Exercices de probabilités
ECS 2

Spicesagros.fr

25 janvier 2014

Table des matières

Une petite introduction

Voici une anthologie de 135 exercices de probabilités construite avec le plus grand soin constituant l'intégralité des chapitres couvrant tout le programme de probabilités des deux années en voie scientifique. Ils pourra servir aussi aux étudiants de PC et de MP hormis les chapitres sur les variables à densité. Ces exercices sont regroupés par thèmes et suivent scrupuleusement l'ordre des chapitres du cours. Ils constitueront pour vous une base très solide vous permettant d'aborder sans difficulté majeure les épreuves données en grandes écoles de commerce. Des étoiles ★ vous donneront une idée de la difficulté de chaque exercice : (★) exercice simple, (★★) exercice de difficulté moyenne, (★★★) exercice difficile. Cela reste bien sûr subjectif selon le niveau de chacun !

Première partie
Enoncés

1 Sommes produits et coefficients binomiaux

1. (★) Quel est le plus grand coefficient du développement de $(1+x)^n$?
2. (★) Soit p et n des entiers. Démontrer que pour $0 \leq p \leq n-1$,

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$$

3. (★ et ★★) On considère un réel x et m, n deux entiers naturels. Refermer les sommes suivantes :
   (a) $S_1 = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$
   (b) $S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$
   (c) $S_3 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$
   (d) $S_4 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{m+k+1} \binom{n}{k}$
4. **"Sommes à trous"** (★★) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à un, a et b deux réels. Calculer les sommes :
   (a) $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$
   (b) $S_2 = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} a^{2k} b^{n-2k}$
   (c) `[Oral HEC]` (★★★) $S_3 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{2n}{2k}$ où $n \in \mathbb{N}$.
5. (★★) Montrer, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq p \leq q$ que $\sum_{k=1}^{p} \frac{\binom{p}{k}}{\binom{q}{k}} = \frac{p}{q-p+1}$.
6. (★★) On considère n un entier naturel non nul. Calculer $S = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k}$.
7. `[Oral HEC]` (★★) Soit n un entier naturel non nul et différent de 1. Calculer $T = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}$.
8. (★★) Soit n un entier naturel non nul et (a,b) un couple de réels. Calculer :

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) \quad \text{et} \quad B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb)$$

9. **Formule du multinôme** (★★) Démontrer que pour tous réels $x_1, \dots, x_p$ et tout entier $n \geq 1$:

$$(x_1 + \cdots + x_p)^n = \sum_{\begin{cases} n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N} \\ n_1 + \cdots + n_p = n \end{cases}} \frac{n!}{n_1! \dots n_p!} x_1^{n_1} \dots x_p^{n_p}$$

10. **Sommes doubles** (★) On considère une suite double $(a_{i,j})$ de nombre réels. Soient n et m deux entiers naturels. Intervertir les doubles sommes suivantes :
   (a) $S_1 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$
   (b) $S_2 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} a_{i,j}$
   (c) $S_3 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{m} a_{i,j}$ où l'on suppose que $n \leq m$.

11. **Sommes doubles** (★★) Calculer :
   (a) $S_1 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$
   (b) $S_2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j)$
   (c) $S_3 = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{i}{i+j}$

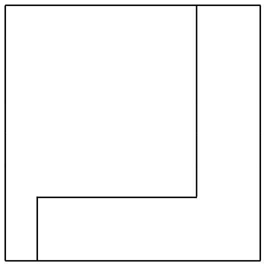
12. **Une somme de produits** (★★) Calculer pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=0}^{p-1} (i+j) \right)$.

2 Dénombrement

1. **Problème de codage : Bose-Einstein** (★★) Combien y a-t-il de façons de placer $m \geq 1$ boules indiscernables dans $n \geq 1$ urnes ?

2. **Le problème des chemins monotones** (★) Un carré $ABCD$ est divisé en $4n^2$ petits carrés suivant $2n$ bandes horizontales et $2n$ bandes verticales de même largeur a. Une puce veut aller de A (sommet en haut à gauche) à C (sommet en bas à droite) en ne faisant que des bonds de a sur le quadrillage vers la droite ou vers le bas. Combien y a-t-il de chemins possibles ? Combien y en a-t-il qui passent par le milieu M du carré ?

3. **Le problème des chemins monotones** (★) Une puce doit se rendre du point $A\,(1,0)$ au point $B\,(8,8)$ du quadrillage suivant



Pour cela, elle va de noeud en noeud et du noeud où elle se trouve, elle saute obligatoirement au noeud situé soit immédiatement à droite, soit immédiatement au-dessus.

   (a) Combien de trajets différents la puce peut-elle parcourir ?

   (b) Démontrer que le nombre de ces trajets est égal au nombre de suites de huit entiers naturels dont la somme est huit.

4. **Nombre de partitions d'un ensemble** (★★) Soit E un ensemble à np éléments. Déterminer le nombre de partitions de E en n parties de p éléments.

5. **Equation diophantienne** (★★)

   (a) On aligne n personnes réparties en p équipes $E_1, \ldots, E_p$ d'effectifs respectifs $n_1, \ldots, n_p$ où $n_1 \geq 0, \ldots, n_p \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{p} n_k = n$. On ne tient compte, dans l'évaluation du nombre de dispositions possibles que de l'appartenance à une équipe. Quel est ce nombre ?

   (b) En déduire une démonstration de :

$$(x_1 + \cdots + x_p)^n = \sum_{\left\{\substack{n_1,\ldots,n_p \in \mathbb{N} \\ n_1+\cdots+n_p=n}\right.} \frac{n!}{n_1! \ldots n_p!} x_1^{n_1} \ldots x_p^{n_p}$$

   (c) Reprendre la première question dans le cas où l'on place les n personnes autour d'une table ronde au lieu de les aligner.

6. **Décomposition de n en somme de p entiers** (★★) Soit n, p deux entiers naturels non nuls, nous cherchons dans la suite à déterminer le cardinal de l'ensemble suivant :

$$\sum(n,p) = \left\{(n_1, n_2, \ldots, n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n\right\}$$

   (a) Fixons dans cette question $p, n \in \mathbb{N}^*$.

      i. Montrer que $\sum(n,p)$ est un ensemble fini. Nous noterons $S\,(n,p)$ son cardinal.

      ii. Déterminer $S\,(n,1)$, $S\,(n,2)$ et $S\,(n,n)$.

      iii. On suppose que $n \geq 2$ et que $p \in [\![1, n-1]\!]$. Montrer que :

$$S\,(n, p+1) = \sum_{k=p}^{n-1} S\,(k,p)$$

(Utiliser l'écriture $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n - n_{p+1}$ et faire varier la valeur de n_{p+1}).

iv. En déduire que pour tout $n \geq p$, $S(n,p) = \binom{n-1}{p-1}$.

(b) En déduire combien y a-t-il de listes d'entiers supérieurs ou égaux à 1 de somme n.

7. **Problème des dérangements** (★★) Combien y a-t-il de permutations σ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ sans point fixe, c'est-à-dire telles que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\sigma(i) \neq i$?

8. **Ensemble de suites strictement croissantes** (★★) Déterminer le cardinal de l'ensemble

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leq n\}$$

9. **Ensemble de suites croissantes** (★★★) Déterminer le cardinal de l'ensemble

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_p \leq n\}$$

10. **Formule du crible** (★) Rappeler la formule du crible. Combien le second membre contient-il de termes ?

11. **Tirages de boules** (★) Une urne contient n boules distinctes numérotées de 1 à n. On effectue un tirage de p boules, $p \in [\![1, n]\!]$.

(a) On suppose dans cette question que les p boules sont extraites simultanément. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

(b) Soit $k \in [\![p, n]\!]$. Déterminer le nombre de tirages tels que :

i. toutes les boules obtenues ont un numéro inférieur ou égal à k ;

ii. le plus grand numéro est k.

iii. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

(c) On suppose dans cette question que les tirages sont successifs et sans remise.

i. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

ii. Combien y a-t-il de tirages commençant par la boule numéro 2 ?

(d) On suppose dans cette question que les tirages sont successifs et avec remise.

i. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

ii. Combien y a-t-il de tirages pour lesquels le premier numéro obtenu est strictement inférieur au dernier ?

iii. Combien y a-t-il de tirages pour lesquels la somme des numéros obtenus est $p + 2$?

iv. Combien de tirages pour lesquels 2 numéros exactement sont apparus ?

12. **Nombre d'applications** (★★) Soit k, n, m trois entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit X et Y deux ensembles tels que $\operatorname{Card} X = n$ et $\operatorname{Card} Y = m$. On rappelle que $m^{\underline{k}}$ désigne $m(m-1)\ldots(m-k+1)$ et $\left\{ {n \atop k} \right\}$ désigne le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k parties non-vides.

(a) Exprimer le cardinal de l'ensemble

$$\{f : X \to Y \mid \operatorname{Card} f(X) = k\}$$

en fonction des nombres ci-dessus.

(b) En déduire la formule :

$$m^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} m^{\underline{k}}$$

13. **Nombre d'applications** (★★) Soit E un ensemble de cardinal n.

(a) Quel est le nombre de parties de E à p éléments ?

(b) Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de E tels que $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$?

(c) Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de E tels que $A \subset B$?

(d) Combien y a-t-il de triplets (A, B, C) de parties de E avec $A \subset B \subset C$?

14. **Parties d'ensembles** (★★★) [HEC] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E = \{1, \ldots, n\}$.

(a) On choisit de façon équiprobable deux éléments de $\mathcal{P}(E)$: A et B. Déterminer la probabilité pour que $A \subset B$.

(b) Déterminer la probabilité pour que $\operatorname{card}(A \cap B) = k$.

(c) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\operatorname{card}(A \cap B)$.

(d) Calculer $S = \sum_{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2} \operatorname{card}(A \cap B)$.

(e) *Question non posée.* On pose $T = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card} A$ et $U = \sum_{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2} \operatorname{card}(A \cup B)$.
Calculer T et U. On trouvera U en cherchant une relation entre S, T et U.

3 Calcul de probabilités

1. **Espace probabilisé** (★) Quel espace probabilisé pouvons-nous associer à une expérience ε consistant à lancer un dé honnête et à noter le numéro obtenu.

2. **Manipulations de probabilités** (★) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, montrer que :
$$(A \text{ et } B \text{ indépendants}) \iff \left(\mathbf{P}(A \cap B)\, \mathbf{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \mathbf{P}\left(A \cap \overline{B}\right) \mathbf{P}\left(\overline{A} \cap B\right)\right)$$

3. **Inégalité probabiliste** (★) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, montrer que :
$$[\mathbf{P}(A \cap B)]^2 \leq \mathbf{P}(A)\, \mathbf{P}(B)$$

4. **Inégalité probabiliste** (★) Si $\mathbf{P}(A) > 0$, montrer que :
$$\mathbf{P}_{A \cup B}(A \cap B) \leq \mathbf{P}_A(A \cap B)$$

5. **Inégalité probabiliste** (★) Soit A et B deux événements tels que $\mathbf{P}(A)\, \mathbf{P}(B) \neq 0$. Montrer que :
$$(\mathbf{P}_B(A) > \mathbf{P}(A)) \Longrightarrow (\mathbf{P}_A(B) > \mathbf{P}(B))$$

6. **Inégalités probabilistes** (★) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Montrer que :
   (a) $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2$, $\mathbf{P}(A \cap B) \geq \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}\left(\overline{B}\right)$.
   (b) $\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n$, $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \geq \mathbf{P}(A_1) - \sum\limits_{k=2}^{n} \mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right)$.
   (c) $\left(\left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) \subset \overline{A}\right) \Longrightarrow (\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C))$.

7. **Inégalité probabiliste** (★) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, A, B, C dans $\mathcal{A}$.
   (a) Calculer $\mathbf{P}(A \Delta C)$.
   (b) Montrer que $\mathbf{P}(A \Delta C) \leq \mathbf{P}(A \Delta B) + \mathbf{P}(B \Delta C)$.

8. **Inégalités de Bonferroni** (★) Montrer que :
   (a) $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j)$.
   (b) $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \sum\limits_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k)$.

9. **La formule de Poincaré "customisée"** (★★) Montrer que la formule de Poincaré est encore vraie en échangeant les signes "$\cup$" et "$\cap$" ; en d'autres termes, montrer que l'on a :
$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{P}\left(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k}\right)$$

10. **Majoration d'une probabilité** (★★) Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ n événements indépendants d'un espace probabilisé, montrer que la probabilité pour qu'aucun des A_i ne soit réalisé est au plus égale à $\exp\left(-\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\right)$.

11. **Application de la sous-additivité** (★★) Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements de Ω telle que pour tout entier naturel non nul n, $\mathbf{P}(A_n) = 1$. Montrer que :
$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1$$

12. **Le lemme de Borel-Cantelli** (★★★) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements défini sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que $\sum\limits_{n\geq 1} \mathbf{P}(A_n) < \infty$. Montrer que la probabilité qu'une infinité d'événements A_i se produisent simultanément est nulle.

13. **"Jamais"** (★) On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir pile. Quelle est la probabilité de ne jamais obtenir pile.

14. **Indépendance** (★★) `[Oral ESCP]` On considère deux urnes U_1 et U_2. On suppose que U_1 (respectivement U_2) contient n_1 boules noires et b_1 boules blanches (resp. n_2 boules noires et b_2 boules blanches). On choisit de façon équiprobable une des deux urnes puis on y effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise. Soit N_1 (resp. N_2) l'événement "tirer une boule noire au premier (resp. au second) tirage".

    (a) Quelle est la probabilité de N_1 ? Quelle est la probabilité de N_2 ?

    (b) Quelle est la probabilité de tirer une boule noire au second tirage sachant que l'on a tiré une boule noire au premier tirage ?

    (c) Les événements N_1 et N_2 sont–ils indépendants ?

15. **Temps d'attente** (★★) On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir pile. Quelle est la probabilité d'obtenir pile au bout d'un nombre pair de lancers.

16. **Probabilités conditionnelles et la formule des probabilités totales** (★★) On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. L'urne i contient i boules numérotées de 1 à i. On choisit une urne au hasard et on y prend une boule. Calculer la probabilité d'obtenir une boule portant le numéro k (avec $1 \leq k \leq n$).

17. **Tirages dans deux urnes** (★) `[HEC]` Soit b_1, b_2, n_1 et n_2 quatre entiers strictement positifs. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant respectivement b_1 et b_2 boules blanches et n_1 et n_2 boules noires. On effectue le premier tirage au hasard dans U_1 ou U_2 et ensuite, on reste toujours dans la même urne et on effectue des tirages avec remise.

    (a) Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage et la probabilité d'obtenir n boules blanches consécutives.

    (b) Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage sachant que l'on a déja obtenu n boules blanches aux tirages précédents.

18. **Etude d'un** $\inf$ (★★) Soit $n \leq N$. On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On tire simultanément n de ces boules. Soit k un entier naturel tel que $0 < k \leq N$.

    (a) Soit p_k la probabilité que tous les numéros tirés soient inférieurs ou égaux à k. Calculer p_k.

    (b) Soit q_k a probabilité que le plus grand des numéros tirés soit égal à k. Calculer q_k.

    (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \binom{k-1}{n-1} = \binom{N}{n}$.

19. **Probalité conditionnelle** (★) On considère trois lots d'articles de même type, le premier compte n_1 articles défectueux et m_1 bons articles ; le deuxième, n_2 articles défectueux et m_2 bons articles et le troisième, n_3 articles défectueux et m_3 bons articles. On choisit au hasard l'un des lots pour en tirer au hasard deux articles, le premier est défectueux. Quelle est la probabilité que le second article soit défectueux lui aussi ?

20. **Tirage dans des urnes et calcul de limites** (★) `[ESCP]` Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $N+1$ urnes numérotées de 0 à N, l'urne numérotée k contient k boules rouges et $N-k$ blanches. On choisit au hasard une urne et on tire avec remise dans cette urne.

    (a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, sachant que lors des n premiers tirages, on a obtenu une rouge à chaque fois ?

(b) Calculer la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini, quand N tend vers l'infini.

21. **"Gagner"** (★★★) `[ESCP]` Soit p un réel compris entre 0 et 1. Une personne lance une pièce éventuellement non régulière et joue à pile ou face, elle a une probabilité p d'obtenir pile et $1-p$ d'obtenir face. Elle gagne dés qu'elle a obtenu deux piles de plus que de faces, elle perd dés qu'elle a obtenu deux faces de plus que de piles.

    (a) Quelle est la probabilité pour que la partie dure plus de $2n$ coups ?

    (b) Quelle est la probabilité pour que la personne gagne ?

4 Variables aléatoires discrètes

1. **Constante de normalisation** ($\bigstar$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, β un nombre réel et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbf{P}\left([X = k]\right) = \frac{\beta}{k+1}\binom{n}{k}$$

   Déterminer β.

2. **Variables indicatrices** ($\bigstar$) Soit A, B, C trois événements tels que $\mathbf{P}(A) = 1/2$, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = 5/12$, $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B \cap C) = 1/3$, $\mathbf{P}(A \cap C) = 1/4$ et $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 1/4$.
   Chercher la loi de $X = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C$.

3. **Variables indicatrices** ($\bigstar$) Soit A et B deux événements indépendants vérifiant $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = p$.
   Déterminer les lois des variables aléatoires $Y = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B$ et $Z = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

4. **Loi définie à partir d'une relation de récurrence** ($\bigstar$) `[ESCP]` Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}\left([X = k]\right) = \frac{4}{k}\mathbf{P}\left([X = k-1]\right)$$

   Déterminer la loi de X.

5. **Loi du plus grand numéro tiré** ($\bigstar$) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n $(n \geq 2)$. On en tire deux au hasard et sans remise. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand numéro tiré.

   (a) Calculer la probabilité $\mathbf{P}\left([X \leq k]\right)$.

   (b) En déduire la loi de la variable aléatoire X.

6. **Recherche d'une loi** ($\bigstar\bigstar$) Dans une urne il y a k boules blanches et $n-k$ boules noires $(1 \leq k \leq n-1)$. On les tire une à une et sans remise. On introduit une variable aléatoire X associée au rang de la dernière boule blanche tirée.

   (a) Déterminer la loi de X.

   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} = \binom{n+1}{p+1}$. En déduire $\mathbf{E}(X)$.

7. **Loi géométrique sur $\mathbb{N}$** ($\bigstar$) On lance une pièce de monnaie indéfiniment jusqu'à obtenir pile pour la première fois. La probabilité d'obtenir face est q et celle d'obtenir pile est $p = 1 - q$. On suppose $p \in \,]0, 1[$. Soit X le rang du tirage qui amène le dernier face consécutif.
   Calculer la loi de X et son espérance.

8. **Recherche d'une loi** ($\bigstar\bigstar$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient une boule blanche, une boule verte et une boule rouge. On tire successivement n boules de cette urne, avec remise de la boule dans l'urne après chaque tirage. Pour $i \in [\![2, n]\!]$, on dit qu'il y a changement de couleur au $i^{\text{ème}}$ tirage si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée n'a pas la même couleur que la $(i-1)^{\text{ème}}$ boule tirée.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de changements de couleur obtenus au cours des n tirages.

   (a) Déterminer la loi de X.

   (b) Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

9. **Tirages avec ou sans remise** ($\bigstar\bigstar$) Soit n et k deux entiers vérifiant $1 \leq k \leq n$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une à une, sans remise, k boules de cette urne. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros des boules tirées.

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Même question si le tirage se fait avec remise.

10. **Loi de Pascal** (★★) Une urne contient a boules vertes et b boules blanches. On effectue des tirages avec remise de la boule tirée.

    (a) Trouver la loi de la variable X associée au temps d'attente de la $r^{\text{ème}}$ boule verte.

    (b) Déterminer son espérance et sa variance.

11. **Loi binomiale négative** (★★) On considère une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes ayant deux issues possibles succès et échec et de même paramètre p (la probabilité du succès). On considère la variable X associée au nombre d'échecs obtenus avant le $r^{\text{ème}}$ succès. Déterminer la loi de X son espérance et sa variance.

12. **Pair-impair** (★★) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que :
$$\mathbf{P}([X \text{ est impair}]) < \mathbf{P}([X \text{ est pair}])$$

13. **Temps d'attente dans un tirage sans remise** (★★) Considérons une urne à deux catégories comportant N boules ($N \in \mathbb{N}^*$) dont a boules blanches et b boules noires $(a, b \in \mathbb{N}^*)$.

    (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq N$ on introduit S_n le nombre de boules blanches (succès) obtenues au cours des n premiers tirages effectués sans remise. Déterminer la loi de S_n.

    (b) Soit Y la variable aléatoire égale au temps d'attente de la première boule blanche. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

14. **Mode d'une distribution** (★★)

    (a) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Quelle est la valeur de k qui maximise $\mathbf{P}([X = k])$?

    (b) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Quelle est la valeur de k qui maximise $\mathbf{P}([X = k])$?

15. **Théorème de transfert** (★) `[HEC]` Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

16. **Théorème de transfert** (★★) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Z = X!$. Calculer $\mathbf{E}(Z)$.

17. **Théorème de transfert** (★★) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ puis $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{(X+1)(X+2)}\right)$ en cas d'existence. En déduire $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X+2}\right)$.

