BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

**Conception : HEC Paris**

OPTION SCIENTIFIQUE

# MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril 2018, de 14 h. à 18 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

---

*Hormis le résultat de la question 12.b), la partie IV est indépendante du préliminaire et des parties I, II et III.*

## Préliminaire

1.a) Établir pour tout entier naturel $k$, la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$.

On pose alors, $A_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$, $A_k = \int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$.

b) Calculer $A_0$, $A_1$ et $A_2$.

2. Déduire de la question 1.a) la convergence, pour tout $x$ réel, des deux intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(2\,x\,t)\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} t\, \mathrm{e}^{-t^2} \sin(2\,x\,t)\, \mathrm{d}t\,.$$

## Partie I. Calcul d'une fonction auxiliaire

On note $F$ et $G$ respectivement, les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(2\,x\,t)\, \mathrm{d}t \ \text{ et }\ G(x) = \int_0^{+\infty} t\, \mathrm{e}^{-t^2} \sin(2\,x\,t)\, \mathrm{d}t\,.$$

*Dans cette partie, on veut montrer d'une part, que la fonction $F$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et d'autre part, donner pour tout réel $x$, l'expression de $F(x)$.*

3.a) À l'aide d'une formule de Taylor, établir pour tout réel $u$, l'inégalité : $|\sin(u)| \leqslant |u|$.

b) Pour tous réels $u$ et $v$, justifier la formule trigonométrique : $\cos(u) - \cos(v) = 2\,\sin\left(\dfrac{u+v}{2}\right) \sin\left(\dfrac{v-u}{2}\right)$.

c) En déduire que la fonction $F$ est continue sur $\mathbf{R}$.



Tournez la page S.V.P.

4. a) Pour tout réel $u$, justifier à l'aide d'une formule de Taylor, l'inégalité : $|u - \sin(u)| \leqslant \dfrac{u^2}{2}$.

   b) Pour tous réels $x$ et $h$, établir l'inégalité :

$$|F(x+h) - F(x) + 2h\,G(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \Big(\big|(2ht - \sin(2ht))\sin(2xt)\big| + \big(1 - \cos(2ht)\big)\big|\cos(2xt)\big|\Big)\,\mathrm{d}t$$

   (On pourra admettre l'existence de l'intégrale du second membre, qui découle du préliminaire)

   c) En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall (x,h) \in \mathbf{R}^2,\ |F(x+h) - F(x) + 2h\,G(x)| \leqslant Ch^2.$$

5.a) Justifier que la fonction $F$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et exprimer sa fonction dérivée $F'$ à l'aide de la fonction $G$.

   b) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout réel $x$, on a : $F'(x) = -2\,x\,F(x)$.

   c) En déduire que pour tout réel $x$, on a : $F(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

**Partie II. Fonction de Dirichlet**

6. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $\varphi_n$ la fonction définie sur $\mathcal{D} = \mathbf{R} \setminus \{2\,k\,\pi\,;\, k \in \mathbf{Z}\}$ par :

$$\forall u \in \mathcal{D},\ \varphi_n(u) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{2\,\sin\left(\frac{u}{2}\right)}.$$

   ( L'ensemble $\mathcal{D}$ est l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des multiples de $2\pi$)

   a) Montrer que la fonction $\varphi_n$ est continue sur $\mathcal{D}$ et prolongeable par continuité en 0.

   b) En déduire que la fonction $\varphi_n$ admet un prolongement continu sur $\mathbf{R}$.
   On note encore $\varphi_n$ la fonction ainsi prolongée sur $\mathbf{R}$.

   c) Montrer que la fonction $\varphi_n$ est paire.

7. On note $i$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

   a) Pour tout réel $u$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{iku}$.

   b) En déduire la relation : $\forall u \in \mathbf{R},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\,u) = \varphi_n(u) - \frac{1}{2}$.

   c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u$.

8. Soit $\psi$ une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et périodique de période $T$. Établir pour tout réel $x$, l'égalité :

$$\int_x^{x+T} \psi(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T \psi(u)\,\mathrm{d}u.$$

**Partie III. Formule sommatoire de Poisson**

*Dans cette partie, on note $\theta$ un réel strictement positif* fixé *et on considère la fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles telle que : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{-\theta x^2}$.*

9.a) Montrer que pour tout réel $x$, les deux séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} f(x + 2k\,\pi)$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} f(x - 2k\,\pi)$ sont convergentes.

   On pose alors : $\forall x \in \mathbf{R},\ H(x) = f(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f(x + 2k\,\pi) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(x - 2k\,\pi)$.

*On définit ainsi une fonction $H$ sur $\mathbf{R}$ et on admet sans démonstration dans toute la suite du problème que la fonction $H$ est de classe $C^1$ sur $\mathbf{R}$.*

b) Préciser la parité de la fonction $H$ et de sa fonction dérivée $H'$.

