BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 281

Concours d'admission de 2014

Conception : ESSEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES I

Vendredi 9 mai 2014, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la ~~mesure du~~ possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le problème comporte 6 parties.

Le but du problème est d'étudier les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = A{}^tA$.
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant cette propriété sera dite normale.

Dans tout le problème :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
- $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on identifiera x et la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base B_0.
- $\langle\ |\ \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$: $\langle x | y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. La norme euclidienne associée à $\langle\ |\ \rangle$ est notée $\|\ \|$.

Tournez la page S.V.P.

- Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base B_0, on note f^* l'endomorphisme représenté par ${}^tA$ dans la base B_0.
- Un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par une matrice normale dans la base B_0 est dit normal, il vérifie donc $f^* of = fof^*$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L(\mathbb{R}^n)$, on dit que F est stable par f si : $\forall x \in F$, $f(x) \in F$. Dans ce cas, on note f_F l'endomorphisme de F défini par : $\forall x \in F$, $f_F(x) = f(x)$.
- Si $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Partie I – Matrices normales d'ordre 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1) Vérifier que A est une matrice normale si et seulement si ou bien A est symétrique ou bien il existe $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $A = \rho R_\theta$.

2) On suppose que A est une matrice normale, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que ${}^tA = P(A)$ (on pourra utiliser ${}^tA + A$).

3) Déterminer les matrices normales A de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 - A + I_2 = 0$.

Partie II – L'endomorphisme f^*.

Dans cette partie, $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in M_n(\mathbb{R})$ et f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base B_0.

4) Propriétés élémentaires de f^* :

a- Préciser l'endomorphisme $(f^*)^*$.

b- Si f est inversible, préciser l'endomorphisme $(f^{-1})^*$.

5) Caractérisation de l'endomorphisme f^* :

a- Pour tout couple (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$, exprimer $\langle f(e_i) | e_j \rangle$ à l'aide des coefficients de A.

b- Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle$.

c- Montrer que f^* est l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle$.

6) Montrer que si f est un endomorphisme normal: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.

7) Réciproquement, soit $g \in L(\mathbb{R}^n)$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|g(x)\| = \|g^*(x)\|$. En exploitant l'égalité $\|g(x+y)\| = \|g^*(x+y)\|$, montrer que g est normal.

8) Vérifier que, si A est une matrice normale de $M_n(\mathbb{R})$, la matrice de f dans toute base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ est normale.

Dans la suite du problème, <u>on admettra les résultats suivants</u> :
Si f est un endomorphisme d'un espace euclidien E muni du produit scalaire $\langle \ | \ \rangle$, on notera encore f^* l'unique endomorphisme de E vérifiant : $\forall (x,y) \in (E)^2, \langle f(x)|y\rangle = \langle x|f^*(y)\rangle$.
Dans toute base orthonormée de E, la matrice de f^* est la transposée de la matrice de f.
On dira encore que f est normal si $f^* of = fof^*$.

Partie III –Matrices normales et polynômes annulateurs.

9) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice normale telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^p = 0$. Soit $S = {}^tAA$, vérifier que $S^p = 0$ et montrer que $S = 0$. Montrer alors que $A = 0$.

10) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice normale, on suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $P^q(A) = 0$, montrer que $P(A) = 0$.

11) Exemple : Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M - {}^tM = I_n$. Déterminer un polynôme annulateur de M de degré 4, le factoriser. En déduire que $(M - I_n)^3 . (M + I_n)^3 = 0$. Montrer alors que M est symétrique et que $M^2 = I_n$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que A est une matrice normale non nulle de $M_n(\mathbb{R})$.

12) Montrer que A admet un polynôme annulateur $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré au moins égal à 1, dont les racines complexes sont toutes de multiplicité 1.

On note I_A l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ annulateurs de A dont les racines complexes sont toutes de multiplicité 1, et on pose $D_A = \{\deg Q ; Q \in I_A\}$.

13) Justifier que D_A admet un minimum d, soit π un élément de I_A de degré d. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ les racines complexes deux à deux distinctes de π.

a- Montrer que $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont les valeurs propres complexes de A.
b- En déduire que l'unique élément de I_A de degré d, de coefficient dominant égal à 1 est
$$\prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k).$$

Tournez la page S.V.P.

Dans la suite du problème, on note π_A ce polynôme.

14) Déterminer π_M pour $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M - {}^tM = I_n$ et $M \neq \pm I_n$.

Partie IV – Propriétés spectrales des matrices normales.

Dans cette partie, $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice normale, f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base B_0.

On note toujours π_A le polynôme associé à A défini dans la partie III.

15) Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^*$. Plus généralement, si $\lambda \in \mathbb{R}$, vérifier que $\operatorname{Ker}\left(f - \lambda id_{\mathbb{R}^n}\right) = \operatorname{Ker}\left(f^* - \lambda id_{\mathbb{R}^n}\right)$, en déduire que les espaces propres, s'ils existent, de f et de f^* sont identiques.

16) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $F = \operatorname{Ker}(Q(f))$, montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par f et f^*. Montrer que $F^\perp$ est aussi stable par f et f^*. Vérifier alors que f_F et $f_{F^\perp}$ sont deux endomorphismes normaux respectivement de F et de $F^\perp$ et que $\left(f_F\right)^* = \left(f^*\right)_F$.

17) Recherche d'un sous-espace stable.