18. **Théorème de transfert** (★★) `[ESCP]` Soit n un entier naturel strictement positif, X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$, A un réel positif et Y une variable aléatoire définie par $Y = \dfrac{A^X}{2n}$. Calculer $\mathbf{E}(Y)$.

19. **Loi de Pascal et théorème de transfert** (★★) On effectue une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli de même paramètre p, répétées de façon indépendantes. Soit X la variable aléatoire associée au rang d'apparition du $k^{\text{ème}}$ succès.

    (a) Déterminer la loi de X.

    (b) Pour $k = 2$, calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(2/X)$.

20. **Loi d'une variable fonction d'ue autre** (★) On lance un dé et on note X le nombre obtenu. Déterminer la loi de $Y = (X-3)^2$ et la loi de $Z = 1/X$.

21. **Loi et partie entière** (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(2n, p)$. On pose $Y = \lfloor X/2 \rfloor$ (qui à tout $\omega \in \Omega$, associe la partie entière de $X(\omega)/2$). Déterminer l'espérance de Y.

22. **Loi d'une variable sous conditions** (★★) Soit X une variable de Poisson de paramètre λ. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X(\omega) \text{ est nul ou impair} \\ \dfrac{X(\omega)}{2} & \text{si} \quad X(\omega) \text{ est pair et non nul} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

5 Séries doubles

1. (★★)Nature et somme éventuelle des séries doubles suivantes :

   (a) $\displaystyle\sum_{i\geq 2, k\geq 2} \frac{1}{(p+i)^k}$ où $p > -1$.

   (b) $\displaystyle\sum_{i\geq 2, k\geq 1} \frac{1}{(2k)^i}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1, p\geq 1} \frac{3^p}{n^{p+2}\left(\ln^2 p + p^5 + 5^{2p}\right)}$ (seulement la nature).

   (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0, k\geq 0} \frac{1}{n!k!\,(n+k+1)}$

2. (★★) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls. On suppose que la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n\,(n+1)}$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n\,(n+1)}$ existe et comparer sa valeur à $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

3. (★★) Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ la suite double définie par :

$$\forall\,(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\quad u_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = m \\ \dfrac{1}{n^2 - m^2} & \text{si} \quad n \neq m \end{cases}$$

   Montrer, en les calculant, que les sommes $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ et $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ sont définies et différentes.

4. (★★★)Etablir, pour x réel tel que $|x| < 1$, les identités :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1 - x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 - x^{2n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1-x}$$

   Indication : pour chacune des identités on remplacera dans chaque somme du membre de gauche, le terme général par la somme d'une série de référence.

6 Vecteurs aléatoires

1. **Loi d'un couple, loi marginale** (★) Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	$1/6$	$1/4$	$1/6$	$1/4$	$1/6$

On pose $Y = X^2$. Déterminer la loi du couple (X, Y) puis la loi de Y.

2. **Loi d'un couple et paramètre, lois marginales, indépendance** (★) Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs respectivement dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a^i}{j!}$$

(a) Calculer a.

(b) Déterminer les lois de X et Y et vérifier que ces variables sont indépendantes.

(c) Calculer l'espérance et la variance de $S = X + Y$.

3. **Loi de la valeur absolue d'une différence** (★) Soit X et Y deux variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$.
Déterminer la loi de $D = |X - Y|$.

4. **Loi d'un couple, lois marginales** (★) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, avec $n \geq 2$. On effectue deux tirages d'une boule avec remise dans cette urne. Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au plus petit (resp. au plus grand) des deux numéros tirées.

(a) Déterminer la loi du couple (X, Y).

(b) En déduire les lois de X et Y.

5. **Loi d'un couple, lois marginales** (★★) Une urne contient deux boules blanches et n boules noires. On vide l'urne en tirant les boules une à une et sans remise. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au rang du tirage qui amène la première (resp. la seconde) boule blanche.
Déterminer la loi du couple (X, Y), en déduire les lois de X et de Y.

6. **Loi d'un couple, urnes évolutives** (★) On dispose de n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard, puis on tire une boule dans cette urne. On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Déterminer la loi du couple (X, Y).

7. **Recherche de lois** Soit n un entier naturel non nul. Dans une urne contenant initialement n boules numérotées 1 à n, on effectue deux tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : si on note k, ($k \in [\![1, n]\!]$) le numéro de la boule tirée au premier tirage, celle-ci est remise dans l'urne avec k boules supplémentaires portant toutes le numéro k; on effectue alors un second tirage. On appelle X_1 la variable égale au numéro de la boule tirée au premier tirage et X_2 celle égale au numéro de la boule tirée au second tirage.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X_1 son espérance et sa variance.

(b) Déterminer la loi de probabilité de X_2 et vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X_2 = k]) = 1$.

8. **Couple de variables, loi conditionnelle, loi uniforme, loi géométrique** (★★) Soit Z et X deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$ (où $n \in \mathbb{N}$) et que, pour tout entier $k \in Z(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sachant $[Z = k]$ est la loi uniforme sur $[\![0, k]\!]$.

(a) i. Déterminer $X(\Omega)$, ainsi que la loi du couple (Z, X) en fonction de la loi de Z.
ii. Déterminer la loi de X.
iii. En déduire l'espérance de X en fonction de $\mathbf{E}(Z)$ (on pensera à intervertir l'ordre des sommations).

(b) Comparer les lois de X et de $Z - X$.

9. **Relativisation** (★★) Dans un grand magasin, le nombre de clients présents un certain jour suit une loi de Poisson de paramètre a. D'autre part, chaque client à la probabilité p de se faire voler son portefeuille et on suppose les différentes tentatives de vol indépendantes. On note X la variable aléatoire égale au nombre de clients fréquentant le magasin un jour donné et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients qui se font voler leur portefeuille ce même jour.
   (a) Soit m un entier naturel, rappeler $\mathbf{P}([X = m])$, ainsi $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.
   (b) Déterminer pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}_{[X=n]}([Y = k])$.
   (c) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
   (d) On note Z la variable aléatoire égale au nombre de clients qui ne se font pas voler leur portefeuille. Quelle est la loi de Z ?
   (e) Montrer que Y et Z sont indépendantes.

10. **Loi d'un couple** (★★) `[HEC]` Soit $n \in \mathbb{N}^*$. André lance n fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Bernard lance lui aussi n fois de suite cette pièce. Les lancers de Bernard sont supposés indépendants de ceux d'André. On note X la variable aléatoire égale au nombre de côtés face obtenus par André et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de côtés face obtenus par Bernard.
    (a) Déterminer les lois de X et de Y.
    (b) Calculer $\mathbf{P}([X = Y])$.
    (c) Déterminer la loi de $Z = X - Y$.
    (d) Calculer $\mathbf{P}([X < Y])$.

11. $\mathbf{P}([X = Y])$, $\mathbf{P}([Y > X])$, $\mathbf{P}([X \geq kY])$, ... (★★) Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([X = i]) = \mathbf{P}([Y = i]) = \frac{1}{2^i}$$

    Trouver les probabilités des événements suivants :
    (a) $\mathbf{P}([\inf(X, Y)] \leq i)$.
    (b) $\mathbf{P}([X = Y])$.
    (c) $\mathbf{P}([Y > X])$.
    (d) $\mathbf{P}([X \text{ divise } Y])$.
    (e) $\mathbf{P}([X \geq kY])$ pour un entier $k \geq 1$.

12. **Loi de l'** $\inf$ **d'un couple de variables géométriques indépendantes** (★★) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètres respectifs λ et μ. Soit $Z = \inf(X, Y)$.
    Déterminer la loi de Z.

13. **Indépendance de variables discrètes** (★) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi :

$$\mathbf{P}([X = 1]) = \mathbf{P}([Y = 1]) = 1/2 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([X = -1]) = \mathbf{P}([Y = -1]) = 1/2$$

    Soit $Z = XY$. Montrer que X, Y, Z sont indépendantes deux à deux, mais qu'elles ne sont pas globablement indépendantes.

14. **Loi d'un** inf, **d'un** sup, **somme d'un couple de variables géométriques indépendantes** (★★) Soit X et Y deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. Déterminer :
    (a) La loi de $X+Y$.
    (b) La loi de $\sup(X,Y)$.
    (c) La loi de $\inf(X,Y)$.

15. **Loi d'une somme et loi conditionnelle** (★★) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ indépendantes.
    (a) Quelle est la loi de $S = X+Y$.
    (b) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $[S=s]$ où $s \in [\![0, n+m]\!]$.
    (c) On suppose que $p = 1/2$. Calculer $\mathbf{P}([X \neq Y])$ et $\mathbf{P}([X = Y])$.

16. **Lois géométriques, somme et inégalités** (★★) Soit X, Y et Z trois variables indépendantes, de même loi géométrique, de paramètre p $(0 < p < 1)$.
    (a) Préciser la loi de $S = X+Y$, son espérance et sa variance.
    (b) Calculer $\mathbf{P}([S \leq Z])$ et $\mathbf{P}([S \geq Z])$.

17. **Loi d'un produit** (★★) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose les variables X et Y indépendantes. On pose $Z = XY$.
    (a) Quelle est l'espérance de Z ?
    (b) Trouver la loi suivie par Z, puis calculer sa variance.

18. **Coefficient de corrélation et indépendance** (★★) Soit X et Y deux variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p $(p \in]0,1[)$. Soit $U = X+Y$, $V = X-Y$. Déterminer :
    (a) La loi du couple (U,V).
    (b) Le coefficient de corrélation $\rho_{U,V}$.
    (c) U et V sont-elles indépendantes ? Conclusion ?

19. **Variables fonction d'autres** (★★) Soit X et Y deux variables indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, X suivant une loi géométrique de paramètre a $(0 < a < 1)$. On considère la variable aléatoire Z définie par :
$$Z = \begin{cases} X-Y & \text{si } X > Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Déterminer la loi de Z en fonction de celle de Y et montrer qu'elle ne dépend que de :
$$\alpha = \mathbf{E}\left((1-a)^Y\right)$$

20. **Loi de** $(\sup, \inf)$ **et lois marginales** (★★) `[ESCP]` Soit $p \in]0,1]$ et X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. On pose $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.
    (a) Déterminer la loi du couple (U,V).
    (b) Déterminer les lois marginales.
    (c) Déterminer la loi de $Z = U+V$.

21. **Etude de l'équivalence :** (Cov $(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{0}$) $\Longleftrightarrow$ (**X et Y indépendantes**) Soit X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli. Montrer que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ si, et seulement si, X et Y indépendantes.

22. **Coefficient de corrélation** (★) Soit X une variable aléatoire admettant une variance.

    (a) Calculer $\rho(X, X)$ et $\rho(X, -X)$.

    (b) Calculer $\forall(a, c, b, d) \in (\mathbb{R}^*)^2 \times \mathbb{R}^2$, $\rho(aX + b, cX + d)$.

23. (★★) Soit un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi est définie dans le tableau ci-dessous :

$X \diagdown Y$	1	2	3	4
1	0.08	0.04	0.16	0.12
2	0.04	0.02	0.08	0.06
3	0.08	0.04	0.16	0.12

    (a) Déterminer les lois marginales de ce couple.

    (b) Les lois de X et Y sont-elles indépendantes ?

    (c) Calculer la covariance du couple (X, Y).

    (d) Déterminer les lois conditionnelles de X sachant que $Y = 2$ et de Y sachant que $X \in \{1, 3\}$.

    (e) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\mathbf{E}(Y \mid X)$.

    (f) Calculer $\mathbf{E}(\mathbf{E}(Y \mid X))$ et comparer à $\mathbf{E}(Y)$.

24. (★★) Soit un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi est définie dans le tableau ci-dessous :

$X \diagdown Y$	1	2	3	4
1	0	0	0	0.3
2	0.2	0	0	0
3	0	0	0.1	0
4	0.3	0.1	0	0

    (a) Déterminer les lois marginales de ce couple.

    (b) Les lois de X et Y sont-elles indépendantes ?

    (c) Calculer la covariance du couple (X, Y).

    (d) Déterminer les lois conditionnelles de X sachant que $Y = 2$ et de Y sachant que $X \in \{1, 4\}$.

    (e) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\mathbf{E}(X \mid Y)$.

    (f) Calculer $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \mid Y))$ et comparer à $\mathbf{E}(X)$.

25. (★★) Soit (X, Y) un vecteur aléatoire discret dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi conjointe est :

$$\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \binom{n}{x}\binom{n-x}{y} p^x q^y (1 - p - q)^{n-x-y}$$

pour $x, y \in \{0, \ldots, n\}$ avec $x + y \leq n$ (loi multinomiale).

    (a) Donner la loi de X.

    (b) Déterminer les lois conditionnelles de Y sachant que $[X = x]$ et de X sachant que $[Y = y]$.

    (c) Calculer $\mathbf{E}(Y \mid [X = x])$ et $\mathbf{E}(X \mid [Y = y])$.

    (d) Trouver $\mathbf{E}(Y \mid X)$ et $\mathbf{E}(X \mid Y)$.

26. (★★)Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, où X_1 et X_2 sont des variables de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Posons $Z = X_1 + X_2$.

    (a) Trouver la loi du couple (X_2, Z) et celle de X_2 sachant que $[Z = z]$.

    (b) En déduire $\mathbf{E}(X_2 \mid [Z = z])$ et $\mathbf{E}(X_2 \mid Z)$.

27. (★★)Montrer que $\mathbf{E}[aY_1 + bY_2 \mid X] = a\mathbf{E}[Y_1 \mid X] + b\mathbf{E}[Y_2 \mid X]$.

28. (★★)Soit X et Y deux variables indépendantes. Montrer que $\mathbf{E}(Y \mid X) = \mathbf{E}(Y)$.

29. **Somme de n variables indépendantes** (★★) Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant toute la même loi définie par :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbf{P}\left([X_k = -1]\right) = \mathbf{P}\left([X_k = 1]\right) = 1/2$$

On note $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que :

$$\forall a > 0, \quad \forall x > 0, \quad \mathbf{P}\left([S_n \geq a]\right) \leq e^{-xa}\mathbf{E}\left(e^{xS_n}\right)$$

30. **Calcul d'une covariance** (★★) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit $Y_n = X_n X_{n+1}$. On pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et $V_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.

   (a) Calculer $\mathbf{E}\left(S_n\right)$, $\mathbf{E}\left(V_n\right)$, $\mathbf{V}\left(S_n\right)$ et $\mathbf{V}\left(V_n\right)$.

   (b) Calculer $\mathrm{Cov}\left(S_n, V_n\right)$.

7 Variables à densité

1. **Densité, fonction de répartition, espérance** (★) `[ESCP]` On considère une variable aléatoire X dont une densité f est définie par :

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\in[-1,0] \\ \dfrac{\cos x}{2} & \text{si} \quad x\in\left]0,\pi/2\right] \\ 0 & \text{si} \quad x\notin[-1,\pi/2] \end{cases}$$

   (a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de X.
   (c) Calculer l'espérance de X.

2. **Densité, fonction de répartition, moments** (★★) `[ESCP]` Soit X une variable aléatoire réelle dont une densité f est donnée par :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{|x^3|} & \text{si} \quad |x|>1 \\ 0 & \text{si} \quad |x|\leq 1 \end{cases}$$

   (a) Etudier les variations de f, donner une représentation graphique de cette fonction.
   (b) Déterminer la fonction de répartition F de X et donner également une représentation graphique de cette fonction.
   (c) Etudier l'existence des moments de X.

3. **Espérance et antirépartition** (★★) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de densité f continue sur $\mathbb{R}_+$, et de fonction de répartition F. On pose, pour tout réel x positif, $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt$.

   (a) Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \varphi(x)=\int_0^x (1-F(t))\,dt - x\mathbf{P}([X>x])$$

   (b) On suppose dans cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-F(t))\,dt$ converge.

      i. Montrer que φ est croissante et majorée sur $\mathbb{R}_+$ puis en déduire que X a une espérance.
      ii. Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad 0\leq x\mathbf{P}([X>x])\leq\int_x^{+\infty}tf(t)\,dt$$

      iii. Etablir que :

$$\mathbf{E}(X)=\int_0^{+\infty}\mathbf{P}([X>t])\,dt$$

4. **Changement de variable quadratique** (★)`[ESCP]` Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur le segment $[-1,2]$.

   (a) Quelle est la loi de $Y=X^2$?
   (b) Déterminer l'espérance de Y.

5. **Changement de variable exponentiel** (★) `[ESCP]` Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur le segment $[1,2]$. Déterminer une densité de probabilité et la fonction de répartition de la variable $Y=\exp\left(X^2-1\right)$.

6. **Loi de variables extrêmes** (★★) [ESCP] Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même univers.
   (a) Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = -\ln X$. Déterminer la loi de Z.
   (b) On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On pose, pour $n \geq 1$, $Y_n = \inf_{1\leq k\leq n} (X_k)$ et $Z_n = \sup_{1\leq k\leq n} (X_k) - \ln n$.
      i. Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
      ii. Déterminer la fonction de répartition de Z_n.
7. **Partie entière et partie décimale d'une variable à densité** (★★) Soit $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$.
   (a) Déterminer la loi de $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X) et calculer $\mathbf{E}(Y)$.
   (b) Déterminer la loi de $Z = X - \lfloor X \rfloor$ et calculer $\mathbf{E}(Z)$.
8. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sqrt{2}\right)$. Soit $\alpha > 0$ et Y la variable aléatoire définie par $Y = e^{-\alpha X^2}$. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire Y ainsi que son espérance.
9. **Loi log-normale** (★★) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$. On pose $Y = e^X$, calculer l'espérance et la variance de Y.
10. **Loi normale et la loi du khi-deux** (★★) [ESCP] *On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi gamma de paramètres b et ν strictement positifs, notée $\Gamma(b, \nu)$, si X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et admet pour densité sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{b\Gamma(\nu)} \left(\dfrac{x}{b}\right)^{\nu-1} e^{-\frac{x}{b}}$.*
    On rappelle également que la somme de deux variables indépendantes suivant respectivement les lois $\Gamma(b, \nu_1)$ et $\Gamma(b, \nu_2)$ suit la loi $\Gamma(b, \nu_1 + \nu_2)$.
    (a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\Gamma(b, \nu)$. Calculer l'espérance et la variance de X.
    (b) Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes suivant la loi normale centrée réduite.
       i. Quelle est la loi de X_1^2 ?
       ii. Quelle est la loi suivie par $Y = X_1^2 + X_2^2$?
    (c) Plus généralement soit $X_1, X_2, \ldots X_n$, des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi normale centrée réduite. On pose $Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$.
       i. Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
       ii. Soit f_n une densité de Y_n. Donner une représentation graphique de f_1, f_2, f_3.
11. **Autour du produit de convolution** (★★) [ESCP] Soit Z et T deux variables aléatoires indépendantes, suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs α et β (avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \neq \beta$).
    (a) Déterminer la loi de $Z + T$.
    (b) Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
       i. Quelle est la loi de $-Y$?
       ii. Montrer que $X - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :
       $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}$$
       iii. En déduire la loi de $|X - Y|$.
12. **Loi d'un produit, loi d'un quotient** (★★★) [ESCP] On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
    $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

(a) Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable X.

(b) On note $Y = \ln X$. Déterminer la loi de Y, puis celle de $-Y$.

(c) Soit X_1, X_2 deux variables indépendantes et de même loi que X. On pose $U = X_1 X_2$ et $V = \dfrac{X_1}{X_2}$.

i. A l'aide du 2., déterminer la loi de U, puis celle de V.

ii. Montrer que les variables aléatoires $\sqrt[3]{U}$, $\sqrt[3]{V}$, $\sqrt[3]{UV}$ admettent des espérances et les calculer. En déduire que les variables U et V ne sont pas indépendantes.

13. **Loi de Poisson et loi gamma** (★★) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Notons F_X la fonction de répartition de X.

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad F_X(n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx$$

(b) Soit, pour $n \in \mathbf{N}$, Y_n une variable aléatoire absolument continue dont une densité f_n est donnée par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{e^{-x} x^n}{n!} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Vérifier que f_n est bien une densité de probabilité et que l'on a $F_X(n) = \mathbf{P}([Y_n > \lambda])$.

14. **"Mix discret-continu"** (★★) `[ESCP]` Soit n un entier naturel non nul. On considère X une variable aléatoire exponentielle de paramètres 1 et Y une variable aléatoire binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

Montrer que la variable aléatoire $Z = \dfrac{X}{Y+1}$ est à densité et déterminer sa densité.

8 Convergences et approximations

1. **Convergence en probabilité vers une variable certaine** (★) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables réelles vérifiant :
$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{E}(|X_n|)=0$$
Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0 quand n tend vers l'infini.

