



# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteurs : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

CODE ÉPREUVE :

283

CCIP\_M2\_S

Mercredi 10 Mai 2006, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le problème a pour objet l'étude de quelques propriétés concernant le nombre de racines réelles d'un polynôme de degré  $n$ , ( $n \geq 1$ ), à coefficients réels fixés ou aléatoires.

Dans les parties II et III, les polynômes considérés sont à coefficients réels et on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

Pour toute fonction  $\Psi$  dérivable sur son domaine de définition, la dérivée de  $\Psi$  est notée  $\Psi'$ .

Les quatre parties du problème sont, dans une large mesure, indépendantes.

## Partie I. Nombre de racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires

On considère dans cette partie, deux variables aléatoires réelles  $X_0$  et  $X_1$  définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes et de même loi.

Pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , on considère le polynôme  $Q_\omega$  d'indéterminée  $y$ , défini par :

$$Q_\omega(y) = y^2 + X_1(\omega)y + X_0(\omega)$$

On désigne par  $M(\omega)$  le nombre de racines réelles de  $Q_\omega$ .

1. Montrer que l'application  $M$  qui, à tout  $\omega$  de  $\Omega$  associe  $M(\omega)$ , est une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

2. Soit  $Z$  une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , qui suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  ( $p \in ]0, 1[$ ).

On suppose dans cette question que  $X_0$  et  $X_1$  suivent la même loi que  $2Z - 1$ .

a) Déterminer la loi de  $X_0$ .

b) Déterminer la loi de  $M$  et calculer son espérance  $E(M)$ .

Dans les questions suivantes, on suppose que  $X_0$  et  $X_1$  suivent une même loi exponentielle de paramètre 1/2.

On pose :  $Y_0 = -4X_0$ ,  $Y_1 = X_1^2$ ,  $Y = Y_1 + Y_0$ , et on note  $F_{Y_0}$ ,  $F_{Y_1}$  et  $F_Y$ , les fonctions de répartition de  $Y_0$ ,  $Y_1$  et  $Y$ , respectivement.

3. Montrer que l'on a, pour tout  $x$  réel :

$$F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_{Y_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ e^{x/8} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En déduire l'expression d'une densité  $f_{Y_0}$  de  $Y_0$  et d'une densité  $f_{Y_1}$  de  $Y_1$ .

4. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par  $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t}{4} + \sqrt{t} \right) \right]$ , où  $\exp$  désigne la fonction exponentielle.

a) Établir la convergence de l'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ .

b) En déduire qu'une densité  $f_Y$  de la variable aléatoire  $Y$  est donnée, pour tout  $x$  réel, par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{32} e^{x/8} \int_0^{+\infty} g(t) dt & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{32} e^{x/8} \int_x^{+\infty} g(t) dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

5. On désigne par  $\Phi$  la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, réduite.

a) Justifier la validité du changement de variable  $u = \sqrt{t}$  dans l'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ .

b) En déduire que  $\int_0^{+\infty} g(t) dt = 4\sqrt{e} \int_1^{+\infty} e^{-v^2/2} dv$ , et donner, pour tout réel  $x$  négatif, l'expression de  $f_Y(x)$  en fonction de  $\Phi$ .

c) Montrer que, pour tout réel  $x$  positif, on a :  $f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8} e^{x/8} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\sqrt{x}}{2} + 1 \right) \right]$ .

d) Déterminer la loi de  $M$  et son espérance  $E(M)$  (on fera intervenir le nombre  $\Phi(1)$ ).

## Partie II. Suites de Sturm

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 1, et soit  $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  un polynôme normalisé ( $a_n = 1$ ) donné, à coefficients réels. On suppose que toutes les racines réelles de  $P$  sont simples.

L'objectif de cette partie est de décrire un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de  $P$  appartenant à un intervalle donné  $[a, b]$ .

On associe au polynôme  $P$ , la suite  $(R_i)_{i \geq 0}$  de polynômes définie de la manière suivante :  $R_0 = P, R_1 = -P'$ , et pour tout entier  $j$  tel que  $R_{j+1} \neq 0$ , le polynôme  $R_{j+2}$  est l'opposé du reste de la division euclidienne de  $R_j$  par  $R_{j+1}$ . Si  $R_{j+1} = 0$ , on pose  $R_{j+2} = 0$ .

1. Montrer qu'il existe un entier  $k$  ( $k \geq 2$ ), tel que  $R_k = 0$ . On note  $R_m$ , ( $m \geq 1$ ), le dernier polynôme non nul de la suite  $(R_i)_{i \geq 0}$ .