On désire montrer qu'il existe un sous-espace F, stable par f et f^*, de dimension 1 ou 2 :

a- Premier cas : on suppose que π_A admet une racine réelle λ : $\pi_A(\lambda) = 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $e \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ appartenant à $\operatorname{Ker}\left(f - \lambda id_{\mathbb{R}^n}\right)$. Montrer que $F = Vect(e)$ convient.
Deuxième cas : on suppose maintenant que π_A n'admet pas de racine réelle.

b- Justifier l'existence d'un couple de réels (a,b) tels que $a^2 - 4b < 0$ et $f^2 + af + bid_{\mathbb{R}^n}$ ne soit pas inversible. On note $G = \operatorname{Ker}\left(f^2 + af + bid_{\mathbb{R}^n}\right)$ et $g = f_G$.

c- Vérifier que $h = g + g^*$ est diagonalisable. On note e un vecteur propre de h.

d- Montrer alors que $F = Vect(e, f(e))$ convient.

18) Montrer qu'il existe une base orthonormée C de $\mathbb{R}^n$ dans la quelle la matrice de f est de la forme :

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \rho_s R_{\theta_s} \end{pmatrix}.$$

où $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont des réels, $\rho_1, \cdots, \rho_s$ sont des réels positifs et $\theta_1, \cdots, \theta_s$ des réels appartenant à $[0, 2\pi[$.

19) Quelles sont les matrices normales A pour lesquelles π_A a toutes ses racines réelles ?

Partie V – Etude d'un exemple.

Dans cette partie, A est une matrice normale et inversible de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $(A+I_n)^7 = A^7 + I_n$.

On note $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

20) Déterminer les complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\begin{cases} P(z) = 0 \\ P'(z) = 0 \end{cases}$ puis factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

21) Montrer que A est une matrice orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

22) Montrer que ${}^tA$ est un polynôme en A.

23) On suppose de plus que n est impair et que $A \neq -I_n$, déterminer le polynôme π_A associé à A.

Partie VI – Généralisation.

Dans cette partie A est une matrice normale non nulle de $M_n(\mathbb{R})$, f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On note π_A le polynôme associé à A, tel que défini à la question 13.

On désire démontrer que ${}^tA$ est un polynôme en A.

Plus précisément, on cherche un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à $n-1$, tel que ${}^tA = P(A)$.

24) Quel polynôme P convient lorsque π_A a toutes ses racines réelles ?

Dans la suite de cette partie, on suppose que A admet $2t$ valeurs propres complexes non réelles distinctes. On les note $\mu_1, \overline{\mu}_1, \mu_2, \overline{\mu}_2, \dots, \mu_t, \overline{\mu}_t$. Pour tout q de $[\![1,t]\!]$, on note $\mu_q = \rho_q e^{i\theta_q}$, où ρ_q est un réel strictement positif et θ_q un réel appartenant à $[0, 2\pi[$. Enfin, on note $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres réelles distinctes de A.

On a : $\pi_A = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k) \prod_{q=1}^{t}(X^2 - 2\rho_q \cos\theta_q X + \rho_q^2)$.

D'après la question 18, il existe une base orthonormée C de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est de la forme : $M_C(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_r & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \rho_t R_{\theta_t} \end{pmatrix}$ (les réels λ_k pouvant être répétés plusieurs fois ainsi que les matrices $\rho_q R_{\theta_q}$).

25) Préciser $M_C\left(f^*\right)$.

26) Montrer que $\left(f^* = P(f)\right) \Leftrightarrow \left(\forall k \in [\![1,r]\!], \lambda_k = P\left(\lambda_k\right) \text{ et } \left(\forall k \in [\![1,t]\!], \overline{\mu_k} = P\left(\mu_k\right)\right)\right)$.

On note $S = \prod_{k=1}^{r}\left(X-\lambda_k\right)$ et $Q = \prod_{q=1}^{t}\left(X^2 - 2\rho_q \cos\theta_q X + \rho_q^2\right) = \prod_{q=1}^{t}\left(X-\mu_q\right)\left(X-\overline{\mu_q}\right)$ et on introduit les familles de polynômes $\left(L_j\right)_{j\in[\![1,r]\!]}$, $\left(Q_j\right)_{j\in[\![1,t]\!]}$ et $\left(T_j\right)_{j\in[\![1,t]\!]}$ telles que :

$$\text{pour tout } j \in [\![1,r]\!],\ L_j = \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r} \frac{X-\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_k}\right)\cdot\frac{Q}{Q\left(\lambda_j\right)},$$

$$\text{pour tout } j \in [\![1,t]\!],\ Q_j = \frac{S}{S\left(\mu_j\right)}\cdot\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{t} \frac{\left(X-\mu_k\right)\left(X-\overline{\mu_k}\right)}{\left(\mu_j-\mu_k\right)\left(\mu_j-\overline{\mu_k}\right)}\right)\cdot\left(\frac{X-\overline{\mu_j}}{\mu_j-\overline{\mu_j}}\right) \text{ et}$$

$$\text{pour tout } j \in [\![1,t]\!],\ T_j = \frac{S}{S\left(\overline{\mu_j}\right)}\cdot\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{t} \frac{\left(X-\mu_k\right)\left(X-\overline{\mu_k}\right)}{\left(\overline{\mu_j}-\mu_k\right)\left(\overline{\mu_j}-\overline{\mu_k}\right)}\right)\cdot\left(\frac{X-\mu_j}{\overline{\mu_j}-\mu_j}\right).$$

Enfin, on pose $P = \sum_{k=1}^{r}\lambda_k L_k + \sum_{k=1}^{t}\left(\overline{\mu_k} Q_k + \mu_k T_k\right)$.

27) Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ et que ${}^tA = P(A)$.

28) Préciser P lorsque $\pi_A = X(X+1)\left(X^2+X+1\right)$.

FIN.