2. **Convergence en probabilité vers une variable certaine** (★★) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_4}$ une suite de fonctions définies par :
$$f_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad |x|>n+\dfrac{1}{n}\\ 0 & \text{si} \quad \dfrac{1}{n}<|x|<n\\ \sqrt{n} & \text{si} \quad n\leq|x|\leq n+\dfrac{1}{n}\\ \dfrac{n}{2}-\sqrt{n} & \text{sinon}\end{cases}$$
   (a) Vérifier que les f_n sont des densités de probabilité.
   (b) Soit X_n une variable réelle associée à la densité f_n. Montrer que la suite de variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

3. **Convergence en probabilité vers une variable certaine** (★) Soit une suite de variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ i.i.d. centrées et de variance σ^2. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ et $T_n=\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}S_k$, avec $\alpha>3/2$. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

4. **Convergence en probabilité vers une variable certaine** Soit une suite de variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ centrées et de variance finies. On suppose qu'il existe une constante C et un entier α tous deux strictement positifs tels que, pour tout i,j, la covariance entre X_i et X_j vérifie :
$$|\mathrm{Cov}(X_i,X_j)|\leq\frac{C}{1+|i-j|^\alpha}$$
On pose $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

5. **Convergence en probabilité vers une variable certaine** (★★) On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires telle que X_n suit ma loi exponentielle de paramètre n, et on note $Y_n=\cos(\lfloor X_n\rfloor\pi)$, $\lfloor X_n\rfloor$ désigne la partie entière de X_n.
   (a) Déterminer la loi de la variable Y_n et calculer $\mathbf{E}(Y_n)$.
   (b) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable constante égale à 1.

6. **Convergence en probabilité vers une variable certaine** (★★) Soit σ un réel strictement positif et n un entier naturel non nul, on note g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{array}{ll} g_n(x)=\dfrac{n^2x}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{n^2x^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si} \quad x\geq0\\ g_n(x)=0 & \text{si} \quad x<0\end{array}$$
   (a) Montrer que g_n est une densité de probabilité.
   (b) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires continues définies sur un même univers telles que pour tout entier naturel non nul n, g_n soit une densité de X_n. Montrer que :
$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\quad\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}([|X_n|\geq\varepsilon])=0$$
   Que peut-on en déduire ?

7. **Convergence en probabilité vers une variable certaine** (★★) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes, de même paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout entier naturel n non nul, on définit la variable aléatoire $Y_n = 2X_n + X_{n+1} - X_nX_{n+1}$.
   (a) Déterminer la loi de Y_n, calculer son espérance et sa variance en fonction de p.
   (b) i. On note $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$, calculer $\mathbf{E}(Z_n)$.
   ii. Calculer $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$ pour $1 \leq i < j \leq n$.
   iii. Calculer $\mathbf{V}(Z_n)$.
   (c) Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $3p - p^2$.
8. **Convergence en probabilité vers une variable certaine** (★★) Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans l'intervalle $[1,+\infty[$ telle que $\mathbf{P}([X \geq a]) = a^{-\lambda}$ $(\lambda > 0)$.
   (a) Calculer une densité de la variable aléatoire $Y = \ln X$.
   (b) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de X. Soit $T_n = \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}$. Calculer la limite en probabilité de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
9. **Convergence en probabilité vers une variable certaine** (★★) Soit un couple de réels (a,b) tel que $a \geq 0$ et $b > 0$ et f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ \dfrac{1}{b}e^{-\frac{(x-a)}{b}} & \text{si} \quad x > a \end{cases}$$

   (a) Vérifier que f est la densité d'une variable à densité X.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.
   (c) Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de X. On pose $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Trouver la loi de Y_n son espérance et sa variance.
   (d) Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers a.
   (e) On pose $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_n)$ et $U_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. Calculer l'espérance de Z_n et la variance de Z_n en fonction de la covariance $\mathrm{Cov}(U_n, Y_n)$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{V}(Z_n) = 0$ et en déduire que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers b.
10. **Loi de Poisson et loi gamma – TCL** (★★) `[ESCP]` On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre 1.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
   (a) Quelle est la loi de S_n ?
   (b) Montrer que :

$$\mathbf{P}([S_n > n]) = \frac{1}{n!}\int_0^n t^n e^{-t}dt$$

   et que :

$$\mathbf{P}([S_n < n]) = \frac{1}{(n-1)!}\int_n^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}dt$$

   (c) En déduire que les suites de terme général $\mathbf{P}([S_n > n])$ et $\mathbf{P}([S_n < n])$ sont strictement croissantes, puis qu'elles sont convergentes.
   (d) Calculer leur limite respective en appliquant à la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ le théorème de la limite centrée.
   (e) Que peut-on dire des suites de terme général $\mathbf{P}([S_n \leq n])$ et $\mathbf{P}([S_n = n])$?

11. **Relativisation** (★★) [ESCP] Dans cet exercice, f désigne une densité de probabilité. On suppose que f est nulle sur $]-\infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$ et que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ est convergente.

   (a) Un client se présente à un automate pour y effectuer un retrait d'argent. On suppose que l'instant d'arrivée X de ce client à partir d'un instant initial 0 est une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $]0, t]$, (où t est un réel strictement positif fixé), que ce client peut utiliser le distributeur immédiatement, et qu'il se sert de cet automate pendant une durée aléatoire Y, indépendante de X et qui admet pour densité f.
   On note p_t la probabilité que ce client soit encore en train d'utiliser l'appareil à l'instant t.

      i. On note F la fonction de répartition de la variable aléatoire Y et g une densité de la variable aléatoire $X+Y$. Donner une expression de $g(z)$ pour z compris entre 0 et t en fonction de $F(z)$ et de t.

      ii. En déduire que :
      $$\mathbf{P}([X+Y \leq t]) = F(t) - \frac{1}{t}\int_0^t zf(z)\,dz$$

      iii. Montrer que $t\mathbf{P}([Y > t])$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

      iv. En déduire que tp_t admet une limite finie quand t tend vers $+\infty$ (limite que l'on interprétera à l'aide de la variable Y).

   (b) Un hall contient un grand nombre d'automates. On se fixe un instant intial 0 et pour tout réel $t > 0$, on note :
   - C_t la variable aléatoire égale au nombre de personnes se présentant à l'un des automates entre les instants 0 et t ;
   - D_t la variable aléatoire égale au nombre de personnes encore en train d'utiliser un automate à l'instant t.
   - On suppose que pour tout réel $t > 0$, C_t suit la loi de Poisson de paramètre λt (avec $\lambda > 0$ réel fixé) ;
   - conditionnellement à $[C_t = n]$ la loi de D_t est binomiale de paramètres n et p_t, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_t ayant la même valeur que dans la question précédente.

      i. Déterminer la loi de la variable aléatoire D_t.

      ii. Montrer que la suite de variables aléatoires $(D_n)_{n\geq 1}$ converge en loi quand n tend vers l'infini et préciser la loi limite ainsi que son espérance.

12. **Convergence en loi** (★★)

   (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par :
   $$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)(1-x)^n & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   est une densité de probabilité.
   Soit $Y_n = nX_n$ où X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ et qui admet f_n pour densité.
   Pour $x \in [0, n]$, calculer $\mathbf{P}([Y_n \leq x])$. En déduire que la suite de variables $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable suivant une loi exponentielle.

   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par :
   $$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)(n+2)\,x(1-x)^n & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   est une densité de probabilité.
   Soit $Y_n = nX_n$ où X_n admet pour densité f_n.
   Pour $x \in [0, n]$, montrer que :
   $$\mathbf{P}([Y_n \leq x]) = 1 - \left(\frac{n+1}{n}x + 1\right)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1}$$
   En déduire que la suite de variables $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable dont on précisera la loi.

13. **Convergence d'une suite de variables extrêmes – Loi de Gumbel** (★★★) [HEC] Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle d'espérance égale à 1. Pour tout entier n strictement positif, on pose $U_n = e^{-X_n}$ et $V_n = \min(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ (ainsi, pour tout ω dans Ω, $V_n(\omega)$ est le plus petit des nombres $(U_1(\omega), U_2(\omega), \ldots, U_n(\omega))$.

    (a) Donner, pour tout entier naturel n non nul, une densité de la variable M_n.

    (b) i. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, M_n possède une espérance qu'on note $\mathbf{E}(M_n)$ et prouver l'égalité :

    $$\mathbf{E}(M_n) = -\frac{n}{\lambda}\int_0^1 u^{n-1}\ln(1-u)\,du$$

    ii. On pose, pour tout entier naturel k : $I_k = \displaystyle\int_0^1 u^k \ln(1-u)\,du$. Déterminer, pour tout entier naturel k non nul, une relation de récurrence entre I_k et I_{k-1}.

    iii. En déduire, que pour tout entier naturel n non nul, on a :

    $$\mathbf{E}(M_n) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

    iv. Donner un équivalent simple de $\mathbf{E}(M_n)$ quand l'entier naturel n tend vers l'infini.

    (c) i. Vérifier que l'application f qui à tout réel x associe $f(x) = e^{-x}\exp(-e^{-x})$ est une densité de probabilité.

    ii. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que la suite de variables aléatoires de terme général $\lambda M_n - \ln n$ converge en loi vers X.

9 Estimations

1. **Estimation d'une moyenne empirique** (★★) `[HEC]` Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit n variables aléatoires réelles indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, de même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose :
$$\widehat{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
   (a) Rappeler la loi de $Y_n = n\widehat{X_n}$, son espérance et sa variance. Quelle convergence peut-on établir pour la suite $\left(\widehat{X_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
   On cherche à évaluer $\mathbf{P}([X=0]) = e^{-\lambda}$ à l'aide d'une suite d'estimateurs (Z_n) convergeant en un certain sens vers $e^{-\lambda}$ et telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E}(Z_n) = e^{-\lambda}$$
   (b) Une première idée est de poser $Z_n = e^{-\widehat{X_n}}$. Que penser de ce choix ?
   (c) Une autre idée consiste à choisir $Z_n = \dfrac{K_n}{n}$ où :
$$\forall \omega \in \Omega, \quad K_n(\omega) = \mathrm{Card}\{i,\ 1 \le i \le n,\ X_i(\omega) = 0\}$$
   Déterminer la loi de K_n. Qu'en déduire pour la suite (Z_n) ?

2. **Estimation d'une variance** `[HEC]` On considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi normale de moyenne m et d'écart-type σ. Soit, pour n entier non nul,
$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad T_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_n}\right)^2$$
   (a) Quelle est la loi de $\overline{X_n}$?
   (b) Montrer que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais et convergent de m.
   (c) Soit $Z_n = \dfrac{X_1 + X_n}{2}$. Montrer que Z_n est aussi un estimateur sans biais convergent de m. De $\overline{X_n}$ et Z_n lequel est de plus petite variance ?
   (d) Montrer que :
$$\mathbf{E}\left(T_n^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}\left(X_i - \overline{X_n}\right)$$
   (e) En déduire la valeur du réel a tel que $S_n^2 = aT_n^2$ soit un estimateur sans biais de σ^2.

3. **Estimation des paramètres d'une loi uniforme** (★★) `[ESCP]` On veut estimer les paramètres a et b de la loi uniforme sur $[a, b]$ à l'aide d'un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables indépendantes suivant cette loi.
   (a) i. On pose $S_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Déterminer la fonction de répartition de S_n, puis sa densité et son espérance.
      i. Montrer que la variance de S_n est égale à $\mathbf{V}(S_n) = \dfrac{n(b-a)^2}{(n+2)(n+1)^2}$. (On pourra d'abord supposer $a = 0$ et $b = 1$ puis effectuer une transformation affine).
      ii. S_n est-il un estimateur sans biais de b ?
      iii. Quelle est la limite de $\mathbf{E}(S_n)$ quand n tend vers l'infini ?
      iv. Comparer $\mathbf{E}(S_n)$ et b. Que risque-t-on en général en estimant b par la réalisation de S_n ?
   (a) On pose $I_n = \inf\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Déterminer l'espérance de I_n et sa limite quand n tend vers l'infini. On admettra que :
$$\mathbf{V}(I_n) = \mathbf{V}(S_n)$$

(b) Exprimer a et b en fonction de $\mathbf{E}(I_n)$ et $\mathbf{E}(S_n)$.
En déduire des estimateurs A_n et B_n sans biais de a et b.

4. **Estimations autour de la loi de Poisson** (★★) `[ESCP]`

(a) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Quelle est la loi de $X+Y$?
Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre λ. Quelle est la loi de la somme S_n de ces variables ?

(b) On désire estimer le paramètre λ d'une loi de Poisson à l'aide d'un $n-$ échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables indépendantes suivant cette loi. Vérifier que $M_n = \dfrac{S_n}{n}$ est un estimateur sans biais de λ. Quelle est sa variance ?

(c) On cherche maintenant à estimer, à l'aide du même échantillon, la probabilité $e^{-q\lambda}$ de n'observer que des 0 au cours de q expériences consécutives. On pose $T_n = \exp\left(-q\dfrac{S_n}{n}\right)$. Calculer l'espérance $\mathbf{E}(T_n)$ de T_n.
T_n est-il un estimateur sans biais de $e^{-q\lambda}$? Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(T_n)$.
Calculer la variance $\mathbf{V}(T_n)$. T_n est-il un estimateur convergent ?

(d) On admettra que la suite nulle est la seule suite $(a_n)_n$ de réel vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0$$

Soit $g(S_n)$ un estimateur sans biais de $e^{-q\lambda}$.

i. Montrer que pour tout $\lambda > 0$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k g(k)}{k!} \lambda^k = e^{(n-q)\lambda}$$

En déduire l'expression du seul estimateur sans biais de $e^{-q\lambda}$, fonction de S_n.

ii. Est-il toujours judicieux de l'utiliser ?

iii. On supose q petit devant n. Comparer T_n et l'estimateur trouvé en **i.**

5. **Estimation d'une probabilité** (★★) `[HEC]` Afin de contrôler la qualité des produits à la sortie d'une usine, on prélève un échantillon de n objets que l'on teste. Suivant les résultats du test, les objets sont classés en deux catégories A et B uniquement.
On suppose que chaque objet a la probabilité p d'être de la catégorie B et que les classements des différents objets sont indépendants. Les variables aléatoires de cet exercices sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

(a) *Question de Cours :* Enoncer la loi faible des grands nombres.

(b) On note N_n la variable aléatoire égale au nombre d'objets classés en B.
Quelle est la loi de N_n ?
Quelle est la limite de la probabilité $\mathbf{P}\left(\left[np - \sqrt{np(1-p)} \leq N_n \leq np + \sqrt{np(1-p)}\right]\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

(c) On distingue ensuite deux sous-catégories dans la catégorie B : B_1 et B_2.
Soit M_n la variable aléatoire égale au nombre d'objets classés dans B_2. Quelle est la loi conditionnelle de M_n sachant $[N_n = k]$? En déduire la loi de M_n.
Pouvait-on prévoir le résultat ?

(d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On ne fixe plus la taille de l'échantillon mais on prélève des objets jusqu'à en obtenir k de la catégorie B.
On suppose que le nombre des objets fabriqués est infini.

i. Soit T_k la variable aléatoire égale au nombre d'objets qu'il a fallu prélever.
Déterminer la loi de T_k ainsi que son espérance.

ii. On définit les variables aléatoires U_i pour $1 \leq i \leq k$, par :

$$U_1 = T_1, \quad U_2 = T_2 - T_1, \quad \ldots, \quad U_k = T_k - T_{k-1}$$

Quelles sont les lois suivies par les U_i ($1 \leq i \leq k$) ? Exprimer T_k en fonction de $U_1, U_2, \ldots, U_k$.
(On admet dans la suite que les variables $U_1, U_2, \ldots, U_k$ sont indépendantes).
Déterminer la limite en probabilité de T_k/k lorsque k tend vers $+\infty$.

iii. Comment les variables aléatoires T_k ($k \in \mathbb{N}^*$) peuvent-elles servir à estimer le paramètre p ?

Deuxième partie
Corrections

10 Sommes produits et coefficients binomiaux

1. Chercher le plus grand coefficient du développement de $(1+x)^n$ revient à étudier les variations de la suite finie de coefficients binomiaux $u = \left(\binom{n}{k}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$. Pour cela calculons le rapport $\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ que l'on comparera à 1. Nous avons :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\dfrac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}}{\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}} = \frac{n-k}{k+1}$$

Ainsi nous avons l'équivalence :

$$\left(\frac{u_{k+1}}{u_k} \geq 1\right) \iff \left(k \leq \frac{n-1}{2}\right)$$

La question qui se pose alors est $\dfrac{n-1}{2}$ est-il un entier ? La réponse ne peut être péremptoire dans la mesure où nous ne connaissons pas la parité de n. Moralité une **discussion** s'impose selon cette dernière.

– Si $n = 2p+1$ où $p \in \mathbb{N}$, alors $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \geq 1$ si, et seulement si $k \leq p$. **Par conséquent la suite** $\left(\binom{2p+1}{k}\right)_k$ **croît strictement jusqu'à** $\binom{2p+1}{p} = \binom{2p+1}{p+1}$ **puis décroît strictement.**

– Si $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}$, alors $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \geq 1$ si, et seulement si ? $k \leq p-1$ car /

$$\left\lfloor \frac{2p-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor p - \frac{1}{2} \right\rfloor = p-1$$

Par conséquent la suite $\left(\binom{2p}{k}\right)_k$ **croît strictement jusqu'à** $\binom{2p}{p}$ **puis décroît strictement.**

2. Par la formule du binôme de Newton nous avons :

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} + \sum_{k=p+1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0^n = 0$$

Par conséquent nous obtenons la relation :

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} = -\sum_{k=p+1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

soit encore par la **formule du triangle de Pascal** :

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=p+1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right)$$

autrement dit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} &= -\sum_{k=p+1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k} + \sum_{k=p+1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} \\ &= -\sum_{k=p+1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k} + \sum_{k=p}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k}\end{aligned}$$

par décalage d'indice dans la dernière somme

$$\begin{aligned}
&= (-1)^k \binom{n-1}{n} + (-1)^p \binom{n-1}{p} - \sum_{k=p+1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=p+1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \\
&= 0 + (-1)^p \binom{n-1}{p} + 0
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \binom{n-1}{p}}$$

3. (a) Nous avons :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \text{ avec } n \geq 1 \\
&= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\
& \text{par décalage d'indice} \\
&= nx \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\
&= nx\,(1+x)^{n-1} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Pour $n = 0$:

$$S_1 = 0 \qquad (2)$$

Selon (1) et (2) :

$$\boxed{\forall n \geq 0, \quad S_1 = n2^{n-1}}$$

(b) Nous avons :

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k\,(k-1) + k) \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\,(k-1) \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k\,(k-1) \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \text{ avec } n \geq 2 \\
&= \sum_{k=2}^{n} n\,(n-1) \binom{n-2}{k-2} + \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} \\
&= n\,(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} + n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \\
&= n\,(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} + n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\
&= n\,(n-1)\, 2^{n-2} + n2^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_2 = n\,(n+1)\,2^{n-2} \text{ avec } n \geq 2}$$

$$\boxed{\text{Pour } n = 0 : S_2 = 0 \text{ et pour } n = 1 : S_2 = 1}$$

(c) Nous avons :

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\tbinom{n+1}{k} - 1\right) \end{aligned}$$

et :

$$\boxed{S_2 = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)}$$

(d) Tout d'abord commençons par écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\frac{1}{m+k+1} = \int_0^1 t^{m+k}dt$$

ainsi :

$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{1}{m+k+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^1 t^{m+k}dt \\ &= \int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}t^{m+k}dt \\ &\quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-t)^k\binom{n}{k}t^m dt \\ &= \int_0^1 t^m\sum_{k=0}^{n}(-t)^k\binom{n}{k}dt \\ &= \int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt \end{aligned}$$

$$\boxed{S_4 = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}}$$

Ce résultat est admis pour le moment (c'est la fonction bêta d'Euler appliqué à $(n+1, m+1)$).

