BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2009

Conception : HAUTES ETUDES COMMERCIALES

280

OPTION SCIENTIFIQUE

HEC__MATS

MATHEMATIQUES

Mardi 28 avril 2009, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Le problème a pour objet l'étude de quelques propriétés des suites récurrentes linéaires intervenant notamment dans l'analyse de processus aléatoires utilisés en prévision économique, ainsi que leur lien avec la notion de polynôme minimal.

Les parties II, III et IV sont indépendantes de la partie I.

Partie I. Deux exemples

Exemple 1.

1. On considère la suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $s_1 = 1, s_2 = \frac{4}{5}, s_3 = \frac{2}{5}$ et la relation : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $s_{n+3} = \frac{3}{2}s_{n+2} - s_{n+1} + \frac{1}{4}s_n$.

a) Écrire une fonction Pascal d'en-tête `suite(s1,s2,s3 : real, n : integer) : real` qui, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, renvoie le n-ième terme de cette suite.

b) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité : $s_n = \frac{1}{5\times 2^{n-2}} + \frac{3}{5\times 2^{(n-2)/2}} \times \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$.

c) Déterminer la limite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

d) Montrer que le polynôme $P(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + X - \frac{1}{4}$ admet une unique racine réelle λ_1, valant $\frac{1}{2}$; déterminer ses deux racines complexes λ_2 et λ_3 dont on précisera le module et un argument.

e) On admet qu'il existe trois nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vérifiant, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la relation suivante : $s_n = \frac{\alpha_1}{2^n} + \alpha_2\lambda_2^n + \alpha_3\lambda_3^n$. Calculer α_1, α_2 et α_3. Retrouver la limite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exemple 2.

Soit (x, y) un élément de $\mathbb{R}^2$ et P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $P(X) = X^2 - xX - y$. On note r_1 et r_2 les racines réelles ou complexes, distinctes ou confondues du polynôme P.

2. a) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{D}$ des points de coordonnées (x,y) défini par :

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |y| < 1 \text{ et } |x| < 1 - y\}$$

b) Distinguer sur le graphique la partie de $\mathcal{D}$ dans laquelle les racines de P sont réelles.

3. En étudiant séparément le cas où les racines r_1 et r_2 sont réelles et le cas où elles sont complexes, établir l'équivalence des trois conditions suivantes :

i) $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$.

ii) $P(-1) > 0, P(1) > 0$ et $|r_1 r_2| < 1$.

iii) $|y| < 1$ et $|x| < 1 - y$.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé et admettant un moment d'ordre 2. On note $E(A)$ et $V(A)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire A de $\mathcal{E}$. Si A et B appartiennent à $\mathcal{E}$, leur covariance est notée $\text{cov}(A,B)$.

On appelle *processus aléatoire* $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, toute application Y définie sur $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathcal{E}$.

Soit $W = (W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus aléatoire constitué de variables aléatoires mutuellement indépendantes, vérifiant pour tout t de $\mathbb{Z}$, les égalités suivantes : $E(W_t) = 0$ et $V(W_t) = \sigma^2$, avec σ strictement positif fixé.

Soit (a_1, a_2) un élément de $\mathbb{R}^2$. On considère un processus aléatoire $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ formé de variables aléatoires *centrées, de même variance strictement positive* et qui vérifient, pour tout t de $\mathbb{Z}$:

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + W_t$$

On suppose que :

- pour tout couple (t,k) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $\text{cov}(W_t, Y_{t-k}) = 0$;
- pour tout couple (t,k) de $\mathbb{Z}^2$, $\text{cov}(Y_t, Y_{t-k})$ ne dépend que de k.

On pose alors, pour tout k de $\mathbb{Z}$: $\gamma_k = \text{cov}(Y_t, Y_{t-k})$ et $\rho_k = \dfrac{\gamma_k}{\gamma_0}$.

4. a) Que représente γ_0 pour le processus Y ?

b) Établir, pour tout k de $\mathbb{Z}$, l'égalité : $\gamma_{-k} = \gamma_k$.

c) Montrer, pour tout t de $\mathbb{Z}$, l'égalité : $\text{cov}(W_t, Y_t) = \sigma^2$.