Dans toute cette partie, on pose :

$$\begin{cases} R_0 = S_1 R_1 - R_2 \\ R_1 = S_2 R_2 - R_3 \\ \vdots \\ R_{m-2} = S_{m-1} R_{m-1} - R_m \\ R_{m-1} = S_m R_m \end{cases}$$

2. a) Montrer que s'il existe un entier  $j$  de  $\llbracket 0, m-1 \rrbracket$  et un réel  $x_0$  tels que  $R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0$ , alors  $P(x_0) = P'(x_0) = 0$ .

b) En déduire que le polynôme  $R_m$  n'admet pas de racine réelle.

c) Soit  $j$  un entier de  $\llbracket 1, m-1 \rrbracket$ . Montrer que si  $x_0$  est une racine réelle de  $R_j$ , alors  $R_{j-1}(x_0) \times R_{j+1}(x_0) < 0$ .

3. Soit  $s = (s_1, s_2, \dots, s_t)$  une  $t$ -liste ( $t \geq 2$ ) de nombres réels non tous nuls. On ôte de  $s$  tous les éléments nuls en préservant l'ordre, et on obtient ainsi une  $p$ -liste ( $p \leq t$ )  $\hat{s} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_p)$ . On appelle *nombre de changements de signe de  $s$* , le nombre d'éléments de l'ensemble  $\mathcal{E}$  défini par :  $\mathcal{E} = \{i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \mid \widehat{s_i s_{i+1}} < 0\}$ . Si  $p = 1$ , on dit que le nombre de changements de signe est nul.

Par exemple, si  $s = (0, 3, 0, 5, -3, 2)$ , on a :  $\hat{s} = (3, 5, -3, 2)$ , et le nombre de changements de signe est égal à 2.

Pour tout réel  $x$ , on note respectivement  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  et  $C(x)$ , le nombre de changements de signe du couple  $(R_0(x), R_1(x))$ , de la  $m$ -liste  $(R_1(x), R_2(x), \dots, R_m(x))$ , et de la  $(m+1)$ -liste  $(R_0(x), R_1(x), R_2(x), \dots, R_m(x))$ . On désigne par  $x_0$  une racine réelle du polynôme  $P$ .

- a) En étudiant les variations de  $P$  au voisinage de  $x_0$ , montrer qu'il existe un réel  $\delta_1 > 0$  tel que, si  $h \in ]0, \delta_1[$ , on a :  $C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1$ .
- b) À l'aide de la question 2. c), montrer qu'il existe un réel  $\delta_2 > 0$  tel que, si  $h \in ]0, \delta_2[$ , on a :  $C_2(x_0 + h) = C_2(x_0 - h)$  (on distinguera les deux éventualités : soit,  $x_0$  n'est racine d'aucun des polynômes  $R_1, R_2, \dots, R_m$ , soit, il existe un entier  $j$  de  $[1, m-1]$  tel que  $R_j(x_0) = 0$ ).
- c) Dédire des deux questions précédentes que pour  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  et  $h \in ]0, \delta[$ , on a  $C(x_0 + h) - C(x_0 - h) = 1$ , et que si  $a$  et  $b$  sont deux réels qui ne sont pas racines de  $P$  et qui vérifient  $a < b$ , alors le nombre de racines réelles de  $P$  dans  $[a, b]$  est égal à  $C(b) - C(a)$ .

4. a) Soit  $\alpha$  une racine (réelle ou complexe) de  $P$ . Montrer que si  $|\alpha| \geq 1$ , alors  $|\alpha|^n \leq |\alpha|^{n-1} \times \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$ . En

dédire, pour toute racine  $\alpha$  de  $P$ , l'inégalité :  $|\alpha| \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$ .

b) Écrire en français, un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de  $P$ .

5. On définit en Pascal

`const n = ... ;`

`Type tab = array[1..n] of real ;`

`Var T : tab ;`

Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est `Function nbchgs(T : tab) : integer` qui donne le nombre de changements de signe dans la suite de réels  $(T[1], T[2], \dots, T[n])$ .

On tiendra compte du fait que le tableau  $T$  peut contenir des éléments nuls. La fonction `nbchgs` n'utilisera que le tableau  $T$  et aucun autre tableau auxiliaire. On expliquera en français la démarche utilisée.

### Partie III. Un majorant du nombre de racines réelles de $P$

Soit  $V$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  tel que  $V(X) = v_m X^m + v_{m-1} X^{m-1} + \dots + v_1 X + v_0$ , avec  $v_m \neq 0$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ . On note  $V^*$  le polynôme réciproque du polynôme  $V$ , défini par :  $V^*(X) = v_0 X^m + v_1 X^{m-1} + \dots + v_{m-1} X + v_m$ . Soit  $n$  un entier de  $\mathbb{N}^*$ . On considère l'application  $T$  qui, à tout polynôme  $P$  de degré  $n$ , normalisé, à coefficients réels,  $P(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ , associe le polynôme  $T(P)$  défini par  $T(P)(X) = X P'(X)$ .

On désigne par  $N_0(P)$  le nombre de racines non nulles de  $P$  dans l'intervalle  $[-1, 1]$  comptées avec leurs ordres de multiplicité, par  $N_1(P)$  le nombre de racines de  $P$  dans  $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$  comptées avec leurs ordres de multiplicité, et par  $N(P)$  le nombre de racines réelles de  $P$  comptées avec leurs ordres de multiplicité.

