Essec 2008, option S, math 1

L'objet du problème est l'étude d'une famille de fonctions polynomiales appelées fonctions polynômes de Newton. La première partie les introduit de manière algébrique. La deuxième partie, tout en étant liée à la première, développe des thèmes relevant de l'analyse.

Partie I

Dans toute cette partie, on notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales allant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et lorsque r est un entier naturel, on désignera par $\mathcal{P}_r$, l'ensemble des fonctions polynomiales allant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à r.

Etant donné Q appartenant à $\mathcal{P}$, on se propose de déterminer toutes les fonctions polynomiales P vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+1) - P(x) = Q(x)$.

A cet effet, on introduit l'application Δ de $\mathcal{P}$ dans lui-même définie lorsque $P \in \mathcal{P}$ par la relation $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x)$.

1)a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.

b) Pour $P \in \mathcal{P}$ de degré r strictement positif, calculer le degré de la fonction polynomiale $\Delta(P)$.

c) Montrer alors que le noyau de Δ est l'ensemble des fonctions polynomiales constantes.

2) On considère pour $r \in \mathbb{N}^*$ l'application $\Delta_r \ : \mathcal{P}_r \to \mathcal{P}_r \ ; \ P \mapsto \Delta_r(P) = \Delta(P)$.

a) Justifier la définition de Δ_r et montrer que Δ_r est linéaire.

b) Quel est le noyau de Δ_r ?

c) Montrer alors que $\operatorname{Im} \Delta_r = \mathcal{P}_{r-1}$.

d) En déduire que l'application Δ est surjective.

3) On désigne par $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$ constitué par les fonctions polynomiales s'annulant en 0. Montrer que la restriction de Δ à $\mathcal{E}$ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{P}$.

4)a) Déduire de la question précédente qu'il existe une suite et une seule d'éléments de $\mathcal{P}$ vérifiant : $N_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta(N_{n-1}) = N_{n-1}$ et $N_n(0) = 0$.

(N_n s'appelle fonction polynomiale de Newton d'indice n.)

b) Vérifier que pour tout entier naturel n non nul et tout x réel :

$$N_n(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$$

c) Montrer que, pour $r \in \mathbb{N}$, la famille $(N_n)_{n \in [\![0,r]\!]}$ forme une base de $\mathcal{P}_r$. En déduire que la famille $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base de $\mathcal{P}$.

d) On adopte la notation usuelle : $\Delta^0 = Id_{\mathcal{P}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$.

Prouver que pour toute fonction polynomiale Q de degré r : $\quad Q = \displaystyle\sum_{n=0}^{r} \Delta^n(Q)(0) N_n$. Justifier ensuite l'écriture $Q = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n(Q)(0) N_n$.

e) La fonction polynomiale Q étant ainsi décomposée, déterminer les fonctions polynomiales P vérifiant la relation $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+1) - P(x) = Q(x)$.

f) Application : en déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(k)$ faisant intervenir P.

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.

5) Etablir, pour toute fonction polynomiale Q, pour tout entier naturel n et tout réel x, la relation : $\quad \Delta^n(Q)(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(x+i)$.

6) Dans toute cette question, on suppose que $r \in \mathbb{N}^*$.

a) On désigne par $C(\Delta_r)$ le commutant de Δ_r, dans l'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{P}_r)$ des endomorphismes de $\mathcal{P}_r$, c'est-à-dire $C(\Delta_r) = \{g \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_r) / g \circ \Delta_r = \Delta_r \circ g\}$.

i. Pour g et h appartenant à $C(\Delta_r)$, montrer que , si $g(N_r) = h(N_r)$, alors $g = h$.

ii. Soit g un endomorphisme de $\mathcal{P}_r$. Justifier l'existence de $a_0, a_1, \ldots, a_r$ réels tels que :

$$g(N_r) = a_r N_r + a_{r-1} N_{r-1} + \cdots + a_1 N_1 + a_0 N_0$$

iii. En déduire que $C(\Delta_r)$ est de dimension $r+1$ et qu'il admet pour base :

$$\left(Id_{\mathcal{P}}, (\Delta_r)^1, \ldots, (\Delta_r)^{r-1}, (\Delta_r)^r\right)$$

iv. On introduit l'endomorphisme d de $\mathcal{P}$ qui à une fonction polynomiale P associe sa fonction dérivée P'. Montrer que $d \circ \Delta = \Delta \circ d$.
En supposant qu'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_r$, réels tels que $d = a_0 Id_{\mathcal{P}} + a_1(\Delta)^1 + \cdots + a_r(\Delta)^r$, calculer $d(N_{r+1})$. Conclure à une contradiction.