5. *On suppose dans cette question que le couple (a_1, a_2) appartient à l'ensemble $\mathcal{D}$ défini dans la question 2.a.*

a) Exprimer γ_1 et γ_2 en fonction de γ_0, a_1 et a_2. En déduire l'expression de ρ_1 et ρ_2 en fonction de a_1 et a_2.

b) Établir les deux inégalités : $a_1\rho_1 + a_2\rho_2 \geqslant 0$ et $|\rho_1| < 1$, ainsi que l'encadrement : $0 \leqslant a_1\rho_1 + a_2\rho_2 < 1$.

c) Exprimer γ_0 en fonction de $\sigma^2, a_1, a_2, \rho_1$ et ρ_2.

6. a) Montrer que la suite $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

b) Soit r_1 et r_2 les racines du polynôme $P(X) = X^2 - a_1 X - a_2$. Montrer que la suite $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$ (on distinguera trois cas : r_1 et r_2 réels avec $|r_1| < |r_2|$, r_1 et r_2 réels avec $|r_1| = |r_2|$, r_1 et r_2 complexes conjugués).

Partie II. Suites récurrentes linéaires d'ordre p

Dans cette partie, p est un entier de $\mathbb{N}^*$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un élément de $\mathbb{C}^p$ vérifiant $a_p \neq 0$. On note $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes et $\mathcal{S}_p$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ formé des suites $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ récurrentes linéaires d'ordre p, c'est-à-dire, qui vérifient pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$s_{n+p} = a_1 s_{n+p-1} + a_2 s_{n+p-2} + \cdots + a_p s_n$$

7. Montrer que $\mathcal{S}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

8. Soit Φ l'application de $\mathcal{S}_p$ dans $\mathbb{C}^p$ qui, à toute suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{S}_p$, associe le p-uplet $(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ de $\mathbb{C}^p$. Montrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de $\mathcal{S}_p$.

9. On note $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{C}^p$ et Φ^{-1} l'application réciproque de Φ. Pour tout i de $[\![1, p]\!]$, on considère la suite $v^{(i)} = (v_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v^{(i)} = \Phi^{-1}(e_i)$.

a) Justifier que la famille $(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(p)})$ constitue une base de $\mathcal{S}_p$. Préciser les coordonnées de toute suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{S}_p$ dans la base $(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(p)})$.

b) Calculer, pour tout j de $[\![1, p]\!]$, $v_j^{(1)}, v_j^{(2)}, \ldots, v_j^{(p)}$. Montrer que, pour tout i de $[\![1, p]\!]$, on a : $v_{p+1}^{(i)} = a_{p-i+1}$.

10. Soit δ l'application définie sur $\mathcal{S}_p$ par : pour toute suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{S}_p$, $\delta(s) = (s_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a) Montrer que δ est un endomorphisme de $\mathcal{S}_p$.

b) Déterminer la matrice Δ de δ dans la base $(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(p)})$.

11. Soit P le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par : $P(X) = X^p - a_1X^{p-1} - \cdots - a_{p-1}X - a_p$.

a) Montrer que λ est une valeur propre de δ si et seulement si λ est une racine de P.

b) Soit λ une valeur propre de δ. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à λ, et en déduire une condition nécessaire et suffisante sur P pour que δ soit diagonalisable.

c) On suppose que P admet p racines distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Établir, pour toute suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{S}_p$, l'existence d'un unique p-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ de $\mathbb{C}^p$ tel que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on ait : $s_n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i^n$.

Partie III. Polynôme minimal d'une suite récurrente linéaire

Le contexte et les notations de cette partie sont ceux du préambule de la partie II et de la question 10.
On considère une suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{S}_p$. On dit qu'un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$ est un *polynôme générateur de la suite* s, si $[Q(\delta)](s) = 0_{\mathcal{S}_p}$. On note J l'ensemble des polynômes générateurs de la suite s.

12. Montrer que J n'est pas réduit au polynôme nul.

13. Montrer que J est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

14. Montrer que, si Q est un polynôme de J et A un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, alors $Q \times A$ appartient à J.

15. On note N l'ensemble des degrés des polynômes non nuls de J.

a) Justifier l'existence d'un polynôme Π de J tel que son degré soit le plus petit élément de N. On note d le degré de Π.

b) En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que J est l'ensemble des polynômes de la forme $\Pi \times L$, avec L élément de $\mathbb{C}[X]$.

c) En déduire qu'il existe un unique polynôme de J, noté Π^*, de coefficient dominant égal à 1 et de degré d.
On dit que Π^* *est le polynôme générateur minimal de* s *et que son degré* d *est le degré de la suite* s.