1. a) Établir, à l'aide du théorème de Rolle, l'inégalité :  $N_1(P) \leq N_1(T(P)) + 2$ .

b) Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose  $T^k = T \circ T \circ \dots \circ T$  ( $k$  fois). Montrer que  $N_1(P) \leq N_1(T^k(P)) + 2k$ .

2. a) Montrer que pour tout réel  $x$  non nul, on a  $P^*(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ .

b) Montrer que  $N_1(P) = N_0(P^*)$ .

3. Pour tout réel  $x$  et pour tout entier naturel  $k$  non nul, on pose :

$$Q_k(x) = 1 + a_{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k x + a_{n-2} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k x^2 + \dots + a_1 \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k x^{n-1}. \text{ Montrer que } (T^k(P))^* = n^k Q_k.$$

4. a) Établir, pour tout réel  $y$  de  $[0, 1]$ , l'inégalité :  $(1 - y)e^y \leq 1$ .

b) On **admet** la propriété suivante : soit  $r$  et  $\rho$  deux réels tels que  $0 < r < \rho$ . On note  $D_\rho = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq \rho\}$ . Soit  $U$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  tel que  $U(0) \neq 0$ . Soit  $\mu$  un réel strictement positif tel que pour tout  $z$  de  $D_\rho$ ,  $|U(z)| \leq \mu$ . Alors, le nombre de racines réelles de  $U$  comptées avec leurs ordres de multiplicité, dans l'intervalle  $[-r, r]$ , est majoré par le réel :  $\frac{1}{\ln\left(\frac{\rho}{r}\right)} \times \ln\left(\frac{\mu}{|U(0)|}\right)$ .

En appliquant cette propriété au polynôme  $Q_k$  avec  $r = 1$  et  $\rho = e^{k/n}$ , ( $k \in \mathbb{N}^*$ ), déduire des questions précédentes que pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a :  $N_1(P) \leq 2k + \frac{n}{k} \ln(L(P))$ , avec  $L(P) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$ .

- c) Soit  $\psi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par :  $\psi(x) = 2x + \frac{\theta}{x}$ , où  $\theta$  est un paramètre réel positif.
- Étudier les variations de  $\psi$ .
  - Montrer que  $\psi(\sqrt{\theta/2} + 1) \leq 2 + 2\sqrt{2\theta}$ .
  - En déduire l'inégalité :  $N_1(P) \leq 2 + 2\sqrt{2n \ln(L(P))}$ .
- d) En supposant  $a_0 \neq 0$ , on démontrerait de même (et on admettra dans la suite du problème) que :

$$N_0(P) \leq 2 + 2\sqrt{2n \ln \left( \frac{L(P)}{|a_0|} \right)}$$

Conclure en donnant un majorant de  $N(P)$ , fonction des coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ .

#### Partie IV. Nombre de racines réelles d'un polynôme de degré $n$ à coefficients aléatoires

Pour  $n$  entier supérieur ou égal à 2, on considère dans cette partie, les variables aléatoires réelles  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$  définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , strictement positif.

Pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , on considère le polynôme  $Q_\omega$  d'indéterminée  $y$ , défini par :

$$Q_\omega(y) = y^n + X_{n-1}(\omega)y^{n-1} + \dots + X_1(\omega)y + 1$$

Soit  $M_n(\omega)$  le nombre de racines réelles de  $Q_\omega$ . On admet que l'application  $M_n : \omega \mapsto M_n(\omega)$  est une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

- On définit la variable aléatoire  $L_n$  par :  $L_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i$ . Soit  $Z_n = L_n - 2$ . Rappeler la loi de  $Z_n$ .

- À l'aide des résultats de la partie III, montrer que pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , on a :

$$M_n(\omega) \leq 4 + 4\sqrt{2n} \times \sqrt{\ln(Z_n(\omega) + 2)}$$

- Soit  $h$  une fonction de classe  $C^2$ , concave sur  $\mathbb{R}^+$ . Soit  $W$  une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On suppose l'existence des espérances  $E(W)$  et  $E(h(W))$ .

- Montrer que, pour tout couple  $(x_0, x)$  de réels positifs, on a :  $h(x) \leq h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0)$ .
- En prenant  $x_0 = E(W)$ , établir l'inégalité suivante :  $E(h(W)) \leq h(E(W))$ .

- a) Montrer que la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $\varphi(x) = \sqrt{\ln(x+2)}$  est concave sur  $\mathbb{R}^+$ .

- Soit  $a$  un réel positif. Montrer que la série de terme général  $\sqrt{\ln(k+2)} \times \frac{a^k}{k!}$  est convergente.

- a) Prouver l'existence de l'espérance  $E(M_n)$ .

- Montrer que, pour tout réel  $\beta$  strictement supérieur à  $1/2$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(M_n)}{n^\beta} = 0$$

\* FIN \*