soit $\varphi_1$ et $\varphi_2$ deux fonctions définies et continues sur le segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On définit le nombre complexe $\displaystyle\int_a^b (\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta))d\theta$ par :

$$\int_a^b (\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta))d\theta = \int_a^b \varphi_1(\theta)d\theta + i\int_a^b \varphi_2(\theta)d\theta$$

et on rappelle que pour tout réel $x$, on a : $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

a) Calculer, pour tout $k$ de $\mathbb{Z}$, les deux nombres complexes : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}d\theta$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{ik\theta}d\theta$.

b) Montrer, pour tout entier $p$ de $\mathbb{N}$, l'égalité : $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^p dx = -i\int_0^{\pi} e^{i(p+1)\theta}d\theta$.

c) En déduire, pour tout polynôme $P$ à coefficients complexes, l'égalité : $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)dx = -i\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$.

d) Dans le cas où $P$ est un polynôme à coefficients réels, établir l'inégalité suivante :

$$\left|\int_{-1}^{1} P(x)dx\right| \leqslant \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|d\theta$$

*Dans les questions 3 et 4, on désigne par* $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ *un vecteur quelconque de* $\mathbb{R}^n$.

3. a) Établir l'encadrement : $0 \leqslant X^T H_n X \leqslant \displaystyle\int_{-1}^{1} (x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1}t^{n-1})^2 dt$.

b) En déduire que l'on a : $0 \leqslant X^T H_n X \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} |x_0 + x_1 e^{i\theta} + \cdots + x_{n-1}e^{i(n-1)\theta}|^2 d\theta$.

4. a) Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(\theta) = \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{ik\theta}\right|^2$.

Montrer que $\varphi$ est $2\pi$–périodique et paire ; en déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\theta)d\theta$.

b) Établir l'inégalité : $X^T H_n X \leqslant \pi\|X\|^2$.

c) En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée, puis qu'elle est convergente.

**Partie III. Limite de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$**

Dans cette partie, le vecteur $W$ de $\mathbb{R}^n$ est défini par $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ \vdots \\ 1/\sqrt{n} \end{pmatrix}$.

1. Montrer les égalités suivantes :

$$W^T H_n W = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{j}(k+j-1)} = \int_0^1 \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{t^{\ell-1}}{\sqrt{\ell}}\right)^2 dt$$

2. En déduire, pour $n \geqslant 2$, l'inégalité suivante :

$$W^T H_n W \geqslant \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{p-k}}$$

(on pourra utiliser le développement du produit de deux polynômes)

*Dans les questions suivantes, $p$ est un entier supérieur ou égal à 2.*

3. a) Étudier les variations de la fonction $g$ définie sur $]0,p[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(p-x)}}$.

b) En déduire, quelle que soit la parité de $p$, l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k(p-k)}} \geqslant \int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}$$

4. Justifier la validité du changement de variable $x = \dfrac{p}{1+t^2}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}$, et établir la relation :

$$\int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}} = \pi - 4\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{p-1}}\right)$$

5. On pose : $u_p = \dfrac{1}{p-1}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{p-1}}\right)$. Montrer que la série de terme général $u_p$ est convergente.

6. a) Montrer que $||W||^2$ est équivalent à $\ln n$, lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

b) En déduire la limite de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$.

## MATHÉMATIQUES I - Option scientifique

Cette épreuve concerne les deux écoles HEC et ESCP-EAP, et le sujet de cette année s'intéressait aux matrices Hn de Hilbert.

Dans le préliminaire, outre les rappels sur la fonction arctangente, on posait quelques questions de probabilités et on demandait une fonction Pascal simulant une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy. La première partie conduisait à une partie du théorème de Perron et à la détermination de la dimension du sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre $\beta n$ de Hn, en faisant appel à des résultats et des méthodes d'algèbre linéaire. Les seconde et troisième parties concernaient la suite ($\beta n$) pour en étudier les variations et la limite, avec des outils d'analyse.

Le barème de notation attribuait aux deux dernières parties une importance sensiblement égale (27% et 26%), un peu plus grande pour la première partie (33%), deux fois moins pour le préliminaire (14%). La lecture des copies montre que malgré la longueur du problème, toutes les questions ont été résolues au moins une fois, même les plus délicates. Les meilleurs candidats ont montré à la fois une solide connaissance du cours, une aisance dans les calculs et une bonne démarche déductive.

Sur l'ensemble des 2513 candidats ayant composé dans cette épreuve, la note moyenne s'élève à 9,66, avec un écart-type de 4,14. La note médiane est égale à 8,5, et 25% des candidats obtiennent une note supérieure à 13,5.

Les résultats par école sont les suivants :

- pour HEC, le nombre de candidats est de 1976, la note moyenne est de 10,41 et l'écart-type vaut 4,12 ;
- pour ESCP-EAP, le nombre de candidats est de 2457, la note moyenne est de 9,78 et l'écart-type vaut 4,10.

En alternant des questions très abordables et des questions plus subtiles, le sujet a manifestement permis de bien classer les candidats. La large étendue des notes (entre 2 et 20), ainsi que le niveau élevé de l'écart-type montrent que l'épreuve a joué correctement son rôle.

Les copies sont en général bien présentées et rédigées. Seules, les moins bonnes s'efforcent de faire passer des résultats sans preuves.

Dans le préliminaire, on peut déplorer que plus de la moitié des étudiants renoncent devant les questions de probabilités, même s'ils connaissent la définition d'une densité de probabilité.

Dans la première partie, les difficultés essentielles ont été rencontrées, d'une part, dans l'expression sous forme de somme double d'une forme quadratique, ou dans le développement du carré d'un polynôme, et d'autre part, dans l'utilisation des matrices et des inégalités. En particulier, trop de candidats ont utilisé sans la définir, une relation d'ordre pour les matrices, et ont étendu de façon hasardeuse des propriétés concernant les réels : "la matrice colonne Y est inversible puisqu'elle est non nulle". Le théorème de diagonalisation des matrices symétriques réelles est connu de tous, mais de façon imprécise et incomplète.

Dans la seconde partie, les calculs des intégrales des fonctions à valeurs complexes ont donné lieu à beaucoup d'erreurs : calculs faux, inachevés et le cas k=0 est régulièrement omis. Les propriétés de ce type d'intégrales devaient être établies, ce qui est fait dans les meilleures copies.

La dernière partie permettait de conclure le problème, et présentait des calculs parfois simples, parfois demandant plus de subtilités (question 2 ou 3b).