16. *Un exemple.* Déterminer le polynôme générateur minimal et le degré de la suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ récurrente linéaire d'ordre 3 définie par $s_1 = 0, s_2 = s_3 = 1$ et la relation : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $s_{n+3} = 2s_{n+1} + s_n$.

17. Soit $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite récurrente linéaire de degré d ($d \geqslant 1$) et soit k un entier strictement supérieur à d. On note H la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ définie par :

$$H = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_k \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & \cdots & s_{2k-1} \end{pmatrix}$$

Pour tout j de $[\![1, k]\!]$, on note U_j la j-ième colonne de H. On désigne par h l'endomorphisme de $\mathbb{C}^k$ canoniquement associé à H et, pour tout j, on note u_j le vecteur de $\mathbb{C}^k$ canoniquement associé à U_j.

a) Montrer que la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_d)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(h)$.

b) Établir que, pour tout j de $[\![d+1, k]\!]$, la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_d, u_j)$ est liée. En déduire le rang de h et la dimension de $\mathrm{Ker}(h)$.

c) Montrer qu'un polynôme $Q(X) = \sum_{j=0}^{k-1} q_j X^j$ de $\mathbb{C}[X]$ appartient à J, si et seulement si l'élément $(q_0, q_1, \ldots, q_{k-1})$ de $\mathbb{C}^k$ appartient à $\mathrm{Ker}(h)$.

d) *Un exemple.* Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite récurrente linéaire de degré inférieur ou égal à 3 dont les premiers termes sont : $-1, 7, 5, 19, 29, 67, 125$. Déterminer le polynôme générateur minimal de cette suite.

Partie IV. Un algorithme de calcul d'un polynôme générateur d'une suite récurrente linéaire

Soit d et k deux entiers tels que $1 \leqslant d \leqslant k$ et soit $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe récurrente linéaire de degré d dont on connaît les $2k$ premiers termes ; on pose : $S(X) = \sum_{i=0}^{2k-1} s_{2k-i} X^i$. On note $\mathbb{C}_k[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à k. Soit $Q(X) = \sum_{j=0}^{k} q_j X^j$ un polynôme de $\mathbb{C}_k[X]$. Le degré d'un polynôme T est noté $\deg(T)$.

18. On note $(\star)$ la relation suivante : pour tout n de $[\![1, k]\!]$, on a $\sum_{j=0}^{k} q_j s_{n+j} = 0$.

Montrer que Q est un polynôme générateur de la suite s si et seulement si la relation $(\star)$ est vérifiée.

19. a) On pose, pour tout n de $[\![0, 3k-1]\!]$: $t_n = \sum_{i\in[\![0,2k-1]\!], j\in[\![0,k]\!] \atop i+j=n} q_j s_{2k-i}$. Établir l'égalité : $QS = \sum_{n=0}^{3k-1} t_n X^n$.

b) On suppose la relation $(\star)$ vérifiée. Montrer, pour tout n de $[\![k, 2k-1]\!]$, l'égalité : $t_n = 0$. En déduire l'existence de deux polynômes A et B de $\mathbb{C}_{k-1}[X]$ vérifiant : $QS = A + X^{2k}B$.

c) Réciproquement, on suppose qu'il existe deux polynômes A et B de $\mathbb{C}_{k-1}[X]$ vérifiant : $QS = A + X^{2k}B$. Montrer que la relation $(\star)$ est vérifiée.

20. Dans l'algorithme suivant, les variables A, B, C, D, E, F, R, S sont des polynômes, k une constante entière. L'entier k et le polynôme S ont les valeurs données précédemment.

Initialisation : $A := X^{2k}$, $B := S$, $C := 0$, $D := 1$.

Corps :

Tant que $\deg(B) \geqslant k$

effectuer la division euclidienne de A par B, $A = BF + R$ avec $R = 0$ ou $\deg(R) < \deg(B)$.

$E := C - DF$.

$C := D$, $D := E$, $A := B$, $B := R$.

Fin de Tant que.

Sortie : Rendre D et B.