4. (a) Nous avons :

$$\begin{aligned} S_1 + \sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} \\ &= 2^{2n+1} \end{aligned} \tag{3}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} &= \sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{i+n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{n-i} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{j} \\
&\quad \text{en posant } j=n-i \\
&= S_1 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Selon (3) et (4) :

$$2S_1 = 2^{2n+1}$$

Conclusion :

$$\boxed{S_1 = 2^{2n} = 4^n}$$

(b) Introduisons la somme $S_2' = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2k+1}a^{2k+1}b^{n-2k-1}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
S_2+S_2' &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}a^{2k}b^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2k+1}a^{2k+1}b^{n-2k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= (a+b)^n \qquad (5)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
S_2-S_2' &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}a^{2k}b^{n-2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2k+1}a^{2k+1}b^{n-2k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}a^{2k}b^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2k+1}(-a)^{2k+1}b^{n-2k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}(-a)^{2k}b^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2k+1}(-a)^{2k+1}b^{n-2k-1} \\
&= (b-a)^n \qquad (6)
\end{aligned}$$

Selon (5) et (6) :

$$\boxed{S_2 = \frac{(a+b)^n+(b-a)^n}{2}}$$

(c) Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{2n}{2k} &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(2k\left(2k-1\right)+2k\right)\binom{2n}{2k} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}2k\left(2k-1\right)\binom{2n}{2k} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}2k\binom{2n}{2k} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}2k\left(2k-1\right)\binom{2n}{2k} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}2k\binom{2n}{2k},\ n\geq 1 \\
&= \frac{2n\left(2n-1\right)}{4}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-2}{2k-2} + \frac{2n}{4}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-1}{2k-1} \\
&= \frac{n\left(2n-1\right)}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-2}{2k} + \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{2k+1}
\end{aligned}$$

Avec d'une part pour $n \geq 2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-2}{2k} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{2n-2}{2k+1} = 2^{2n-2}$$

et :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-2}{2k} - \sum_{k=0}^{n-2} \binom{2n-2}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-2}{2k} (-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{2n-2}{2k+1} (-1)^{2k+1} = 0^{2n-2} = 0$$

ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-2}{2k} = 2^{2n-3}$$

D'autre part pour $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} = 2^{2n-1}$$

et :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} - \sum_{k=0}^{n-2} \binom{2n-1}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} (-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k+1} (-1)^{2k+1} = 0^{2n-1} = 0$$

ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-2}{2k} = 2^{2n-2}$$

– Moralité pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{2n}{2k} \\ &= \frac{n(2n-1)}{2} 2^{2n-3} + \frac{n}{2} 2^{2n-2} \\ &= \frac{1}{16} n \left(2^{2n}\right)(2n+1) \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = n(2n+1)\,4^{n-2}}$$

– Pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} S_n &= S_1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{2n}{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{1} k^2 \binom{2}{2k} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = 1}$$

– Pour $n = 0$:

$$\boxed{S_n = 0}$$

5. Nous avons pour tous couples d'entiers naturels (p, q) tels que $1 \leq p \leq q$ et pour tout entier k appartenant à $\{1, \ldots, p\}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\binom{q}{k}} \binom{p}{k} &= \frac{p!}{k!\,(p-k)!} \times \frac{k!\,(q-k)!}{q!} \\ &= \frac{p!}{(p-k)!} \times \frac{(q-k)!}{q!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(q-p)!p!}{q!} \times \frac{(q-k)!}{(p-k)!\,(q-p)!} \\
&= \frac{1}{\binom{q}{p}} \binom{q-k}{q-p}
\end{aligned}$$

donc par sommation sur k, k allant de 1 à p :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\binom{q}{k}} \binom{p}{k} &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\binom{q}{p}} \binom{q-k}{q-p} \\
&= \frac{1}{\binom{q}{p}} \sum_{k=1}^{p} \binom{q-k}{q-p} \\
&\quad \text{en posant } i = q-k \\
&= \frac{1}{\binom{q}{p}} \sum_{i=q-p}^{q-1} \binom{i}{q-p} \\
&= \frac{1}{\binom{q}{p}} \binom{q}{q-p+1} \\
&\quad \text{selon la formule du triangle de Pascal généralisé} \\
&= \frac{\dfrac{q!}{(q-p+1)!\,(p-1)!}}{\dfrac{q!}{p!\,(q-p)!}}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall\,(p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad | \quad 1 \leq p \leq q, \quad \sum_{k=1}^{p} \frac{\binom{p}{k}}{\binom{q}{k}} = \frac{p}{q-p+1}}$$

6. Pour n un entier naturel non nul remarquons que :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(i^2\right)^k \binom{n}{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (i)^{2k} \binom{n}{2k}
\end{aligned}$$

Introduisons pour n entier non nul, $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} i^{2k+1} \binom{n}{2k+1}$ alors :

$$S + T = \sum_{k=0}^{n} (i)^k \binom{n}{k} = (1+i)^n$$

et :

$$\begin{aligned}
S - T &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-i)^{2k} \binom{n}{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-i)^{2k+1} \binom{n}{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-i)^k \binom{n}{k} \\
&= (1-i)^n \\
&\quad \text{selon la formule du binôme}
\end{aligned}$$

Ainsi en additionnant les expressions de $S+T$ et $S-T$ nous obtenons que :

$$S=\frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{2}$$

et comme :

$$(1-i)^n=\overline{(1+i)^n}$$

(en rappelant que $\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(\overline{z})^n=\overline{(z^n)}$) alors :

$$S=\frac{2\,\mathrm{Re}\left((1+i)^n\right)}{2}=\mathrm{Re}\left((1+i)^n\right)$$

avec $|1+i|=\sqrt{2}$, $\mathrm{Arg}\,(1+i)=\dfrac{\pi}{4}$[1] donc :

$$|(1+i)^n|=2^{\frac{n}{2}}\quad\text{et}\quad\mathrm{Arg}\left((1+i)^n\right)=\frac{n\pi}{4}$$

(car $\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|z^n|=|z|^n$ et $\mathrm{Arg}\,(z^n)=n\,\mathrm{Arg}\,z\ [2\pi]$).
Conclusion :

$$\boxed{S=2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$$

7. Soit n un entier naturel non nul et différent de 1. Calculons $T=\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/3\rfloor}\binom{n}{3k}$.

Pour cela introduisons :

$$U=\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/3\rfloor}\binom{n}{3k+1}\quad\text{et}\quad V=\sum_{k=0}^{\lfloor (n-2)/3\rfloor}\binom{n}{3k+2}$$

D'autre part pour tout $z\in\mathbb{C}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}_2$:

$$\begin{aligned}(1+z)^n &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/3\rfloor}\binom{n}{3k}z^{3k}+\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/3\rfloor}\binom{n}{3k+1}z^{3k+1}+\sum_{k=0}^{\lfloor (n-2)/3\rfloor}\binom{n}{3k+2}z^{3k+2}\\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/3\rfloor}\binom{n}{3k}z^{3k}+z\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/3\rfloor}\binom{n}{3k+1}z^{3k}+z^2\sum_{k=0}^{\lfloor (n-2)/3\rfloor}\binom{n}{3k+2}z^{3k}\end{aligned}$$

C'est à ce moment là que l'on pense à introduire les **racines cubiques de l'unité :**

$$1,\quad j=e^{\frac{2i\pi}{3}}\quad\text{et}\quad j^2=e^{\frac{-2i\pi}{3}}$$

car l'avantage dans ce cas est que pour ces trois nombres $z^{3k}=1$ ce qui nous permettra d'avoir directement accès à T (et aussi à U et V si on nous le demandait).
Pour $z=1$ il est clair que :

$$T+U+V=2^n$$

D'autre part pour $z=j$ cela donne :

$$(1+j)^n=T+jU+j^2V$$

Enfin pour pour $z=j^2=\overline{j}$ nous obtenons :

$$\left(1+j^2\right)^n=T+j^2U+jV$$

Sachant enfin que $1+j+j^2=0$, la somme des trois dernières équations nous donne que :

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{3}\left[2^n+(1+j)^n+\left(1+j^2\right)^n\right]\\ &= \frac{1}{3}\left[2^n+\left(-j^2\right)^n+(-j)^n\right]\end{aligned}$$

[1] Argument principal de $1+i$ appartenant à $]-\pi;\pi]$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\left[2^n + (-1)^n \left(j^{2n} + j^n\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[2^n + (-1)^n \left(\left(\overline{j}\right)^n + j^n\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[2^n + (-1)^n \left(\overline{(j^n)} + j^n\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[2^n + 2\,(-1)^n \operatorname{Re}\left(j^n\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[2^n + 2\,(-1)^n \operatorname{Re}\left(e^{\frac{2in\pi}{3}}\right)\right]
\end{aligned}$$

Finalement :

$$T = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\,(-1)^n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right]$$

Remarque : nous aurions pu aussi écrire que

$$\begin{aligned}
1 + j &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
&= e^{\frac{i\pi}{3}}
\end{aligned}$$

alors :

$$(1+j)^n + \left(1+j^2\right)^n = 2\operatorname{Re}\left(e^{\frac{ni\pi}{3}}\right) = 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

ce qui nous aurait donné une autre écriture de T à savoir :

$$\boxed{T = \frac{2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2}}$$

8. Soit n un entier naturel non nul et (a,b) un couple de réels. Calculons $A = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb)$ et $B = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb)$. Bien que les sommes soient présentées dans une seule et même question nous ne les combinerons pas ensemble pour les calculer.

L'astuce méga-classique consiste à dire que :

$$A = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kb)}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{ia} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikb}\right)$$

et :

$$B = \operatorname{Re}\left(e^{ia} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikb}\right)$$

– Commençons par B qui ne pose absolument aucun problème ! Par la formule du **binôme de Newton** :

$$\begin{aligned}
B &= \operatorname{Re}\left(e^{ia}\left(1 + e^{ib}\right)^n\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{ia} e^{\frac{inb}{2}} \left(e^{\frac{-ib}{2}} + e^{\frac{ib}{2}}\right)^n\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{i\left(a + \frac{nb}{2}\right)} \left(2\cos\left(\frac{b}{2}\right)\right)^n\right)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{B = 2^n \cos\left(a + \frac{nb}{2}\right) \cos^n\left(\frac{b}{2}\right)}$$

– Terminons par A.
  – Tout d'abord si $b = 0\,[2\pi]$ alors :

$$\boxed{A = \cos a \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n \cos a}$$

  – Si $b \neq 0\,[2\pi]$:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \mathrm{Re}\left(e^{ia} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{ib}\right)^k\right) \\ & = & \mathrm{Re}\left(e^{ia}\left(\dfrac{1-e^{inb}}{1-e^{ib}}\right)\right) \\ & & \text{somme géométrique de raison différente de 1} \\ & = & \mathrm{Re}\left(e^{ia}\dfrac{e^{\frac{inb}{2}}}{e^{\frac{ib}{2}}}\left(\dfrac{e^{\frac{-inb}{2}}-e^{\frac{inb}{2}}}{e^{\frac{-ib}{2}}-e^{\frac{ib}{2}}}\right)\right) \\ & = & \mathrm{Re}\left(e^{i\left(a+\frac{b}{2}(n-1)\right)}\left(\dfrac{-2i\sin\left(\frac{nb}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{b}{2}\right)}\right)\right) \\ & & \text{par Euler} \end{array}$$

  Conclusion :

$$\boxed{A = \cos\left(a + (n-1)\frac{b}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{nb}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}}$$

9. D'évidence :

$$(x_1 + \cdots + x_p)^n = (x_1 + \cdots + x_p)(x_1 + \cdots + x_p) \times \cdots \times (x_1 + \cdots + x_p)$$

ce qui nous fait constater que le développement nous donne une **somme de produits** du type $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \times \cdots \times x_p^{n_p}$ avec $\sum\limits_{k=1}^{p} n_k = n$. L'exhaustivité nous amène donc à dénombrer tous les $p-$uplets $(n_1, \ldots, n_p)$ de $[\![0, n]\!]^p$ de puissances possibles. La résolution très simple nous amène au **problème des annagrammes** d'un mots de n lettres constitué de n_1 lettres l_1, n_2 lettres l_2, … et n_p lettres l_p. Alors il y a :

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} \times \cdots \times \binom{n-n_1-\cdots-n_{p-1}}{n_p} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \times \cdots \frac{n_p!}{n_p!0!} = \frac{n!}{n_1!n_2! \times \cdots \times n_p!}$$

mots possibles, soit autant de produits du type $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \times \cdots \times x_p^{n_p}$ avec $\sum\limits_{k=1}^{p} n_k = n$. D'où :

$$\boxed{(x_1 + \cdots + x_p)^n = \sum_{\begin{cases} n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N} \\ n_1 + \cdots + n_p = n \end{cases}} \frac{n!}{n_1! \ldots n_p!} x_1^{n_1} \ldots x_p^{n_p}}$$

10. (a) Les indices i et j vérifient les inégalités suivantes : $0 \leq i \leq j \leq n$. D'où :

$$\boxed{S_1 = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} a_{i,j}}$$

(b) Les indices i et j vérifient :

$$\begin{array}{cl} & \begin{cases} 0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n - i \end{cases} \\ \Longleftrightarrow & \begin{cases} 0 \leq i \leq n \\ i \leq n - j \\ 0 \leq j \leq n \end{cases} \\ \Longleftrightarrow & \begin{cases} 0 \leq i \leq \min(n, n-j) \\ 0 \leq j \leq n \end{cases} \\ \Longleftrightarrow & \begin{cases} 0 \leq i \leq n - j \\ 0 \leq j \leq n \end{cases} \end{array}$$

alors :

$$\boxed{S_2 = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} a_{i,j}}$$

(c) Les indices i et j sont tels que :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq i \leq n \\ i \leq j \leq m \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq i \leq n \\ i \leq j \\ 0 \leq j \leq m \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq i \leq \min(n,j) \\ 0 \leq j \leq m \end{array} \right. \end{aligned}$$

Comme $n \leq m$ nous devons établir une **discussion** du fait que nous ne pouvons chiffrer directement $\min(n,j)$ qui vaut j (resp. n) si $j \leq n$ (resp. $n < j$). Ainsi si $j \leq n$, alors $0 \leq i \leq j$ et si $j > n$ alors $0 \leq i \leq n$ d'où nous allons constituer une **partition** de l'ensemble $E = \{(i,j) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!] \mid i \leq j\}$ en deux cellules qui sont respectivement :

$$E_1 = \{(i,j) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!] \mid i \leq j \leq n\}$$

et :

$$\begin{aligned} E_2 &= \{(i,j) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!] \mid i \leq j \text{ et } n < j\} \\ &= \{(i,j) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!] \mid n < j\} \end{aligned}$$

avec :

$$E_1 \uplus E_2 = E$$

Finalement :

$$\boxed{S_3 = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} a_{i,j} + \sum_{j=n+1}^{m} \sum_{i=0}^{n} a_{i,j}}$$

11. (a) Nous avons :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(j \sum_{i=1}^{j} i \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(j \frac{j(j+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} j^2 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

D'où :

$$\boxed{S_1 = \frac{1}{24} n (3n+1)(n+2)(n+1)}$$

(b) Nous avons :

$$S_2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \min(i,j)$$

– Si $i \leq j$: $\min(i,j) = i$.
– Si $i > j$: $\min(i,j) = j$.

Par suite il vient le "découpage de la somme" suivant :

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{i(i-1)}{2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2
\end{aligned}$$

Soit donc :

$$\boxed{S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

c. Pour $n \geq 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{1+j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{1+j} \sum_{i=0}^{j} i \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{j(j+1)}{2(j+1)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} j
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{S_3 = \frac{n(n+1)}{4}}$$

12. Pour tout couple $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, notons $A_{n,p}$ la quantité à refermer. En développant le produit :

$$\begin{aligned}
A_{n,p} &= \sum_{i=1}^{n} i(i+1)\dots(i+p-1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(i+p-1)!}{(i-1)!} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{p!\,(i+p-1)!}{p!\,(i-1)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p!} \sum_{i=1}^{n} \binom{i+p-1}{p} \\
&= p! \sum_{j=p}^{n+p-1} \binom{j}{p}
\end{aligned}$$

en posant $j = i + p - 1$

Puis par la **formule du triangle de Pascal généralisé** :

$$\boxed{A_{n,p} = p!\binom{n+p}{p+1}}$$

11 Correction dénombrement

1. Pour bien comprendre ce qui se passe, imaginons ce qui se serait passé si les boules avaient été discernables. Prenons l'exemple de trois boules numérotées dans trois urnes discernables, cela nous donnerait 8 répartitions

123	12	13	23	1	2	3	
	3	2	1	23	13	12	123

Une distribution correspond à une application de l'ensemble des boules dans l'ensemble des urnes. Jamais le mot "application" n'a mieux porté son nom puisque l'image d'une boule est l'urne dans laquelle elle va se placer. Notez que l'ordre des boules au sein d'une même urne n'a absolument aucune importance.
Maintenant si les boules sont indiscernables nous ne pouvons distinguer les cas numéro $2, 3, 4$ et $5, 6, 7$. Cela donne :

•••	••	•	
	•	••	•••

C'est pourquoi pour nous faciliter la tache nous faire correspondre à chaque répartition un quadruplet constitué de "0" et des "|" de la façon suivante :

$$000\,| \qquad 00\,|\,0 \qquad 0\,|\,00 \qquad |\,000$$

Mettons en place l'explication "littéraire" de ce que l'on appelle le codage de **Bose-Enstein.** Voici ce que je vous propose : effectuons le dénombrement de chaque disposition en instaurant un codage binaire avec des "0" et des "|". Pour cela on écrit en ligne autant de "0" que l'on place de boules dans la première urne (événetuellement vide), puis un "|" pour signaler que l'on passe à l'urne suivante et ainsi de suite. On obtient ainsi une succession de $m+n-1$ signes, constitués de m "0" et $n-1$ "|" **dont l'ordre compte**. On devra donc dénombrer des $(m+n-1)-$listes d'éléments de l'ensemble $\{$"0", " | "$\}$ comportant exactement m "0" et $n-1$ "|". Le problème se ramène à celui des **anagrammes** d'un mot (cf. cours) de $m+n-1$ lettres comportant exactement m "O" et $n-1$ "I". Cela nous donne :

$$\boxed{\frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!} = \binom{m+n-1}{m} \text{ dispositions possibles}}$$

2. Tout d'abord signalons qu'un chemin reliant les points A et C est de longueur $2n+2n=4n$ constitué de $2n$ pas horizontaux "H" et $2n$ verticaux "V". Cela nous amène à dénombrer le nombre de $4n-$listes d'éléments de l'ensemble $\{$"H", "V"$\}$ comportant exactement $2n$ "H" et $2n$ "V".
Cela nous ramène encore au **problème des anagrammes** d'un mot de $4n$ lettres comportant exactement $2n$ "H" et $2n$ "V". Cela nous donne :

$$\boxed{\frac{(4n)!}{(2n)!\,(2n)!} = \binom{4n}{2n} \text{ chemins possibles}}$$

Chaque chemin passant par le milieu M du carré est l'**association** d'un chemin entre A et M de longueur $2n$ comportant n pas horizontaux "H" et n verticaux "V" (il y en a $\binom{2n}{n}$ par le même raisonnement qu'auparavant) et d'un chemin entre M et C de longueur $2n$ entre A et M comportant n pas horizontaux "H" et n verticaux "V" (il y en a $\binom{2n}{n}$ aussi). Par le **lemme des bergers** il vient qu'il y a :

$$\boxed{\binom{2n}{n}^2 \text{ chemins possibles passant par le milieu du carré}}$$

3. On souhaite déterminer le nombre d'ensembles de la forme $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ tels que :
   - pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, A_k est un sous-ensemble de E de cardinal p ;
   - pour tout $(k, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $k \neq j$, A_k et A_j sont disjoints.

– la réunion disjointe des ensembles A_k ($k \in [\![1, n]\!]$) nous donne E.
Commençons par tenir compte de l'ordre. Pour choisir A_1, il y a $\binom{np}{p}$ possibilités, puis pour choisir A_2, il y a $\binom{(n-1)\,p}{p}$ possibilités. En poursuivant ainsi jusqu'à A_n, on constate qu'il y a :

$$N = \binom{np}{p}\binom{(n-1)\,p}{p} \times \cdots \times \binom{p}{p}$$

possibilités. Cette expression se simplifie, en explicitant les coefficients binomiaux :

$$N = \frac{(np)!}{p!\,((n-1)\,p)!}\frac{((n-1)\,p)!}{p!\,((n-2)\,p)!} \times \cdots \times \frac{(2p)!}{p!p!}\frac{p!}{p!0!} = \frac{(np)!}{(p!)^n}$$

Comme on ne tient pas compte de l'ordre (car on veut choisir un ensemble de la forme $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ et non pas un n−uplet $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, N représente $n!$ fois le nombre cherché. Le nombre de partitions cherché est donc :

$$\boxed{\frac{(np)!}{n!\,(p!)^n}}$$

4. (a) En reprenant le même raisonnement qu'à l'exercice précédent, on a :

$$\boxed{\binom{15}{7} \text{ chemins possibles}}$$

sachant qu'un chemin entre A et B est une 15−liste d'éléments de $\{“H”, “V”\}$ comportant exactement 7 “H” et 8 “V”.

(b) Dans cette question on demande de dénombre l'ensemble suivant :

$$\left\{(n_1, n_2, \ldots, n_8) \in \mathbb{N}^8 \mid n_1 + n_2 + \cdots + n_8 = 8\right\}$$

Répondre à cette question peut se faire en reprenant le **codage de Bose-Einstein** décrit au premier exercice. En l'appliquant à notre question nous pouvons assimiler un élément de l'ensemble à un remplissage de 8 boules indiscernables ((générant 8 “0”) dans 8 urnes discernables par leur numéro (générant 7 cloisons mobiles chacune symbolisée par “|”). Cela nous ramène à dénombrer le nombre de 15−listes de l'ensemble {“0”, “ | ”} comportant exactement 8 “0” et 7 “|”. Cela donne aussi :

$$\boxed{\binom{15}{7} \text{ solutions possibles}}$$

5. (a) La phrase de l'énoncé : “*On ne tient compte, dans l'évaluation du nombre de dispositions possibles que de l'appartenance à une équipe*” doit vous faire penser au fait que l'on ne distingue pas l'identité des personnes à l'intérieur d'une équipe, mais qu'on le fait lorsque l'on passe d'une équipe à une autre. **Ce n'est donc pas le problème du rangement de n boules identiques dans p urnes distinctes** mais celui du nombre des **anagrammes** d'un mot de n lettres possédant n_1 lettres l_1, n_2 lettres $l_2, \ldots n_p$ lettres l_p. On a donc :

$$\boxed{\frac{n!}{n_1! \ldots n_p!} \text{ dispositions possibles}}$$

Je vous engage, plus que vivement, à savoir retrouver ce résultat !
NB : Les lettres $l_1, \ldots, l_p$ jouent le rôle des équipes.