b) Préciser la matrice de Δ_r dans la base $(N_n)_{n \in [\![0,r]\!]}$. Montrer que $(\Delta_r)^{r+1} = 0$.
L'endomorphisme Δ_r est-il diagonalisable ?

c) Existe-t-il des endomorphismes g de $\mathcal{P}_r$ tels que $g \circ g = \Delta_r$?

Partie II

On note toujours $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie pour tout x réel par : $N_0(x) = 1$ et pour tout entier naturel n non nul $N_n(x) = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$.

1) Recherche d'un équivalent de $|N_n(x)|$ lorsque $n \to +\infty$:
On fixe x un réel non égal à un entier naturel.
Pour t réel, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^t \, |N_n(x)|$

a) Préciser, selon le réel t, la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

b) Que conclure pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
En déduire qu'il existe un réel strictement positif noté $C(x)$ tel que $|N_n(x)| \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{n^{x+1}}$.

2) Série de Newton associée à une fonction :
On considère une application f de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
A cette application, on associe la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $a_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(i)$.

a) Soit $b > 0$, préciser la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque f est l'application $x \mapsto b^x$.

b) Pour n entier naturel, on note Q la fonction polynomiale $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k N^k$.
Justifier que $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k = \Delta_k(Q)(0)$.
Montrer alors que la fonction $x \mapsto f(x) - Q(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)$ s'annule en $0, 1, \ldots, n$.

c) On suppose de plus que f est indéfiniment dérivable sur $[0, +\infty[$. Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout x réel positif, il existe un réel θ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x) + N_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta)$$

Indication : on pourra utiliser, lorsque $x \notin [\![0, n]\!]$, la fonction auxiliaire

$$\varphi \; : \quad t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(t) - N_{n+1}(t) A$$

avec A un réel choisi tel que $\varphi(x) = 0$, et appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle.

d) On note toujours f une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant la propriété suivante :

il existe une constante M strictement positive telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dfrac{\left|f^{(n)}(x)\right|}{n} \leqslant M$.

Montrer que : $\quad \forall x \geqslant 0, \quad f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x)$.

En déduire que si une telle fonction s'annule sur $\mathbb{N}$, c'est la fonction nulle.

3) Etude de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} h^n N_n(x)$ avec h réel :

a) Lorsque $|h| > 1$, montrer que la série de terme général $h^n N_n(x)$ est divergente pour tout x réel, non égal à un entier naturel.

b) On suppose que $|h| < 1$.

i. Montrer que la série de terme général $h^n N_n(x)$ est absolument convergente pour tout x réel.

ii. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que pour tout n entier naturel et tout x réel :

$$(1+h)^x - \sum_{k=0}^{n} h^k N_k(x) = (n+1)N_{n+1}(x) \int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}\,\mathrm{d}u$$

puis établir que la suite $\left(\dfrac{1}{|h|^n} \displaystyle\int_0^h \left(\frac{h-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}\,\mathrm{d}u\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

iii. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h^n N_n(x)$.

c) On suppose que $h = 1$.

i. Montrer que la série de terme général $N_n(x)$ est divergente pour $x \leqslant -1$.

ii. En reprenant la méthode préconisée au **II.3.b)**, établir que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} N_n(x)$ est convergente pour $x > -1$ et que : $\forall x > -1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} N_n(x) = 2^x$.

d) On suppose que $h = -1$.

i. Préciser les réels x pour lesquels la série de terme général $(-1)^n N_n(x)$ est absolument convergente. Pour quelles valeurs de x est-elle convergente ?

ii. Justifier pour tout x réel et tout entier naturel n strictement positif la formule :

$$N_0(x) - N_1(x) + \cdots + (-1)^n N_n(x) = (-1)^n N_n(x-1)$$

iii. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n N_n(x)$ lorsque $x \geqslant 0$.