10. Dans cette question, on note $n$ un entier naturel **fixé**.

Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, soit $H_N$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ H_N(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{N} f(x + 2k\pi) + \sum_{k=1}^{N} f(x - 2k\pi)\,.$$

a) Établir l'égalité : $\displaystyle\int_0^{2\pi} H_N(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-2N\pi}^{2(N+1)\pi} f(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u$.

b) En déduire que l'on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} H_N(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u$.

c) Établir pour tout réel $x$, l'inégalité : $\displaystyle |H(x) - H_N(x)| \leqslant 2 \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-4\theta\pi^2k^2}$.

d) En déduire les égalités :

$$\int_0^{2\pi} H(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \times \exp\Big(-\frac{n^2}{4\theta}\Big)\cdot$$

11. Soit $x$ un réel appartenant au segment $[0, 2\pi]$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $\displaystyle a_n = \int_0^{2\pi} H(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

a) Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, établir l'égalité :

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) = \int_0^{2\pi} H(u) \times \varphi_N(u + x)\,\mathrm{d}u + \int_0^{2\pi} H(u) \times \varphi_N(u - x)\,\mathrm{d}u\,,$$

où la fonction $\varphi_N$ a été définie dans la question 6.

b) En déduire l'égalité :

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) = \int_0^{2\pi} \Big(\frac{H(v + x) + H(v - x)}{2\sin(v/2)}\Big) \times \sin\Big(\Big(N + \frac{1}{2}\Big)v\Big)\,\mathrm{d}v\,.$$

c) Justifier la continuité sur le segment $[0, 2\pi]$ de la fonction $K_x$ définie par :

$$K_x(v) = \begin{cases} \dfrac{H(v + x) + H(v - x) - 2H(x)}{2\sin(v/2)} & \text{si } v \in \,]0, 2\pi[ \\ 0 & \text{si } v = 0 \text{ ou } v = 2\pi \end{cases}.$$

d) À l'aide de la question 7.c), établir l'égalité :

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) - 2\pi H(x) = \int_0^{2\pi} K_x(v) \times \sin\Big(\Big(N + \frac{1}{2}\Big)v\Big)\,\mathrm{d}v\,.$$

12.a) Soit $g$ une fonction définie et de classe $C^1$ sur le segment $[0, 1]$.

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque le réel $\lambda$ tend vers $+\infty$.

*On admet* plus généralement que si $g$ est une fonction continue sur un segment $[\alpha, \beta]$ $(\alpha < \beta)$, alors :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} g(t) \sin(\lambda t)\, \mathrm{d}t = 0\,.$$

b) Établir pour tout réel $x \in [0, 2\pi]$ et pour tout réel $\theta > 0$, la relation (*formule sommatoire de Poisson*) :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\,\theta}} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left( - \frac{n^2}{4\,\theta} \right) \cos(nx) \right) = \mathrm{e}^{-\theta x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\theta (x+2k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\theta (x-2k\pi)^2}\,.$$

## Partie IV. Une application probabiliste de la formule sommatoire de Poisson

Soit $p$ un réel vérifiant $0 < p < 1$.
Deux joueurs A et B lancent tour à tour une pièce de monnaie.
Le jet de la pièce donne «Pile» avec la probabilité $p$ et «Face» avec la probabilité $1 - p$.
Le vainqueur de la partie est le joueur qui obtient «Pile» le premier, auquel cas la partie s'arrête.
Le premier lancer (de rang 1) est effectué par le joueur A.
Si la partie ne s'arrête pas avant, les trois lancers suivants (de rangs 2, 3 et 4) sont effectués par le joueur B, les cinq suivants (de rangs 5, 6, 7, 8 et 9) par le joueur A, et ainsi de suite.
Après chaque changement de main, le joueur qui reprend la main peut ainsi effectuer (au maximum) deux lancers de plus que ceux que vient d'effectuer l'autre joueur.
On suppose que les résultats des lancers successifs sont indépendants.

13.a) Compléter la fonction *Scilab* suivante qui simule une partie effectuée selon les règles précédentes et affiche le vainqueur.

```
function v=jeu(p)
    i=1 ;
    v=1 ;
    s=1 ;
    j=1 ;
    while rand()> p
        i=i+1 ;
        j=j+1 ;
        if j>s then v=-v ; // changement de main
                    s= ............ ;
                    j= ............ ;
                    end ;
    end ;
    if v==1 then disp("A vainqueur") ; else disp("B vainqueur") ;
    end ;
endfunction
```

b) Que représente la valeur de $i$ après l'exécution de la fonction «jeu» ?

c) Préciser la signification de la variable $v$.

d) Compléter le code de la fonction «jeu» pour qu'elle affiche le nombre de lancers effectués par le joueur A.

e) Écrire un code *Scilab* permettant d'obtenir une valeur approchée de la probabilité que le vainqueur du jeu soit le joueur A.

14. On suppose que l'expérience aléatoire précédente est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P_p)$.
On note :

- $X$ le nombre de lancers effectués par le joueur A et $I$ l'ensemble des rangs possibles de ses lancers $1, 5, 6, \dots$ ;
- $Y$ le nombre de lancers effectués par le joueur B et $J$ l'ensemble des rangs possibles de ses lancers $2, 3, 4, \dots$ ;
- $H$ l'événement aléatoire « le vainqueur est A » ;
- $K$ l'événement aléatoire « le vainqueur est B ».

a) Justifier que $P_p(H \cup K) = 1$ et identifier la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{p \to 1} P_p(H) = 1$.

15.a) Justifier que l'ensemble $I$ est inclus dans la réunion $\bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} [\![ 4n^2 + 1, 4n^2 + 4n + 1 ]\!]$.

b) Démontrer que : $P_p(H) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left( (1-p)^{4n^2} - (1-p)^{4n^2+4n+1} \right)$. Donner une expression similaire pour $P_p(K)$.

16.a) En utilisant le résultat de la question 12.b), établir l'inégalité **stricte** suivante : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \, (1-p)^{n^2} > \dfrac{1}{2}$.

b) Que peut-on en déduire concernant le jeu considéré ?

**FIN**