(b) On écrit que :

$$(x_1 + \cdots + x_p)^n = \underbrace{(x_1 + \cdots + x_p) \times \cdots \times (x_1 + \cdots + x_p)}_{n \text{ fois}}$$

En développant le membre de droite on s'apperçoit que l'on obtient une **somme de produits** de la forme $x_1^{n_1}\dots x_p^{n_p}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$ obtenus autant de fois qu'il y a de dispositions en ligne de n objets x_i provenant des p équipes $\underbrace{x_1,\dots,x_1}_{n_1 \text{ fois}},\dots,\underbrace{x_p,\dots,x_p}_{n_p \text{ fois}}$ (les x_i représentent les individus) soit :

$$\underbrace{\binom{n}{n_1}}_{\substack{\text{choix des}\\ n_1 \text{ personnes}\\ \text{équipe } 1}} \times \underbrace{\binom{n-n_1}{n_2}}_{\substack{\text{choix des}\\ n_2 \text{ personnes}\\ \text{équipe } 2}} \times\cdots\times \underbrace{\binom{n-n_1-\cdots-n_{p-1}}{n_p}}_{\substack{\text{choix des}\\ n_p \text{ personnes}\\ \text{équipe } p}} = \frac{n!}{n_1!\dots n_p!}$$

C'est la **formule des anagrammes**. D'où le résultat :

$$\boxed{(x_1+\cdots+x_p)^n = \sum_{\begin{cases} n_1,\dots,n_p\in\mathbb{N}\\ n_1+\cdots+n_p=n\end{cases}} \frac{n!}{n_1!\dots n_p!}x_1^{n_1}\dots x_p^{n_p}}$$

– La quantité $\dfrac{n!}{n_1!\dots n_p!}$ s'écrit aussi $\dbinom{n}{n_1,\dots,n_p}$ et s'appelle **coefficient multinomial** (hors-programme).
– On retrouve bien la **formule du binôme de Newton** lorsque $p=2$.

(c) Placer les n personnes autour d'une table ronde revient à les placer en ligne à partir d'une place choisie arbitrairement, (en tournant par exemple dans le sens des aiguilles d'une montre) avec la correction suivante : si on tourne d'un ou plusieurs crans une disposition, on en obtient une nouvelle qui doit être considérée comme **identique** à la précédente. Le nombre N recherché vérifie donc :

$$nN = \frac{n!}{n_1!\dots n_p!}$$

d'où :

$$\boxed{N = \frac{(n-1)!}{n_1!\dots n_p!}}$$

6. (a) i. L'ensemble $\sum(n,p)$ est un ensemble d'entiers naturels, donc positifs, dont la somme est égale à n. Par conséquent chaque entier n_k est largement compris entre 1 et n ce qui entraîne que $\sum(n,p)$ est inclus dans le produit cartésien $[\![1,n]\!]^p$ qui est un ensemble fini d'après le cours. En conclusion :

$$\boxed{\textstyle\sum(n,p) \text{ est un ensemble fini}}$$

ii. Nous avons $\sum(n,1)=\{n\}$ et :

$$\boxed{S(n,1)=1}$$

D'autre part $\sum(n,2) = \left\{(n_1,n_2)\in(\mathbb{N}^*)^2 \mid n_1+n_2=n\right\}$. Nous voici donc en présence d'une équation à deux inconnues admettant une infinité de solutions qui sont les couples de la forme $(k,n-k)$ avec $k\in[\![1,n-1]\!]$ en ayant posé comme paramètre, ou inconnue auxiliaire, $n_1=k$. Le nombre de tels couples étant égal au cardinal de l'ensemble $[\![1,n-1]\!]$ il vient que :

$$\boxed{S(n,2) = \operatorname{card}\left(\left\{(k,n-k)\in(\mathbb{N}^*)^2 \mid k\in[\![1,n-1]\!] \text{ et } n \text{ fixé}\right\}\right) = n-1}$$

Enfin trivialement $\sum(n,n)=\{(1,1,\dots,1)\}$ et donc :

$$\boxed{S(n,n)=1}$$

iii. En faisant varier la valeur de n_{p+1} (que nous noterons k) de 1 à $n-1$ nous avons l'égalité :

$$\sum(n,p+1) = \biguplus_{k=1}^{n-1} \left\{(n_1,\ldots,n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid n_1+n_2+\cdots+n_p = n-k\right\}$$

D'où par propriété du cardinal, disjonction oblige :

$$S(n,p+1) = \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{card}\left(\left\{(n_1,\ldots,n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid n_1+n_2+\cdots+n_p = n-k\right\}\right)$$

Or $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i \geq p$ ce qui induit que si $n-k<p$,

$$\left\{(n_1,\ldots,n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid n_1+n_2+\cdots+n_p = n-k\right\} = \emptyset$$

de cardinal nul, donc :

$$S(n,p+1) = \sum_{k=1}^{n-p} \operatorname{card}\left(\left\{(n_1,\ldots,n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid \sum_{i=1}^{p} n_i = n-k\right\}\right) + 0$$

Enfin pour chaque k fixé dans l'ensemble $[\![1,n-p]\!]$,

$$\operatorname{card}\left(\left\{(n_1,\ldots,n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p \mid \sum_{i=1}^{p} n_i = n-k\right\}\right) = S(n-k,p)$$

nous obtenons finalement :

$$\boxed{S(n,p+1) = \sum_{k=1}^{n-p} S(n-k,p) = \sum_{k=p}^{n-1} S(k,p)}$$

iv. A la vue des premières questions nous pouvons conjecturer que pour tout entier p non nul et tout entier $n \geq p$, fixé, $S(n,p) = \binom{n-1}{p-1}$. Démontrons-le par une récurrence finie sur $p \in [\![1,n]\!]$.

- **Initialisation** pour $p=1$.
  Nous avons déjà vu auparavant que $S(n,1)=1$ et $\binom{n-1}{0}=1$.
- **Hérédité : $p \longrightarrow p+1$.** Supposons que pour tout p de $[\![1,n-1]\!]$, la proposition soit vérifiée, à savoir que pour tout entier p de $[\![1,n-1]\!]$ nous avons $S(k,p) = \binom{k-1}{p-1}$.
  Montrons alors que $S(n,p+1) = \binom{n-1}{p}$. Or pour tout entier $n \geq p+1$, nous avons :

$$\begin{aligned} S(n,p+1) &= \sum_{k=p}^{n-1} S(k,p) \\ &= \sum_{k=p}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} \\ &= \sum_{k=p-1}^{n-2} \binom{k}{p-1} \\ &\quad \text{par décalage d'indice} \\ &= \binom{n-1}{p} \\ &\quad \text{par le triangle de Pascal généralisé} \end{aligned}$$

Ainsi la proposition est vraie pour tout entier $p \leq n$ où n est un entier naturel non nul fixé.

(b) La traduction formelle de cette question consiste à déterminer le cardinal de l'ensemble $\biguplus\limits_{p=1}^{n} \sum(n,p)$.

En effet même si le texte vous paraît vague en ne vous donnant pas la longueur des listes en jeu, il faut savoir que la somme mettant des entiers non nuls en jeu, l'entier n, fixé, est au minimum égal à p, ce qui impose les valeurs des bornes de la somme. Ce ne sont pas les champions de France de la sommation qui vont avoir peur de :

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}\left(\biguplus_{p=1}^{n} \sum(n,p)\right) &= \sum_{p=1}^{n} \operatorname{card}\left(\sum(n,p)\right) \\
&= \sum_{p=1}^{n} S(n,p) \\
&\quad \text{par définition} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \binom{n-1}{p-1} \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p}
\end{aligned}$$

Soit d'après la **formule du binôme de Newton** :

$$\boxed{\operatorname{card}\left(\biguplus_{p=1}^{n} \sum(n,p)\right) = 2^{n-1}}$$

7. Ce **problème des dérangements** doit vous faire au problème des "danseurs de Chicago" dans le cas où aucun couple ne danse ensemble. Vous avez surement le souvenir que dénombrer directement l'ensemble est très difficile pour ne pas dire plus et qu'il vaut mieux, par conséquent, en dénombrer le complémentaire. Pour cela introduisons pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$, F_k l'ensemble des permutations de $\{1,\ldots,n\}$ telles que k soit un point fixe. Ainsi l'ensemble à dénombrer est $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \ldots \cap \overline{F_n}$ dont le complémentaire est $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$ par une **loi de Morgan**. Les unions n'étant pas disjointes, la **formule du crible** va venir à notre secours pour donner :

$$\operatorname{card}(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \operatorname{card}(F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k})$$

avec $\operatorname{card}(F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k}) = 1^k \times (n-k)!$ puisque les k points fixes ne peuvent avoir qu'une seule image par σ, à savoir eux-même, et il reste à dénombrer le nombre de permutations de l'ensemble $\{1,\ldots,n\} - \{i_1,\ldots,i_k\}$ constitué de $n-k$ éléments. Par suite :

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (n-k)! \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (n-k)! \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!}
\end{aligned}$$

En conclusion comme l'univers Ω est formé de toutes les permutations de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}\left(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \ldots \cap \overline{F_n}\right) &= \operatorname{card}(\Omega) - \operatorname{card}(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n) \\
&= n! - n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \\
&= n! \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\right)
\end{aligned}$$

$$= n!\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)$$

$$\boxed{\operatorname{card}\left(\overline{F_1}\cap\overline{F_2}\cap\ldots\cap\overline{F_n}\right) = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}}$$

C'est la **formule des dérangements**.

> **Retenez que l'emploi de la formule est évitable sauf dans la gestion du problème des rencontres.**

8. Il y a $\binom{n}{p}$ manières de choisir une partie $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ d'éléments de l'intervalle $[\![1, n]\!]$ de cardinal n, et il n'y a qu'une seule manière de les ranger dans l'ordre strictement croissant. Le lemme des bergers permettant de conclure !

$$\boxed{\operatorname{card}\left(\{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leq n\}\right) = \binom{n}{p}}$$

9. On va établir une bijection entre l'ensemble des suites strictement croissantes noté A_n, à savoir :

$$A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leq n\}$$

et l'ensemble des suites croissantes :

$$B_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_p \leq n\}$$

Pour cela introduisons :

$$\Delta : \begin{array}{ccc} B_n & \longrightarrow & A_{n+p-1} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_p) & \longmapsto & (x_1, x_2+1, \ldots, x_i+i-1, \ldots, x_p+p-1) \end{array}$$

et montrons que l'application Δ est bien **définie et bijective**.
Il nous faut démontrer que si $(x_1, \ldots, x_p) \in B_n$ alors $\Delta(x_1, \ldots, x_p) \in A_{n+p-1}$.
Notons $\Delta(x_1, \ldots, x_p) = (l_1, \ldots, l_p)$ et montrons que $(l_1, \ldots, l_p) \in A_{n+p-1}$ à savoir montrons que :

$$1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_p \leq n+p-1$$

► Tout d'abord nous avons pour chaque entier $i \in [\![1, p]\!]$, $1 \leq x_i \leq n$ donc à fortiori :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad 1 \leq x_i + i - 1 \leq n + p - 1$$

► D'autre part pour chaque entier $i \in [\![1, p-1]\!]$ nous avons par définition de B_n, $x_i \leq x_{i+1}$ et comme $i-1 < i$ on obtient que $x_i + i - 1 < x_{i+1} + i$ autrement dit :

$$\forall i \in [\![1, p-1]\!], \quad l_i < l_{i+1}$$

Les deux vérifications nous assurent que $\Delta(x_1, \ldots, x_p) \in A_{n+p-1}$ et l'**application Δ est bien définie**.

Rappelons d'autre part que :

> **Proposition** *Soit $f : E \longrightarrow F$. Il y a équivalence entre :*
> (1) *L'application est bijective ;*
> (2) *Il existe une application $g : G \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.*

L'expression de la réciproque de Δ est facile à obtenir puisque pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $l_i = x_i + i - 1$ est équivalent à pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x_i = l_i - i + 1$ ainsi si l'on note Θ l'application réciproque de Δ nous avons :

$$\Theta : \begin{array}{ccc} A_{n+p-1} & \longrightarrow & B_n \\ (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_p) & \longmapsto & (x_1, x_2-1, \ldots, x_i-i+1, \ldots, x_p-p+1) \end{array}$$

Une démonstration exactement similaire à la question précédente nous montre que Θ est bien définie, et il ne nous reste plus qu'à démontrer qu'elle est bijective autrement dit que $\Theta\circ\Delta=\mathrm{Id}_{B_n}$ et que $\Delta\circ\Theta=\mathrm{Id}_{A_{n+p-1}}$.
Soit $(x_1,\ldots,x_p)\in B_n$:

$$\begin{aligned}(\Theta\circ\Delta)(x_1,\ldots,x_p) &= \Theta(\Delta(x_1,\ldots,x_p))\\ &= \Theta(x_1,x_2+1,\ldots,x_i+i-1,\ldots,x_p+p-1)\\ &= (x_1,(x_2+1)-1,\ldots,(x_i+i-1)-i+1,\ldots,(x_p+p-1)-p+1)\\ &= (x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_p)\end{aligned}$$

De même soit $(x_1,\ldots,x_p)\in A_{n+p-1}$:

$$\begin{aligned}(\Delta\circ\Theta)(x_1,\ldots,x_p) &= \Delta(\Theta(x_1,\ldots,x_p))\\ &= \Delta(x_1,x_2-1,\ldots,x_i-i+1,\ldots,x_p-p+1)\\ &= (x_1,(x_2-1)+1,\ldots,(x_i-i+1)+i-1,\ldots,(x_p-p+1)+p-1)\\ &= (x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_p)\end{aligned}$$

En conclusion l'application Δ est bijective et $\Theta=\Delta^{-1}$ avec :

$$\Delta^{-1}:\begin{array}{ccc}A_{n+p-1} & \longrightarrow & B_n\\ (x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_p) & \longmapsto & (x_1,x_2-1,\ldots,x_i-i+1,\ldots,x_p-p+1)\end{array}$$

Comme nous venons de démontrer que les ensembles B_n et A_{n+p-1} sont **équipotents** (i.e. il existe une bijection appliquée entre les deux ensembles) nous avons :

$$\mathrm{card}(B_n)=\mathrm{card}(A_{n+p-1})=\binom{n+p-1}{p}$$

soit encore :

$$\boxed{\mathrm{card}\left(\{(x_1,x_2,\ldots,x_p)\in\mathbb{N}^p\mid 1\leq x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_p\leq n\}\right)=\binom{p+n-1}{p}}$$

10. Soit n un entier naturel non nul et $A_1,\ldots,A_n$ n ensembles finis, alors la réunion des ensembles A_k, $k\in[\![1,n]\!]$ est un ensemble fini avec :

$$\boxed{\mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathrm{card}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})}$$

Au fait vous êtes-vous posé une fois la question de savoir combien y a-t-il de termes dans le second membres ? Voici la réponse : **pour commencer signalons que** $\mathrm{card}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})$ **est indépendants des indices** $i_1,\ldots,i_k$ et pour chaque entier k fixé dans l'ensemble $[\![1,n]\!]$ il y a $\binom{n}{k}$ suites strictement croissantes d'entiers compris entre 1 et n. Par conséquent le nombre demandé est :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-\binom{n}{0}=2^n-1}$$

11. (a) Un tirage est une **combinaison** (choix non ordonné) de p boules prises parmi les n au départ, il y a donc :

$$\boxed{\binom{n}{p}\text{ tirages possibles}}$$

(b) i. Un tel tirage est une **combinaison** (choix non ordonné) de p boules prises dans l'ensemble des numéros favorables $[\![1,k]\!]$, il y a donc pour $p\leq k\leq n$:

$$\boxed{\binom{k}{p}\text{ tirages possibles}}$$

Sinon il n'y en a pas !

ii. Un tel tirage est une **combinaison** (choix non ordonné) de $p-1$ boules prises dans l'ensemble des numéros favorables $[\![1,k-1]\!]$ ($\binom{k-1}{p-1}$ choix), à laquelle on rajoute l'unique numéro k (un seul choix) il y a donc, par le **lemme des bergers,** pour $p \leq k \leq n$:

$$\boxed{\binom{k-1}{p-1} \text{ tirages possibles}}$$

iii. Introduisons $\mathcal{P}_p([\![1,n]\!])$ l'ensemble de toutes les parties de $[\![1,n]\!]$ qui soient de cardinal p et pour tout k de $[\![p,n]\!]$ l'ensemble :

$$\mathcal{P}_{p,k}([\![1,n]\!]) = \left\{\{b_1,\ldots,b_p\} \in \mathcal{P}_p([\![1,n]\!]) \mid \max_{1\leq i\leq p}(b_i) = k\right\}$$

avec :

$$\text{card}(\mathcal{P}_{p,k}([\![1,n]\!])) = \binom{k-1}{p-1}$$

Dès lors il est clair que la famille $(\mathcal{P}_{p,k}([\![1,n]\!]))_{k\in[\![p,n]\!]}$ constitue une **partition** de $\mathcal{P}_p([\![1,n]\!])$.
Ainsi :

$$\text{card}(\mathcal{P}_p([\![1,n]\!])) = \sum_{k=p}^{n} \text{card}(\mathcal{P}_{p,k}([\![1,n]\!]))$$

Autrement dit :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n}\binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}}$$

(c) i. Un tel tirage est une partie ordonnée (ou arrangement) de p éléments pris parmi n, soit :

$$\boxed{A_n^p \text{ tirages possibles}}$$

ii. Un tel tirage est l'association de l'unique boule 2 mise en première position (un seul choix) et d'un **arrangement** et de $p-1$ boules prises parmi $n-1$ (on retire la boule 2). Il y a donc, par le lemme des bergers :

$$\boxed{A_{n-1}^{p-1} \text{ tirages possibles}}$$

(d) i. Un tel tirage est une $\boldsymbol{p}$**−liste** de $[\![1,n]\!]$, il y a donc :

$$\boxed{n^p \text{ tirages possibles}}$$

ii. Tout d'abord mentionnons que si $p=1$, il n'existe pas de tels tirages. Supposons donc que $p \geq 2$, nous devons trouver :

$$\text{card}(\{(b_1,\ldots,b_p) \in [\![1,n]\!]^p \mid b_1 < b_p\})$$

Or nous avons l'union disjointe suivante :

$$\{(b_1,\ldots,b_p) \in [\![1,n]\!]^p \mid b_1 < b_p\} = \biguplus_{k=1}^{n-1}\biguplus_{i=k+1}^{n}\{(k,b_2,\ldots,b_{p-1},i) \in [\![1,n]\!]^p\}$$

avec pour k et i **fixés** :

$$\text{card}(\{(k,b_2,\ldots,b_{p-1},i) \in [\![1,n]\!]^p\}) = \text{card}\left(\left\{(b_2,\ldots,b_{p-1}) \in [\![1,n]\!]^{p-2}\right\}\right) = n^{p-2}$$

Donc il y a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n} n^{p-2} &= \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\,n^{p-2} \\
&= n^{p-2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) \\
&= n^{p-2}\sum_{k=1}^{n-1}k \\
&= n^{p-2}\frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{n^{p-1}(n-1)}{2} \text{ tirages possibles}}$$

iii. Le cardinal demandé est celui de l'ensemble :

$$\{(n_1,\ldots,n_p)\in[\![1,n]\!]^p \mid n_1+n_2+\cdots+n_p=p+2\}$$

En reprenant le résultat de l'exercice **6** avec $n=p+2$:

$$\boxed{\operatorname{card}\left(\{(n_1,\ldots,n_p)\in[\![1,n]\!]^p \mid n_1+n_2+\cdots+n_p=p+2\}\right)=\binom{p+1}{p-1}=\frac{p(p+1)}{2}}$$

(c'est le cardinal de $S_{p+2,p}$). Maintenant je vous vois venir me disant comment peut-on répondre sans avoir déjà fait l'exercice **6** ? La réponse est simple. Vous pensez très fort au **codage d'Einstein et de Bose**, en assimilant le problème au rangement de $p+2$ boules **indiscernables** dans p urnes numérotées de 1 à p, donc **discernables**, qui engendrent respectivement $p+2$ "0" et $p-1$ " | ". Ceci a bien été expliqué dans l'exercice **1** et donne le résultat $\binom{p+1}{p-1}$ tant espéré !

iv. Tout d'abord commençons par choisir les deux seuls numéros i et j qui apparaissent exactement. Il y a $\binom{n}{2}$ possibilités. Ensuite, il nous faut dénombrer les $p-$listes d'éléments pris dans l'ensemble $\{i,j\}$ en éliminant les deux extrêmes cas $(i,\ldots,i)$ et $(j,\ldots,j)$; nous avons 2^p-2 possibilités. Il ne reste plus qu'à rendre visite aux bergers des montagnes crétoises nous affirmant qu'il y a :

$$\boxed{\binom{n}{2}(2^p-2)=n(n-1)\left(2^{p-1}-1\right) \text{ possibilités}}$$

12. (a) La question nous demande de dénombrer le nombre d'applications f de X vers Y dont le cardinal de l'ensemble image est égal à k. Pour cela on "découpe" l'ensemble de départ X en k parties non vides (k fixé dans $[\![1,n]\!]$), non nécessairement de même cardinal, de manière à former une **partition** de X ($\left\{ n \atop k \right\}$ choix), et en sachant que tous les éléments d'une même partie auront le même singleton image dans Y qu'il faudra choisir. Cela revient à construire une **application injective** entre un ensemble de départ de cardinal k et un d'arrivée de cardinal m, soit $A_m^k=m^{\underline{k}}$ choix. Par le lemme des berger :

$$\boxed{\operatorname{card}\left(\{f:X\to Y \mid \operatorname{card} f(X)=k\}\right)=\left\{ n \atop k \right\} m^{\underline{k}}}$$