Si U et V sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels qu'il existe un polynôme W de $\mathbb{C}_{k-1}[X]$ vérifiant $U = V + X^{2k}W$, on notera : $U \equiv V$.

a) Montrer que cet algorithme se termine, c'est-à-dire que l'on sort de la boucle.

b) Montrer qu'à l'initialisation, on a :
$\deg(C) \leqslant 2k - \deg(A)$, $\deg(D) \leqslant 2k - \deg(A)$, $k \leqslant \deg(B) \leqslant \deg(A)$, $CS \equiv A$, $DS \equiv B$.

c) On suppose qu'à l'issue du j-ième passage dans la boucle, les relations précédentes sont vérifiées. Montrer qu'elles le sont encore à l'issue du $(j+1)$-ième passage.

d) Montrer que lorsque l'algorithme se termine, l'une des variables contient un polynôme générateur de la suite s. Quelle est cette variable ?

MATHEMATIQUES S
(épreuve n°280)

Epreuve conçue par HEC

Voie scientifique

Le sujet

Le sujet de l'option scientifique avait pour objet l'étude de quelques propriétés des suites récurrentes linéaires d'ordre p.

La partie I proposait deux exemples : le premier à caractère analytique faisait intervenir les racines complexes d'un polynôme de degré 3, le second de nature probabiliste, utilisait les notions d'auto covariance et d'auto corrélation d'un processus aléatoire autorégressif d'ordre 2 (définies dans l'énoncé) pour étudier les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité d'un tel processus (suites de Yule-Walker). Ce type de processus constitue un instrument fondamental pour l'analyse et la prévision élémentaires des séries chronologiques rencontrées en macroéconomie et en finance. La partie II, plus classique et plus proche du cours de classes préparatoires, faisait appel aux propriétés d un endomorphisme « décalage » pour exprimer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre p. Enfin, les parties III et IV étaient consacrées, d'une part, à la recherche du polynôme générateur minimal d'une suite récurrente linéaire et d'autre part, à l'écriture en français d'un algorithme de calcul d'un polynôme générateur d'une telle suite.

Les résultats statistiques

Les deux exemples de la première partie du problème représentaient 40% du total du barème de notation, les parties II et III comptant chacune pour 22% et la partie IV ayant un poids de 16% dans le barème.
Sur les 2667 candidats présents à cette épreuve, la note moyenne s'établit à 10,05 avec un écart-type de 4,34. Ces résultats ne présentent de différence significative avec ceux du concours 2008. Par école, les statistiques sont les suivantes :

Un peu plus de 10% des candidats de cette option scientifique ont obtenu une note supérieure à 16, tandis que près d'un tiers de l'ensemble des candidats se voient attribuer une note supérieure à 12. Signalons enfin 14 candidats remarquables qui obtiennent la note maximale de 20.

Commentaires

Les principales remarques, les insuffisances les plus importantes et les erreurs les plus fréquentes se situent dans les questions suivantes :

- La moitié des candidats résout avec des succès divers la question 1.a) concernant l'écriture d'une fonction en Pascal, l'autre moitié ayant manifestement fait « l'impasse » sur cette partie du cours ;
- les calculs relatifs aux questions de l'exemple 1 sont très rarement conduits à leur terme et la notion d'argument d'un nombre complexe est très mal connue ;
- les candidats ayant abordé l'exemple 2 s'en sortent honorablement, en particulier dans les questions 4, 5.a) et 5.c), l'encadrement de la question 5.b) donnant lieu, en revanche, à de très rares bonnes réponses ;
- la question 8 pose problème à une très grande majorité de candidats qui éprouvent beaucoup de difficultés avec l'aspect « bijectif » d'un isomorphisme ;
- la matrice de la question 10.b) est rarement trouvée ;
- si la question 13 est souvent bien résolue, on observe en revanche beaucoup de candidats qui ignorent les règles de calcul relatives aux polynômes d'endomorphismes ;
- ce sont uniquement les meilleurs candidats qui entreprennent la résolution de la question 15 et raisonnent correctement à partir de la division euclidienne ;
- la partie IV fait l'objet de « grappillages » de points mais on observe que certains candidats parviennent à expliquer avec de bons arguments, les raisons pour lesquelles l'algorithme se termine ;
- les deux exemples des questions 16 et 17.d) ne « font pas recette » : pratiquement, aucun candidat ne les aborde.