(b) Soit $\mathcal{F}(X,Y)$ l'ensemble des applications de X vers Y. Il est est bien connu que son cardinal vaut m^n et que d'autre part il est la réunion disjointe des ensembles $\{f:X\to Y \mid \operatorname{card}(f(X))=k\}$ où k parcourt l'ensemble $[\![1,n]\!]$, car en faisant varier exhaustivement la valeur du cardinal de $\operatorname{Im} f$ on obtiendra toutes les applications possibles de X vers Y. Par conséquent :

$$\operatorname{card}(\mathcal{F}(X,Y))=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{card}\left(\{f:X\to Y \mid \operatorname{card}(f(X))=k\}\right)$$

soit donc :

$$\boxed{m^n=\sum_{k=1}^{n}\left\{ n \atop k \right\} m^{\underline{k}}}$$

13. (a) Sans commentaire particulier, c'est du cours ...

$$\boxed{\binom{n}{p}}$$

(b) Notons :

$$S = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \mid A \cap B = \emptyset,\ A \cup B = E\right\}$$

et introduisons :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad S_k = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \mid \operatorname{card}(A) = k,\ A \cap B = \emptyset \text{ et } A \cup B = E\right\}$$

La famillle $(S_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ constitue une **partition** de S avec pour tout entier k de $[\![0, n]\!]$,

$$\operatorname{card}(S_k) = \binom{n}{k} \times 1$$

car A est une partie de E possédant k éléments et $B = \overline{A}$ est unique. Ainsi, selon la formule du **binôme de Newton** :

$$\boxed{\operatorname{card}(S) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

(c) Soit :

$$T = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \mid A \subset B\right\}$$

et introduisons :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad T_k = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \mid \operatorname{card}(B) = k \text{ et } A \subset B\right\}$$

Alors pour tout k de $[\![0, n]\!]$,

$$\operatorname{card}(S_k) = \binom{n}{k} 2^k$$

car $A \in \mathcal{P}(B)$ et $B \in \mathcal{P}_k(E)$ où $\mathcal{P}_k(E)$ est l'ensemble des parties de E possédant k éléments. Comme la famille $(T_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ constitue une partition de T, il vient, selon le **binôme de Newton** :

$$\boxed{\operatorname{card}(T) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n}$$

(d) Soit :

$$U = \left\{(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3 \mid A \subset B \subset C\right\}$$

Introduisons :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad U_k = \left\{(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3 \mid \operatorname{card} C = k \text{ et } A \subset B \subset C\right\}$$

Alors selon **3.**

$$\operatorname{card}(U_k) = \binom{n}{k} 3^k$$

car $C \in \mathcal{P}_k(E)$ et pour C fixé, il y a 3^k façons de choisir A et B tels que $A \subset B$ avec $B \subset C$. Comme la famille $(U_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ constitue une **partition** de U, alors selon le **binôme de Newton** :

$$\boxed{\operatorname{card}(U) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n}$$

14. (a) Tout d'abord signalons que les éléments de E sont choisis au hasard (équiprobabilité) et donc l'univers Ω sera muni de la probabilité uniforme. Nous avons :

$$\Omega = \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$$

(l'univers est l'ensemble des couples de parties de E), alors :

$$\operatorname{card}(\Omega) = (2^n)^2 = 4^n$$

Pour déterminer $\text{card}\left(\left\{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2 \mid A\subset B\right\}\right)$ introduisons pour tout $k\in[\![0,n]\!]$,

$$I_k=\left\{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2 \mid A\subset B \text{ et } \text{card}(B)=k\right\}$$

La famille $(I_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ constitue une **partition** de l'ensemble $\left\{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2 \mid A\subset B\right\}$ et par propriété du cardinal :

$$\text{card}\left(\left\{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2 \mid A\subset B\right\}\right)=\sum_{k=0}^{n}\text{card}(I_k)$$

Pour chaque k de $[\![0,n]\!]$ nous avons :

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\quad \text{card}(I_k)=\binom{n}{k}2^k$$

car $B\in\mathcal{P}_k(E)$ (ensemble de tous les sous-ensembles de E de cardinal k) et $A\in\mathcal{P}(E)$, le **lemme des bergers** permettant de conclure. En conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([A\subset B])=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

(b) Pour $k\in[\![0,n]\!]$, calculons la probabilité que $\mathbf{P}([\text{card}(A\cap B)=k])$. Pour fixer les idées, commençons par la construction de A dont nous fixerons la valeur du cardinal à i où i est fixé dans l'ensemble $\{k,\ldots,n\}$ ($\binom{n}{i}$ possibilités). Puis pour terminer la construction avec l'ensemble B, nous devrons choisir k éléments de A ($\binom{i}{k}$ possibilités). Une fois ces éléments de l'intersection choisis, l'ensemble B devra être complété par une partie de $E-B$ éventuellement vide $\left(2^{n-i}\text{ possibilités}\right)$. Le **lemme des bergers** nous donne donc pour chaque entier $k\in[\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\text{card}(\text{card}(A\cap B)=k) &= \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}2^{n-i}\\
&= \sum_{i=k}^{n}\frac{n!}{i!\,(n-i)!}\times\frac{i!}{k!\,(i-k)!}2^{n-i}\\
&= \sum_{i=k}^{n}\frac{n!}{(n-i)!}\times\frac{1}{k!\,(i-k)!}2^{n-i}\\
&= \sum_{i=k}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\times\frac{(n-k)!}{(n-i)!\,(i-k)!}2^{n-i}\\
&= \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}2^{n-i}\\
&= \binom{n}{k}\sum_{i=k}^{n}\binom{n-k}{i-k}2^{n-i}\\
&= \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}2^{n-k-i}\\
&= \binom{n}{k}3^{n-k}\\
&\quad\text{par le binôme de Newton}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\quad \mathbf{P}([\text{card}(A\cap B)=k])=\frac{1}{4^n}\binom{n}{k}3^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$$

$$\boxed{\operatorname{card}(A \cap B) \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)}$$

Enorme non ? Mais pas étonnant du tout, car finalement dénomber le nombre d'éléments de $A \cap B$ c'est effectuer une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $1/4$, puisque les ensembles A et B génèrent quatre atomes (voir la définition dans le "poster" traitant des tribus). Il y a donc une chance sur quatre pour chaque élément de E de se situer dans l'intersection, par équiprobabilités des atomes. Est-ce bien clair ?

(c) Tout d'abord remarquons que la variable $\operatorname{card}(A \cap B)$ admet une espérance en tant que **variable discrète finie**, et selon le cours :

$$\boxed{\mathbf{E}(\operatorname{card}(A \cap B)) = \frac{n}{4}}$$

(d) Lorsque le couple (A, B) parcourt le produit cartésien $(\mathcal{P}(E))^2$, la variable aléatoire $\operatorname{card}(A \cap B)$ prend ses valeurs dans l'ensemble $[\![0, n]\!]$. En notant pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'ensemble :

$$C_k = \left\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid \operatorname{card}(A \cap B) = k\right\}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n} k \operatorname{card}(C_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} 3^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} 3^{n-k} \\ &\ \text{car le premier terme est nul} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} 3^{n-k} \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} 3^{n-1-i} \end{aligned}$$

En conslusion par la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{S = n4^{n-1}}$$

(e) Nous avons $T = \sum\limits_{k=0}^{n} k \operatorname{card}(T_k)$ avec pour tout entier k de $[\![0, n]\!]$, $T_k = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \operatorname{card} A = k\}$ de cardinal $\displaystyle\binom{n}{k}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \\ &= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{T = n2^{n-1}}$$

Enfin :

$$\sum_{(A,B)\in(\mathcal{P}(E))^2} \text{card}\,(A\cup B) = \sum_{(A,B)\in(\mathcal{P}(E))^2} \text{card}\,(A) + \sum_{(A,B)\in(\mathcal{P}(E))^2} \text{card}\,(B) - \sum_{(A,B)\in(\mathcal{P}(E))^2} \text{card}\,(A\cap B)$$

soit encore :

$$\begin{aligned} U = 2 \sum_{(A,B)\in(\mathcal{P}(E))^2} \text{card}\,(A) - S \\ &= 2 \sum_{A\in\mathcal{P}(E)} \sum_{B\in\mathcal{P}(E)} \text{card}\,(A) - S \\ &= 2 \sum_{A\in\mathcal{P}(E)} \text{card}\,(A) \sum_{B\in\mathcal{P}(E)} 1 - S \\ &= 2\times 2^n \sum_{A\in\mathcal{P}(E)} \text{card}\,(A) - S \\ &= 2^{n+1}T - S \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{U = n4^n - n4^{n-1} = 3n4^{n-1}}$$

✠✠✠✠✠

12 Calcul de probabilités

1. Pour répondre à cette question nous devons donner un triplet constitué de l'univers des issues de l'expérience, la tribu des événements (intéressants) associée à l'expérience, et d'une probabilité sur cette tribu.
   Dans notre cas $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (d'après le cours puisque l'univers est fini, et enfin en supposant sans peine que les issues proviennent du seul hasard nous muniront l'univers de la probabilité uniforme et tout calcul de probabilité se fera en utilisant la relation de Laplace (nombre de cas favorables divisé par le nombre total de cas).
2. Pour commencer, supposons que $\mathbf{P}(A \cap B)\,\mathbf{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \mathbf{P}\left(A \cap \overline{B}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A} \cap B\right)$ alors nous avons :
   $$\mathbf{P}(A \cap B)(1 - \mathbf{P}(A \cup B)) = (\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B))(\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B))$$
   ou encore par la **formule du crible** :
   $$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cap B)(1 - \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A \cap B)) &= \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(A \cap B) \\ &\quad - \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap B)^2\end{aligned}$$
   en développement :
   $$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap B)\,\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)\,\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A \cap B)^2 &= \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(A \cap B) \\ &\quad - \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap B)^2\end{aligned}$$
   et en simplifiant :
   $$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$$
   d'où A et B sont indépendants.
   Réciproquement supposons que A et B soient indépendants alors nous savons que A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ et $\overline{A}$ et B restent indépendants et d'évidence :
   $$\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}\left(\overline{B}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)\mathbf{P}(B)$$
   soit encore :
   $$\mathbf{P}(A \cap B)\,\mathbf{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \mathbf{P}\left(A \cap \overline{B}\right)\mathbf{P}\left(\overline{A} \cap B\right)$$
   L'équivalence est démontrée.
3. Nous avons, par croissance de $\mathbf{P}$:
   $$\left\{\begin{array}{l} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leq \mathbf{P}(A \cap B) \leq \mathbf{P}(A) \\ 0 \leq \mathbf{P}(A \cap B) \leq \mathbf{P}(B) \end{array}\right.$$
   et en multipliant membre à membre tous les termes étant positifs :
   $$\boxed{(\mathbf{P}(A \cap B))^2 \leq \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)}$$
4. Tout d'abord comme :
   $$A \subset A \cup B \Longrightarrow \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(A \cup B)$$
   la probabilité $\mathbf{P}(A \cup B)$ est non nulle et les deux probabilités conditionnelles proposées ont un sens.
   Par définition :
   $$\begin{aligned}\mathbf{P}_{A \cup B}(A \cap B) &= \frac{\mathbf{P}((A \cap B) \cup (A \cup B))}{\mathbf{P}((A \cup B))} \\ &= \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A \cup B)}\end{aligned}$$
   d'autre part :
   $$\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(A \cup B) \Longrightarrow \frac{1}{\mathbf{P}(A \cup B)} \leq \frac{1}{\mathbf{P}(A)}$$
   car l'application $x \longmapsto 1/x$ est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et en multipliant membre à membre par $\mathbf{P}(A \cap B) \geq 0$:
   $$\frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A \cup B)} \leq \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}$$

Conclusion, par définition

$$\boxed{\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A\cup B)} \leq \mathbf{P}_A(A\cap B)}$$

5. Tout d'abord signalons que nous avons l'équivalence :

$$\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) \neq 0 \iff \mathbf{P}(A) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(B) \neq 0$$

donc les probabilités conditionnelles ont toutes un sens et nous avons par définition de $\mathbf{P}_B$:

$$\mathbf{P}_B(A) > \mathbf{P}(A) \Longrightarrow \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} > \mathbf{P}(A)$$

En multipliant membre à membre par $\mathbf{P}(B) \geq 0$:

$$\mathbf{P}(A\cap B) > \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$$

ou encore :

$$\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)} > \mathbf{P}(B) \text{ car } \mathbf{P}(A) > 0$$

et par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\boxed{\mathbf{P}_A(B) > \mathbf{P}(B)}$$

6. (a) Nous avons :

$$\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}\left(A\cap \overline{B}\right) \tag{7}$$

avec :

$$\mathbf{P}\left(A\cap\overline{B}\right) \leq \mathbf{P}\left(\overline{B}\right) \Longrightarrow -\mathbf{P}\left(A\cap\overline{B}\right) \geq -\mathbf{P}\left(\overline{B}\right) \tag{8}$$

Selon (7) et (8) le résultat est prouvé.

(b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall (A_1,\ldots,A_n) \in \mathcal{A}^n, \quad \mathbf{P}(A_1\cap\ldots\cap A_n) \geq \mathbf{P}(A_1) - \sum_{k=2}^{n} \mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right)$$

– Pour $n = 1$ on a $\mathbf{P}(A_1) \geq \mathbf{P}(A_1)$ ce qui est toujours vrai.
– Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$ la proposition est vérifiée.
– Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1\cap\ldots\cap A_{n+1}) &= \mathbf{P}((A_1\cap\ldots\cap A_n)\cap A_{n+1}) \\
&= \mathbf{P}(A_1\cap\ldots\cap A_n) - \mathbf{P}\left((A_1\cap\ldots\cap A_n)\cap\overline{A_{n+1}}\right) \\
&\geq \mathbf{P}(A_1) - \sum_{k=2}^{n}\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right) - \mathbf{P}\left((A_1\cap\ldots\cap A_n)\cap\overline{A_{n+1}}\right) \\
&\quad\ \text{selon l'hypothèse}
\end{aligned}$$

Or comme $(A_1\cap\ldots\cap A_n)\cap\overline{A_{n+1}} \subset \overline{A_{n+1}}$ alors $\mathbf{P}\left((A_1\cap\ldots\cap A_n)\cap\overline{A_{n+1}}\right) \leq \mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}}\right)$ donc :

$$-\mathbf{P}\left((A_1\cap\ldots\cap A_n)\cap\overline{A_{n+1}}\right) \geq -\mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}}\right)$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1\cap\ldots\cap A_{n+1}) &\geq \mathbf{P}(A_1) - \sum_{k=2}^{n}\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right) - \mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}}\right) \\
&\geq \mathbf{P}(A_1) - \sum_{k=2}^{n+1}\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La proposition est transmissible et donc héréditaire selon le premier principe de récurrence}}$$

(c) Nous avons :

$$\left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) \subset \overline{A} \implies \mathbf{P}\left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) \leq \mathbf{P}\left(\overline{A}\right)$$

et par **Morgan** :

$$1 - \mathbf{P}(B \cup C) \leq 1 - \mathbf{P}(A)$$

par la **formule du crible** :

$$1 - \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(B \cap C) \leq 1 - \mathbf{P}(A)$$

et en réordonnant :

$$\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(B \cap C)$$

et comme $\mathbf{P}(B \cap C) \geq 0$:

$$\boxed{\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C)}$$

7. (a) Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A\Delta C) &= \mathbf{P}((A \cup C) - (A \cap C)) \\
& \text{par définition} \\
&= \mathbf{P}(A \cup C) - \mathbf{P}((A \cup C) \cap (A \cap C)) \\
&= \mathbf{P}(A \cup C) - \mathbf{P}(A \cap C)
\end{aligned}$$

Selon la formule du crible :

$$\boxed{\mathbf{P}(A\Delta C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(C) - 2\mathbf{P}(A \cap C)}$$

(b) Nous avons les inégalités équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A\Delta C) \leq \mathbf{P}(A\Delta B) + \mathbf{P}(B\Delta C) \\
&\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(C) - 2\mathbf{P}(A \cap C) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(A \cap B) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - 2\mathbf{P}(B \cap C) \\
&-2\mathbf{P}(A \cap C) \leq \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(B \cap C) \\
&2\mathbf{P}(A \cap B) + 2\mathbf{P}(B \cap C) \leq 2\mathbf{P}(B) + 2\mathbf{P}(A \cap C) \\
&\mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(B \cap C) \leq \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A \cap C)
\end{aligned}$$

Pour terminer il suffit de prouver que cette dernière inégalité est vraie. Comme $(A \cap B) \cup (B \cap C) \subset B$ nous avons :

$$\mathbf{P}((A \cap B) \cup (B \cap C)) \leq \mathbf{P}(B)$$

soit par la **formule du crible** :

$$\mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(B \cap C) - \mathbf{P}(A \cap B \cap C) \leq \mathbf{P}(B)$$

ou encore :

$$\mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(B \cap C) \leq \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A \cap B \cap C) \tag{9}$$

Enfin comme $(A \cap B \cap C) \subset (A \cap C)$ nous avons :

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) \leq \mathbf{P}(A \cap C)$$

d'où selon (9) :

$$\mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(B \cap C) \leq \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A \cap C)$$

Le travail sera achevé lorsque nous dirons qu'ayant raisonné par équivalences successives, en remontant, l'inégalité de départ est bien véridique.

8. (a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j)$$

– Pour $n = 1$ on a $\mathbf{P}(A_1) \geq \mathbf{P}(A_1)$ ce qui est toujours vrai.

– Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$ la proposition est vérifiée.
Or :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) &= \mathbf{P}((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}) \\
&= \mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&= \mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \\
&\quad \text{par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \\
&\quad \text{selon l'hypothèse}
\end{aligned}$$

Comme selon **Boole** :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i \cap A_{n+1})$$

alors :

$$-\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \geq -\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i \cap A_{n+1})$$

et en "injectant" ce résultat dans la dernière inégalité, nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) &\geq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i \cap A_{n+1}) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) \\
&\quad \text{en regroupant les deux dernières sommes}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La proposition est transmissible et donc héréditaire selon le premier principe de récurrence}}$

(b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

– Pour $n = 1$ on a $\mathbf{P}(A_1) \leq \mathbf{P}(A_1)$ ce qui est toujours vrai.
– Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$ la proposition est vérifiée.
Or :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) &= \mathbf{P}((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}) \\
&= \mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&\quad \text{par la formule du crible} \\
&= \mathbf{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \\
&\quad \text{par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) \\
&\qquad + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \\
&\quad \text{selon l'hypothèse}
\end{aligned}$$

Comme selon la première question :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i \cap A_{n+1}) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_{n+1})$$

alors :

$$-\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap A_{n+1})\right)\leq-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i\cap A_{n+1})+\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbf{P}(A_i\cap A_j\cap A_{n+1})$$

et en “injectant” ce résultat dans la dernière inégalité, nous obtenons que :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1\cup\ldots\cup A_{n+1}) &\leq \sum_{i=1}^{n+1}\mathbf{P}(A_i)-\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbf{P}(A_i\cap A_j)-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i\cap A_{n+1})\\ &\quad+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}\mathbf{P}(A_i\cap A_j\cap A_k)+\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbf{P}(A_i\cap A_j\cap A_{n+1})\\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1}\mathbf{P}(A_i)-\sum_{1\leq i<j\leq n+1}\mathbf{P}(A_i\cap A_j)+\sum_{1\leq i<j<k\leq n+1}\mathbf{P}(A_i\cap A_j\cap A_k)\end{aligned}$$

en regroupant les quatre dernières sommes deux à deux.

$\boxed{\text{La proposition est transmissible et donc héréditaire selon le premier principe de récurrence}}$

9. Nous supposerons, car rien n'est dit dans le texte, que $n\geq 2$ (la relation n'ayant aucun intérêt pour $n=1$).

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right) &= 1-\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k}\right)\\ &= 1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathbf{P}\left(\overline{A_{i_1}}\cap\ldots\cap\overline{A_{i_k}}\right)\\ &\quad\text{par la formule du crible}\\ &= 1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}(1-\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k}))\\ &\quad\text{par Morgan}\\ &= 1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\left(1-\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})\right)\right)\\ &= 1-\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}1\right)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})\\ &= 1-\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\right)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})\\ &= 1+\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}-1\right)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})\\ &= 1+(0^n-1)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})\\ &\quad\text{par la formule du binôme de Newton}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k})}$$

10. Montrons que pour $n\geq 1$, $\mathbf{P}\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right)\leq\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i)\right)$.

Par indépendance des événements :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right) &= \prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n}(1-\mathbf{P}(A_k))\end{aligned}$$

Or par convexité de la fonction exp sur $\mathbb{R}_+$, nous pouvons affirmer que :

$$\forall x \geq 0, \quad e^{-x} \geq 1 - x$$

Ainsi pour tout entier k allant de 1 à n :

$$0 \leq 1 - \mathbf{P}(A_k) \leq \exp(-\mathbf{P}(A_k))$$

Comme tous les termes en jeu dans ces inégalités sont positifs, il vient que :

$$\prod_{k=1}^{n}(1 - \mathbf{P}(A_k)) \leq \prod_{k=1}^{n}\exp(-\mathbf{P}(A_k))$$

soit encore par propriété élémentaire de la fonction exp et linéarité de la somme :

$$\prod_{k=1}^{n}(1 - \mathbf{P}(A_k)) \leq \exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k)\right)$$

Par conséquent :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k)\right)}$$

11. Nous savons d'après le **corollaire du théorème de la limite monotone** que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

Or d'après **Morgan** :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right)$$

avec selon l'**inégalité de Boole** :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right)$$

donc :

$$-\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) \geq -\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right)$$

et :

$$\begin{aligned}
\underbrace{1 - \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right)}_{=\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)} &\geq 1 - \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(\overline{A_k}\right) \\
&\geq 1 - \sum_{k=1}^{n}(1 - \mathbf{P}(A_k)) \\
&\geq 1 - \sum_{k=1}^{n}(1 - 1) \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

Enfin comme culturellement $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \leq 1$, alors :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = 1}$$

et le résultat est prouvé.

12. Montrons que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)\right) = 0$ (résultat très classique).

   Constatons que la suite d'événements $\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)_{n\geq 1}$ est **décroissante** car $\forall n \geq 1$, $\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} (A_k) \subset \bigcup_{k=n}^{+\infty} (A_k)$ donc d'après le **théorème de la limite monotone** :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$$

   Enfin comme la série $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(A_n)$ converge, nous pouvons utiliser l'**inégalité de Boole pour le cas infini** disant que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) \tag{10}$$

   cette dernière somme représentant le **reste** d'ordre $n-1$ de la série convergente de la série de terme général $\mathbf{P}(A_n)$. D'après le cours d'analyse on sait que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) = 0$ et le **théorème de prolongement des inégalités** appliqué à l'inégalité (10) donne que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) = 0$$

   Le théorème d'encadrement nous assure que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = 0$ soit donc :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)\right) = 0}$$

13. Introduisons pour tout entier naturel n non nul les événements :
   - J_n :"on n'obtient pas de pile au cours des n premiers lancers de la pièce" ;
   - F_n :"on obtient face au $n^{\text{ème}}$ lancer de la pièce" ;
   - J :"on n'obtient jamais de pile au cours des lancers de la pièce".

   Alors nous avons $J = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J_n$ avec pour tout entier naturel n non nul, $J_n = \bigcap_{k=1}^{n} F_k$ où la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **strictement décroissante**, car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_{n+1} \subset J_n$. Donc selon le **théorème de la limite monotone** :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(J) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} J_n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(J_n)\end{aligned}$$

   Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(J_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right)$ où les événements F_k sont clairement mutuellement indépendants, donc pour tout entier naturel non nul n :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(J_n) &= \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(F_k)\\ &= \prod_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

   avec $\lim_{n\to\infty} (1/2)^n = 0$ car $|1/2| < 1$, et . Par conséquent :

$$\boxed{\mathbf{P}(J) = 0}$$

   Ce qui paraît logique !

14. (a) Introduisons la famille $(U_k)_{k\in[\![1,2]\!]}$, où pour tout k de $[\![1,2]\!]$, U_k désigne l'événement : "on effectue les deux tirages dans l'urne numéro k" avec $\mathbf{P}(U_k) = 1/2$. Cette famille constitue un sytème complet d'événements de probabilités non nulles, et selon la formule des probabilités totales :

$$\boxed{\mathbf{P}(N_1) = \mathbf{P}_{U_1}(N_1)\,\mathbf{P}(U_1) + \mathbf{P}_{U_2}(N_1)\,\mathbf{P}(U_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{n_1+b_1} + \frac{n_2}{n_2+b_2}\right)}$$

Enfin :

$$\boxed{\mathbf{P}(N_2) = \mathbf{P}(N_1)}$$

par symétrie des rôles joués par les événements. Maintenant si vous n'êtes pas convaincus vous pouvez toujours écrire que :

$$\begin{aligned} N_2 &= (N_2 \cap N_1 \cap U_1) \uplus (N_2 \cap B_1 \cap U_1) \uplus (N_2 \cap N_1 \cap U_2) \uplus (N_2 \cap B_1 \cap U_2) \\ &= (N_2 \cap ((N_1 \cap U_1) \uplus (B_1 \cap U_1))) \uplus (N_2 \cap ((N_1 \cap U_2) \uplus (B_1 \cap U_2))) \\ &= (N_2 \cap (U_1 \uplus \underbrace{(N_1 \cap B_1)}_{\Omega})) \uplus (N_2 \cap (U_2 \uplus \underbrace{(N_1 \cap B_1)}_{\Omega})) \\ &= (N_2 \cap U_1) \uplus (N_2 \cap U_2) \end{aligned}$$

(b) Comme $\mathbf{P}(N_1) \neq 0$, par définition $\mathbf{P}_{N_1}(N_2) = \frac{\mathbf{P}(N_1\cap N_2)}{\mathbf{P}(N_1)}$ où selon la **formule des probabilités totales** :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{N_1}(N_2) &= \frac{\mathbf{P}_{U_1}(N_1 \cap N_2)\,\mathbf{P}(U_1) + \mathbf{P}_{U_2}(N_1 \cap N_2)\,\mathbf{P}(U_2)}{\mathbf{P}(N_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{n_1}{n_1+b_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_2+b_2}\right)^2\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{n_1+b_1} + \frac{n_2}{n_2+b_2}\right)} \\ &= \frac{n_1^2(n_2+b_2)^2 + n_2^2(n_1+b_1)^2}{(n_1^2+n_1b_1)(n_2+b_2)^2 + (n_2^2+n_2b_2)(n_1+b_1)^2} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}_{N_1}(N_2) = \frac{n_1^2(n_2+b_2)^2 + n_2^2(n_1+b_1)^2}{(n_1^2+n_1b_1)(n_2+b_2)^2 + (n_2^2+n_2b_2)(n_1+b_1)^2}}$$

(c) Nous avons N_1 et N_2 indépendants si, et seulement si :

$$\mathbf{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbf{P}(N_1)\,\mathbf{P}(N_2)$$

ce qui donne les égalités équivalentes successives suivantes :

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{n_1}{n_1+b_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_2+b_2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{n_1}{n_1+b_1} + \frac{n_2}{n_2+b_2}\right)^2$$

$$\left(\frac{n_1}{n_1+b_1} - \frac{n_2}{n_2+b_2}\right)^2 = 0$$

$$\frac{b_2n_1 - b_1n_2}{(b_1+n_1)(b_2+n_2)} = 0$$

$$\boxed{\frac{n_1}{b_1} = \frac{n_2}{b_2}}$$

ce qui parait assez logique !

15. Notons pour tout entier naturel non nul k les événements suivants :
   - P_k : "obtenir pile au $k^{\text{ème}}$ lancer" ;
   - F_k : "obtenir face au $k^{\text{ème}}$ lancer" ;
   - A_{2k} : "le premier pile arrive au $2k^{\text{ème}}$ lancer" ;

– A : "obtenir pile au bout d'un nombre pair de lancers".
Il est clair que la famille $(A_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ constitue une **partition** de A donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_{2k}) \\
&\quad \text{par } \sigma - \text{additivité de } \mathbf{P} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{2k-1} \cap P_{2k}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} [\mathbf{P}(F_1)]^{2k-1} \mathbf{P}(P_{2k}) \\
&\quad \text{par indépendance des évenements de même probabilité} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \frac{1}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \\
&\quad \text{série géométrique de raison } 1/4 \\
&\quad \text{avec } |1/4| < 1 \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-1/4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}}$$

16. Notons pour tout entier naturel $k \in [\![1, n]\!]$ les événements suivants :
   – U_k : "l'urne numéro k a été choisie au hasard" ;
   – B_k : "on a obtenu une boule portant le numéro k".
   On demande de calculer $\mathbf{P}(B_k)$ pour k fixé dans $[\![1, n]\!]$.
   La famille $(U_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ constitue un **système complet d'événements** de probabilités non nulles (égales à $1/n$). Ainsi selon la **formule des probabilités totales** :

$$\mathbf{P}(B_k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{U_i}(B_k)\, \mathbf{P}(U_i)$$

   Or si $k > i$, nous avons $\mathbf{P}_{U_i}(B_k) = 0$ car l'urne U_i possède des boules numérotées de 1 à i. D'où $\forall k \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(B_k) &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}_{U_i}(B_k)\, \mathbf{P}(U_i) + \sum_{i=k}^{n} \mathbf{P}_{U_i}(B_k)\, \mathbf{P}(U_i) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \mathbf{P}_{U_i}(B_k)\, \mathbf{P}(U_i) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

   Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbf{P}(B_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}}$$

17. (a) Notons les événements :
   – pour tout entier k de $[\![1, 2]\!]$, U_k : "on tire dans l'urne U_k" ;
   – pour tout entier naturel non nul i, B_i l'événement : "on tire une boule blanche au $i^{\text{ième}}$ tirage".

La famille (U_1, U_2) constitue un **système complet d'événements** de probabilités non nulles, et selon la **formule des probabilités totales** :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}_{U_1}(B_n)\,\mathbf{P}(U_1) + \mathbf{P}_{U_2}(B_n)\,\mathbf{P}(U_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{b_1}{n_1+b_1} + \frac{b_2}{n_2+b_2}\right)}$$

Toujours selon la **formule des probabilités totales** $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \mathbf{P}_{U_1}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)\mathbf{P}(U_1) + \mathbf{P}_{U_2}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)\mathbf{P}(U_2) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{b_1}{n_1+b_1}\right)^n + \left(\frac{b_2}{n_2+b_2}\right)^n\right)}$$

Tous les tirages se faisant, à urne déterminée, avec remise, les résultats sont indépendants.

(b) On demande la valeur de $\mathbf{P}_{\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)}(B_{n+1})$ avec $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) \neq 0$. Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\mathbf{P}_{\bigcap_{k=1}^{n} B_k}(B_{n+1}) = \frac{\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k\right)}{\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{b_1}{n_1+b_1}\right)^{n+1} + \left(\frac{b_2}{n_2+b_2}\right)^{n+1}\right)}{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{b_1}{n_1+b_1}\right)^{n} + \left(\frac{b_2}{n_2+b_2}\right)^{n}\right)}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}_{\bigcap_{k=1}^{n} B_k}(B_{n+1}) = \frac{\left(\frac{b_1}{n_1+b_1}\right)^{n+1} + \left(\frac{b_2}{n_2+b_2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{b_1}{n_1+b_1}\right)^{n} + \left(\frac{b_2}{n_2+b_2}\right)^{n}}}$$

18. (a) Pour que tous les numéros tirés soient inférieurs ou égaux à k, il faut et il suffit de tirer les n numéros dans l'ensemble $[\![1, k]\!]$avec $n \leq k$. Nous avons $\Omega = \mathcal{P}_n(U)$ où U est l'ensemble de toutes les boules de l'urne. Comme les boules sont tirées au hasard, Ω sera muni de la probabilité uniforme. Ainsi :

$$\forall k \in [\![1, N]\!], \quad p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\binom{N}{n}}\dbinom{k}{n} & \text{si} \quad 0 \leq n \leq k \\ 0 & \text{si} \quad n > k \end{cases}$$

(b) Cette fois-ci les $n-1$ numéros doivent être pris dans $[\![1, k-1]\!]$ et l'on complètera avec le numéro k. Ainsi :

$$\forall k \in [\![1, N]\!], \quad q_k = \begin{cases} \dfrac{1 \times \binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} & \text{si} \quad 1 \leq n \leq k \\ 0 & \text{si} \quad n > k \text{ ou } n = 0 \end{cases}$$

NB : la différence entre les deux questions est que dans la première question le plus grand des numéros n'est pas obligatoirement k.

(c) Introduisons pour tout entier k de $[\![n, N]\!]$, E_k l'ensemble de tous les tirages tels que le plus grand des numéros soit égal à k. Et soit E l'ensemble de tous les tirages possibles de n boules prises simultanément parmi N, c'est tout simplement l'univers Ω. Il est clair que la famille $(E_k)_{k\in[\![n,N]\!]}$ constitue une partition de E et $E = \biguplus_{k=n}^{N} E_k$ d'où :

$$\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$$

d'où :

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{\binom{N}{n}}\binom{k-1}{n-1} = 1$$

et finalement :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{N}\binom{k-1}{n-1}=\binom{N}{n}}$$

19. Introduisons pour tout i de l'ensemble $\{1,2,3\}$ les événements suivants :
   – D_i : "le $i^{\text{ième}}$ article tiré est défectueux" ;
   – L_i : "le $i^{\text{ième}}$ lot est choisi".

   On demande alors $\mathbf{P}_{D_1}(D_2)$ en supposant à priori que $\mathbf{P}(D_1)\neq 0$. Par définition :

$$\mathbf{P}_{D_1}(D_2)=\frac{\mathbf{P}(D_1\cap D_2)}{\mathbf{P}(D_1)}$$

   avec selon la **formule des probabilités totales** associée à (L_1,L_2,L_3) système complet d'événements de probabilités non nulles :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(D_1\cap D_2) &= \sum_{i=1}^{3}\mathbf{P}(D_1\cap D_2\cap L_i)\\ &= \sum_{i=1}^{3}\mathbf{P}(L_i)\,\mathbf{P}_{L_i}(D_1)\,\mathbf{P}_{L_i\cap D_1}(D_2)\\ &\quad\text{selon la "FPC" avec } \mathbf{P}(D_1\cap L_i)\neq 0,\ \forall i\in[\![1,3]\!]\\ &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{n_i}{n_i+m_i}\times\frac{n_i-1}{n_i+m_i-1}\right)\end{aligned}$$

   D'autre part :

$$\mathbf{P}(D_1)=\sum_{i=1}^{3}\mathbf{P}(L_i)\,\mathbf{P}_{L_i}(D_1)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{n_i}{n_i+m_i}$$

   et :

$$\boxed{\mathbf{P}_{D_1}(D_2)=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{n_i}{n_i+m_i}\times\frac{n_i-1}{n_i+m_i-1}\right)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{n_i}{n_i+m_i}}}$$

   Il n'y a aucune simplification possible, car cela voudrait dire qu'un rapport de sommes est égal à la somme des rapports ce qui est une horreur totale !

20. (a) Notons les événements :
   – pour tout entier k de $[\![0,N]\!]$, U_k : "on tire dans l'urne U_k" ;
   – pour tout entier naturel non nul i, R_i l'événement : "on tire une boule rouge au $i^{\text{ième}}$ tirage".

   On demande de calculer $\mathbf{P}_{\left(\bigcap_{k=1}^{n}R_k\right)}(R_{n+1})$ en supposant à priori que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}R_k\right)\neq 0$. Alors par définition :

$$\mathbf{P}_{\left(\bigcap_{k=1}^{n}R_k\right)}(R_{n+1})=\frac{\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n+1}R_k\right)}{\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}R_k\right)}=\frac{\sum_{i=0}^{N}\mathbf{P}_{U_i}\left(\bigcap_{k=1}^{n+1}R_k\right)\mathbf{P}(U_i)}{\sum_{i=0}^{N}\mathbf{P}_{U_i}\left(\bigcap_{k=1}^{n}R_k\right)\mathbf{P}(U_i)}$$

   en appliquant deux fois la formule des probabilités totales où $(U_i)_{i\in[\![0,N]\!]}$ est un système complet d'événement de probabilités non nulles égales à $\frac{1}{N+1}$. Nous obtenons :

$$\mathbf{P}_{\left(\bigcap_{k=1}^{n}R_k\right)}(R_{n+1})=\frac{\dfrac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N}\left(\dfrac{i}{N}\right)^{n+1}}{\dfrac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N}\left(\dfrac{i}{N}\right)^{n}}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}_{\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right)}(R_{n+1}) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n+1}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n}}}$$

(b) Nous avons :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}_{\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right)}(R_{n+1}) = 1}$$

car :

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n+1}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n}} = \frac{1+\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{i}{N}\right)^{n+1}}{1+\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{i}{N}\right)^{n}}$$

avec quand i parcourt $[\![1, N-1]\!]$, $\left|\dfrac{i}{N}\right| < 1$ et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{i}{N}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{i}{N}\right)^{n} = 0$$

ce qui entraîne que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{i}{N}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{i}{N}\right)^{n} = 0$$

(nous sommes en présence d'une somme finie de termes de limites nulles).
Nous avons :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty}\mathbf{P}_{\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right)}(R_{n+1}) = \frac{n+1}{n+2}}$$

car :

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n+1}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n}} = \frac{\frac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n+1}}{\frac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n}}$$

et selon le théorème de **Darboux-Riemann**[2] appliqué respectivement à $x \mapsto x^{n+1}$ et à $x \mapsto x^n$ fonctions continues sur $[0,1]$, nous pouvons écrire que :

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{1}{n+2} \quad \text{et} \quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n} = \int_0^1 x^{n}dx = \frac{1}{n+1}$$

D'autre part :

$$\boxed{\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}_{\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right)}(R_{n+1}) = \frac{n+1}{n+2}}$$

21. (a) Nous avons vu en classe que conjecturer la formule à partir de quelques exemples chiffrés s'avérait extrêmement difficile. C'est pour cela nous avons eu l'idée d'introduire une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par pour tout $n \geq 1$, $u_n = \mathbf{P}(N_{2n})$, N_{2n} étant l'événement : "la partie dure au moins $2n$ lancers", et essayons de trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite. Notons toutefois que N_{2n} est réalisé si et seulement si il y a eu autant de piles que de faces lors des $2n$ premiers lancers sans qu'il y ait eu lors de tirages intermédiaures deux piles de plus que de faces et inversement. Introduisons pour tout $k \geq 1$ les événements P_k (resp. F_k) :"le $k^{\text{ème}}$ tirage donne pile (resp. face)". Ainsi pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N_{2n+2}) &= \mathbf{P}\left((N_{2n}\cap P_{2n+1}\cap F_{2n+2}) \uplus (N_{2n}\cap F_{2n+1}\cap P_{2n+2})\right)\\ &= \mathbf{P}(N_{2n}\cap P_{2n+1}\cap F_{2n+2}) + \mathbf{P}(N_{2n}\cap F_{2n+1}\cap P_{2n+2})\end{aligned}$$

[2] Voir le cours sur le calcul intégral.

$$\begin{aligned}
& \text{par } \sigma - \text{ additivité de } \mathbf{P} \\
= \; & \mathbf{P}(N_{2n})\,\mathbf{P}(P_{2n+1})\,\mathbf{P}(F_{2n+2}) + \mathbf{P}(N_{2n})\,\mathbf{P}(F_{2n+1})\,\mathbf{P}(P_{2n+2}) \\
& \text{par indépendance des événements} \\
= \; & 2p\,(1-p)\,\mathbf{P}(N_{2n})
\end{aligned}$$

Ainsi la suite $(\mathbf{P}(N_{2n}))_{n\geq 1}$ est **géométrique** de raison $2p\,(1-p)$ qui est différente de 1 et même strictement inférieure à 1 en valeur absolue car on sait par coeur que $x\,(1-x) \in [0, 1/4]$ quand $x \in [0,1]$. D'où pour chaque $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N_{2n}) &= (2p\,(1-p))^{n-1}\,\mathbf{P}(N_2) \\
& \quad \text{par indépendance des événements} \\
&= (2p\,(1-p))^{n-1}\,\mathbf{P}\left((P_1 \cap F_2) \uplus (F_1 \cap P_2)\right) \\
&= (2p\,(1-p))^{n-1}\left(\mathbf{P}(P_1 \cap F_2) + \mathbf{P}(F_1 \cap P_2)\right) \\
& \quad \text{par } \sigma - \text{ additivité de } \mathbf{P} \\
&= (2p\,(1-p))^{n-1}\,2p\,(1-p)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \mathbf{P}(N_{2n}) = (2p\,(1-p))^n}$$

(b) Notons les événements G :"la personne gagne" et pour tout $n \geq 1$, G_{2n} : "la personne gagne à l'issue d'un nombre pair de lancers". Nous avons clairement $G = \biguplus_{n=1}^{+\infty} G_{2n}$ avec pour tout $n \geq 1$, $G_{2n} = N_{2n-2} \cap P_{2n-1} \cap P_{2n}$ alors par $\sigma-$additivité de $\mathbf{P}$ et indépendance des événements :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(G) &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{n=1}^{+\infty} G_{2n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(G_{2n}) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N_{2n-2} \cap P_{2n-1} \cap P_{2n}) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N_{2n-2})\,\mathbf{P}(P_{2n-1})\,\mathbf{P}(P_{2n}) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (2p\,(1-p))^{n-1}\,p^2 \\
& \quad \text{série géométrique convergente} \\
&= \frac{p^2}{1-2p\,(1-p)}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}(G) = \frac{p^2}{2p^2-2p+1}}$$

✠✠✠✠✠

13 Variables aléatoires discrètes

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et β un nombre réel. Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ alors $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbf{P}([X=k]) \geq 0$ ce qui équivaut à $\beta \geq 0$ et même $\beta > 0$ sinon toutes les probabilités seraient nulles. D'autre part :

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\beta}{k+1}\binom{n}{k} = 1\right) \\
\iff & \left(\beta \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = 1\right) \\
\iff & \left(\beta \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = 1\right) \\
& \text{par propriété des coefficients binomiaux} \\
\iff & \left(\frac{\beta}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 1\right) \\
& \text{par décalage d'indice} \\
\iff & \left(\frac{\beta}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - 1\right) = 1\right) \\
\iff & \left(\frac{\beta}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right) = 1\right) \\
& \text{selon la formule du binôme de Newton}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\beta = \frac{n+1}{2^{n+1}-1}}$$

2. Vous savez parfaitement que des variables indicatrices sont des **variables de Bernoulli**, et il serait très tentant de parler de loi binomiale pour X. Le problème est que les trois indicatrices ne sont pas indépendantes pour affirmer cela, puisque les valeurs des probabilités données ne permettent pas de dire que les événements A, B et C sont indépendants. Que faire alors ? Reprendre "tout à la main" !
Nous avons $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ avec :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=0]) &= \mathbf{P}([\mathbf{1}_A = 0] \cap [\mathbf{1}_B = 0] \cap [\mathbf{1}_C = 0]) \\
&= \mathbf{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}(A \cup B \cup C) \\
&= 1 - (\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(BC) - \mathbf{P}(AC) + \mathbf{P}(ABC)) \\
& \quad \text{par la formule du crible} \\
&= 1 - (1/2 + 10/12 - 2/3 - 1/4 + 1/4) \\
&= 1/3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=3]) &= \mathbf{P}([\mathbf{1}_A = 1] \cap [\mathbf{1}_B = 1] \cap [\mathbf{1}_C = 1]) \\
&= \mathbf{P}(ABC) \\
&= 1/4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=2]) &= \mathbf{P}([\mathbf{1}_A = 1] \cap [\mathbf{1}_B = 1] \cap [\mathbf{1}_C = 0]) + \mathbf{P}([\mathbf{1}_A = 0] \cap [\mathbf{1}_B = 1] \cap [\mathbf{1}_C = 1]) \\
& \qquad + \mathbf{P}([\mathbf{1}_A = 1] \cap [\mathbf{1}_B = 0] \cap [\mathbf{1}_C = 1]) \\
&= \mathbf{P}\left(AB\overline{C}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A}BC\right) + \mathbf{P}\left(A\overline{B}C\right) \\
&= (\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(ABC)) + (\mathbf{P}(BC) - \mathbf{P}(ABC)) + (\mathbf{P}(AC) - \mathbf{P}(ABC)) \\
&= 2/3 + 1/4 - 3/4 \\
&= 1/6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X=1]) &= 1-\mathbf{P}([X=0])-\mathbf{P}([X=2])-\mathbf{P}([X=3])\\ &= 1-1/3-1/6-1/4\\ &= 1/4\end{aligned}$$

Finalement :

k	0	1	2	3
$\mathbf{P}([X=k])$	1/3	1/4	1/6	1/4

3. Déterminons la loi de $\boldsymbol{Y}$.
Nous avons tout d'abord $Y(\Omega)=\{-1,0,1\}$ ce qui nous permet d'affirmer que Y ne suit pas une loi connue ! Donc reprenons "tout à la main".

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Y=-1]) &= \mathbf{P}([\mathbf{1}_A=0]\cap[\mathbf{1}_B=1])\\ &= \mathbf{P}\left(\overline{A}B\right)\\ &= \mathbf{P}\left(\overline{A}\right)\mathbf{P}(B)\\ &\quad \text{par indépendance de } \overline{A} \text{ et } B\\ &= (1-p)\,p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Y=0]) &= \mathbf{P}([\mathbf{1}_A=0]\cap[\mathbf{1}_B=0])+\mathbf{P}([\mathbf{1}_A=1]\cap[\mathbf{1}_B=1])\\ &= \mathbf{P}\left(\overline{A}\overline{B}\right)+\mathbf{P}(AB)\\ &= \mathbf{P}\left(\overline{A}\right)\mathbf{P}\left(\overline{B}\right)+\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\\ &\quad \text{par indépendance de } A \text{ et } B\\ &= (1-p)^2+p^2\\ &= 2p^2-2p+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Y=1]) &= \mathbf{P}([\mathbf{1}_A=1]\cap[\mathbf{1}_B=0])\\ &= \mathbf{P}\left(A\overline{B}\right)\\ &= \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}\left(\overline{B}\right)\\ &\quad \text{par indépendance de } A \text{ et } \overline{B}\\ &= p\,(1-p)\end{aligned}$$

Finalement :

k	-1	0	1
$\mathbf{P}([Y=k])$	$p\,(1-p)$	$2p^2-2p+1$	$p\,(1-p)$

Pour terminer déterminons la loi de $\boldsymbol{Z}$.
Rappelez-vous **un produit de variables de Bernoulli, redonne toujours une variables de Bernoulli (quelles soient indépendantes ou non !)**. C'est dit !

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Z=1]) &= \mathbf{P}([\mathbf{1}_A=1]\cap[\mathbf{1}_B=1])\\ &= \mathbf{P}(AB)\\ &= \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\\ &\quad \text{par indépendance de } A \text{ et } B\\ &= p^2\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(p^2\right)}$$

4. Par itérations successives :

$$\forall k\in\mathbf{N},\quad \mathbf{P}([X=k])=\frac{4}{k}\times\frac{4}{k-1}\times\frac{4}{k-2}\times\cdots\times\frac{4}{1}\times\mathbf{P}([X=0])=\frac{4^k}{k!}\mathbf{P}([X=0])$$

Il ne reste plus qu'à déterminer $\mathbf{P}([X=0])$. Comme X est une variable aléatoire la série $\sum_{k\geq 0}\mathbf{P}([X=k])$ converge et de somme égale à 1. Cela donne $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}([X=k])=1$ autrement dit :

$$\mathbf{P}([X=0])\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4^k}{k!}=1$$

ou encore :

$$e^4\mathbf{P}([X=0])=1$$

Donc $\mathbf{P}([X=0])=e^{-4}$ ce qui nous permet de dire que :

$$\boxed{\forall k\in\mathbf{N},\quad \mathbf{P}([X=k])=\frac{e^{-4}4^k}{k!}}$$

et $X\hookrightarrow\mathcal{P}(4)$[3].

5. (a) Comme les deux boules sont tirées au hasard nous allons munir l'univers de la probabilité uniforme[4] et procéder par dénombrement. Nous avons $\Omega=\left\{(n_1,n_2)\in[\![1,n]\!]^2 \mid n_1\neq n_2\right\}$, ainsi $\operatorname{Card}\Omega=A_n^2$. D'autre part :

$$\forall k\in[\![2,n]\!],\quad [X\leq k]=\left\{(n_1,n_2)\in[\![1,n]\!]^2\mid n_1<n_2\leq k \text{ ou } n_2<n_1\leq k\right\}$$

et

$$\operatorname{Card}([X\leq k])=2\binom{k}{2}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k\in[\![2,n]\!],\quad \mathbf{P}([X\leq k])=\frac{2}{A_n^2}\binom{k}{2}=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}}$$

(b) Nous savons que pour tout $k\in[\![2,n]\!]$:

$$\mathbf{P}([X=k])=\mathbf{P}([X\leq k])-\mathbf{P}([X\leq k-1])$$

la formule restant valable pour $k=2$ puisque :

$$\mathbf{P}([X\leq 2-1])=\mathbf{P}([X\leq 1])=0$$

du fait que $X(\Omega)=[\![2,n]\!]$. Ainsi :

$$\boxed{\forall k\in[\![2,n]\!],\quad \mathbf{P}([X=k])=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}-\frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)}=\frac{2(k-1)}{n(n-1)}}$$

6. (a) Tout d'abord $X(\Omega)=[\![k,n]\!]$. Calculons pour tout i de $X(\Omega)$, $\mathbf{P}([X=i])$. Rappelons que l'événement $[X=i]$ est réalisé si et seulement si la $k^{\text{ème}}$ et dernière boule blanche est arrivée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage. Un tirage favorable sera caractérisé par le placement des $k-1$ premières boules blanches lors des $i-1$ premiers lancers, alors qu'un tirage quelconque (ce qui donnera $\operatorname{Card}\Omega$) sera caractérisé par l'emplacement des k boules blanches parmi les n places disponibles. Ainsi :

$$\boxed{\forall i\in[\![k,n]\!],\quad \mathbf{P}([X=i])=\frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}}$$

[3] **Loi de Poisson** de paramètre 4.
[4] Car nous sommes dans le cadre de l'**équiprobabilité.**

(b) Comme X est une variable finie elle admet des moments de tous ordres, en particulier une espérance qui vaut par définition :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{i=k}^{n} i \frac{1}{\binom{n}{k}} \binom{i-1}{k-1} \\
&= \sum_{i=k}^{n} k \frac{1}{\binom{n}{k}} \binom{i}{k} \\
&\quad \text{par propriété des coefficients binomiaux} \\
&= \frac{k}{\binom{n}{k}} \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} \\
&= \frac{k}{\binom{n}{k}} \binom{n+1}{k+1} \\
&\quad \text{par la formule du traingle de Pascal généralisé}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{k(n+1)}{k+1}}$$

7. **Déterminons la loi de X.**
Pour cela introduisons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, P_k l'événement : "le $k^{\text{ème}}$ essai amène pile" et F_k : "le $k^{\text{ème}}$ essai amène face" avec pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(P_k) = p$ et $\mathbf{P}(F_k) = 1 - p$. Nous avons clairement :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

Ensuite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X = k]) = \mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \cap \ldots F_k \cap P_{k+1})$$

où les **événements sont indépendants** par indépendance des résultats de l'expérience. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X = k]) = \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}(F_i) \right) \mathbf{P}(P_{k+1}) = q^k p$$

Comme nous ne pouvons écrire que $X \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$ puisque c'est hors programme, nous dirons que

$$\boxed{X + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$$

Calculons de l'espérance de X et de la variance de X.
Voici une méthode très efficace et élégante introduisant une variable aléatoire Y associée au rang d'apparition du premier pile[5]. A partir de là nous pouvons faire plusieurs constats évidents :
- $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$[6]
- $Y = X + 1$
  - Comme Y admet une espérance en tant que variable géométrique, X en admet une aussi puisque obtenue par **transformation affine**[7] à partir de Y telle que $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X) + 1$.
  - De même Y admet une variance en tant que variable géométrique, X en admet une aussi puisque obtenue par **transformation affine**[8] à partir de Y, avec $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(X)$.

  Conclusion :

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1$$

et :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y)$$

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{q}{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{q}{p^2}}$$

[5] *C'est le temps d'attente du premier succès.*
[6] **Loi géométrique de paramètre** p.
[7] C'est du cours !
[8] C'est du cours !

8. (a) Comme on effectue une **succession de $n-1$ épreuves de Bernoulli**[9] (à deux issues possibles, le succès étant qu'il y a changement de couleur) **indépendantes et de même paramètre** 2/3 (probabilité de conserver la couleur du tirage précédent) alors nous pouvons conclure que :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, 2/3)}$$

(b) D'après le cours :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{2(n-1)}{3} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{2(n-1)}{9}}$$

9. (a) Tout d'abord $X(\Omega) = [\![k, n]\!]$. Comme les k boules sont tirées au hasard nous alllons munir l'univers de la probabilité uniforme[10] et procéder par dénombrement. Nous avons :

$$\Omega = \left\{(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in [\![1, n]\!]^k \mid n_1 \neq n_2 \neq \cdots \neq n_k\right\}$$

ainsi $\operatorname{Card}\Omega = A_n^k$. D'autre part :

$$\forall i \in [\![k, n]\!], \quad [X = i] = \left\{(n_1, \ldots, n_k) \in [\![1, n]\!]^k \mid n_1 \neq \cdots \neq n_k \text{ et } \max(n_1, \ldots, n_k) = i\right\}$$

et :

$$\operatorname{Card}([X = i]) = 1 \times \binom{i-1}{k-1} \times k!$$

où :
– 1 représente le nombre de choix du plus grand numéro tiré (qui je le répète est fixé).
– $\binom{i-1}{k-1}$ représente le nombre de choix des $i-1$ autres numéros pris dans l'ensemble $[\![1, k-1]\!]$.
– $k!$ représente le nombre de placements des k numéros une fois ceux-ci tirés.

Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in [\![k, n]\!], \quad \mathbf{P}([X = i]) = \frac{k!}{A_n^k}\binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{\binom{n}{k}}\binom{i-1}{k-1}}$$

(b) Nous avons $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Maintenant que le tirage se fait avec remise il sera bien plus astucieux de calculer pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}([X \leq i])$ au lieu de $\mathbf{P}([X = i])$ car les répétitions éventuelles des boules sont difficiles à gérer. L'événement $[X \leq i]$ sera réalisé si, et seulement si, tous les numéros tirés sont inférieurs ou égaux à i [11]. Ainsi :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbf{P}([X \leq i]) = \left(\frac{i}{n}\right)^k$$

et :

$$\mathbf{P}([X = i]) = \mathbf{P}([X \leq i]) - \mathbf{P}([X \leq i-1])$$

la formule reste valable pour $i = 1$ car $\mathbf{P}([X \leq 0]) = 0$.
Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbf{P}([X = i]) = \left(\frac{i}{n}\right)^k - \left(\frac{i-1}{n}\right)^k}$$

10. (a) Votre culture s'étoffant vous pouvez dire que $X \hookrightarrow \mathcal{P}\left(r, \dfrac{a}{a+b}\right)$ (**loi de Pascal**[12] qu'il vous faudra retrouver rigoureusement sur votre copie de concours, voir pour cela l'exercice 9). Autrement dit :

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N}_r, \quad \mathbf{P}([X = k]) = \binom{k-1}{r-1}\left(\frac{a}{a+b}\right)^r \left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-r}}$$

[9] Le sondage commence à partir du second tirage.
[10] Car nous sommes dans le cadre de l'**équiprobabilité.**
[11] Le max pouvant être atteint au moins une fois.
[12] Je le répète, elle est *hors programme.*

(b) Les calculs de l'espérance et de la variance sont assez techniques et font appel à la **série dérivée d'ordre k de la série géométrique de raison x où $|x| < 1$**[13] comme vu en cours. Pour éviter son emploi nous introduirons un **vecteur aléatoire** $(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ **de dimension** r, constitué de r variables aléatoires indépendantes, défini par X_1 qui est la variable associée au rang d'apparition de la première boule verte et pour tout $i \in [\![2, r]\!]$, X_i est la variable associée au rang d'apparition de la $i^{\text{ème}}$ boule verte sachant que $i-1$ ont déja été obtenues. Nous avons $X = \sum_{i=1}^{r} X_i$ où pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{a}{a+b}\right)$ admettant une espérance et une variance, par la **linéarité de l'espérance** que nous redémontrerons dans le chapître suivant nous pouvons écrire que :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{E}(X_i)$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{r(a+b)}{a}}$$

Puis par **indépendance des variables** :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(X) &= \sum_{i=1}^{r} \mathbf{V}(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \frac{\frac{b}{a+b}}{\left(\frac{a}{a+b}\right)^2} \\
&= r\frac{\frac{b}{a+b}}{\left(\frac{a}{a+b}\right)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{V}(X) = \frac{rb(a+b)}{a^2}}$$

Sinon classiquement :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=r}^{+\infty} k\binom{k-1}{r-1}\left(\frac{a}{a+b}\right)^r\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-r} \\
&= \sum_{k=r}^{+\infty} r\binom{k}{r}\left(\frac{a}{a+b}\right)^r\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-r} \\
&= r\left(\frac{a}{a+b}\right)^r\sum_{k=r}^{+\infty}\binom{k}{r}\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-r} \\
&= r\left(\frac{a}{a+b}\right)^r\sum_{k=r}^{+\infty}\frac{A_k^r}{r!}\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-r} \\
&= \frac{r}{r!}\left(\frac{a}{a+b}\right)^r\frac{r!}{\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^{r+1}} \\
&= \frac{r(a+b)}{a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}((X+1)X) &= \sum_{k=r}^{+\infty}(k+1)k\binom{k-1}{r-1}\left(\frac{a}{a+b}\right)^r\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-r} \\
&= \sum_{k=r}^{+\infty}(r+1)r\binom{k+1}{r+1}\left(\frac{a}{a+b}\right)^r\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-r}
\end{aligned}$$

---

[13] $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{n=k}}^{+\infty} A_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{k}} x^{\boldsymbol{n-k}} = \frac{k!}{(1-x)^{\boldsymbol{k+1}}}$ avec $|x| < 1$. Il y a un *moyen mnémotechnique* de s'en rappeler mais absolument PROSCRIT consistant à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{n=k}}^{+\infty} A_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{k}} x^{\boldsymbol{n-k}} = \frac{d^k}{dx^k}\sum_{\boldsymbol{n\geq 0}} x^{\boldsymbol{n}} = \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

$$\begin{aligned}
&= (r+1)\,r\left(\frac{a}{a+b}\right)^r\sum_{k=r}^{+\infty}\binom{k+1}{r+1}\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-r}\\
&= (r+1)\,r\left(\frac{a}{a+b}\right)^r\sum_{i=r+1}^{+\infty}\binom{i}{r+1}\left(\frac{b}{a+b}\right)^{i-(r+1)}\\
&= (r+1)\,r\left(\frac{a}{a+b}\right)^r\sum_{i=r+1}^{+\infty}\frac{A_i^{r+1}}{(r+1)!}\left(\frac{b}{a+b}\right)^{i-(r+1)}\\
&= \frac{(r+1)\,r}{(r+1)!}\left(\frac{a}{a+b}\right)^r\frac{(r+1)!}{\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^{r+2}}\\
&= \frac{1}{a^2}r\,(r+1)\,(a+b)^2
\end{aligned}$$

enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}((X+1)\,X)-\mathbf{E}(X)-(\mathbf{E}(X))^2\\
&= \frac{1}{a^2}r\,(r+1)\,(a+b)^2-\frac{r\,(a+b)}{a}-\left(\frac{r\,(a+b)}{a}\right)^2\\
&= \frac{br\,(a+b)}{a^2}
\end{aligned}$$

11. **Déterminer la loi de X.**
Tout d'abord $X(\Omega)=\mathbb{N}$. Calculons pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathbf{P}([X=k])$. L'événement $[X=k]$ est réalisé si, et seulement si, au cours des $r-1+k$ premiers essais de l'expérience, il y a eu $r-1$ succès et k échecs caractérisés par l'emplacement des échecs, par exemple, et la $(r+k)^{\text{ème}}$ épreuve amenant un succès. Ainsi :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbf{P}([X=k])=\tbinom{r-1+k}{k}p^{r-1}(1-p)^k\,p=\tbinom{r-1+k}{k}p^r(1-p)^k}$$

Calculons l'espérance et la variance de X.
Là encore les calculs de l'espérance et de la variance sont assez techniques et font toujours appel à la **série dérivée d'ordre k de la série géométrique de raison x où** $|x|<1$. Pour éviter son emploi nous introduirons un **vecteur aléatoire** $(X_1,X_2,\dots,X_r)$ **de dimension r**, constitué de r variables aléatoires indépendantes, défini par X_1 qui est la variable associée au nombre d'échecs qui précèdent le premier succès et pour tout $i\in[\![2,r]\!]$, X_i est la variable associée au nombre d'échecs qui précèdent le $i^{\text{ème}}$ succès sachant que $i-1$ ont déja été obtenus. Nous avons $X=\sum\limits_{i=1}^{r}X_i$ où pour tout $i\in[\![1,r]\!]$, $X_i\hookrightarrow\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$ admettant une espérance et une variance, et par toujours par la **linéarité de l'espérance** nous pouvons écrire que :

$$\mathbf{E}(X)=\sum_{i=1}^{r}\mathbf{E}(X_i)$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(X)=\frac{rq}{p}}$$

Puis par **indépendance des variables** X_i :

$$\mathbf{V}(X)=\sum_{i=1}^{r}\mathbf{V}(X_i)=\sum_{i=1}^{r}\frac{q}{p^2}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{V}(X)=\frac{rq}{p^2}}$$

12. Comme l'événement $[X\in2\mathbb{N}+1]$ est réalisé si, et seulement si, l'événement $\biguplus\limits_{p=0}^{+\infty}[X=2p+1]$ est réalisé, ainsi par $\sigma-$additivité :

$$\mathbf{P}([X\in2\mathbb{N}+1])=\mathbf{P}\left(\biguplus_{p=0}^{+\infty}[X=2p+1]\right)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

L'événement $[X \in 2\mathbb{N}]$ est réalisé si et seulement si l'événement $\biguplus_{p=0}^{+\infty} [X = 2p]$ est réalisé, ainsi par $\sigma-$additivité de $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}([X \in 2\mathbb{N}]) = \mathbf{P}\left(\biguplus_{p=0}^{+\infty} [X = 2p]\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2p}}{(2p)!}$$

Ces deux séries convergent car X est une variable aléatoire et la famille $([X = k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. En notant :

$$P = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2p}}{(2p)!} \quad \text{et} \quad I = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

nous avons :

$$P - I = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}(-\lambda)^p}{p!} = e^{-2\lambda}$$

Nous pouvons bien conclure que :

$$\boxed{\mathbf{P}([X \in 2\mathbb{N}+1]) < \mathbf{P}([X \in 2\mathbb{N}])}$$

13. (a) Il est clair que les tirages se faisant sans remise, nous avons :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \leq N, \quad S_n \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbf{P}([S_n = k]) = \frac{1}{\binom{N}{n}}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}$$

(b) Etant confrontés à un temps d'attente sans remise et sachant que “l'attente et l'antirépartion font bon ménage”, nous calculerons la probabilité de l'événement $[Y > k]$ qui est réalisé si, et seulement si, on a obtenu que des boules noires durant les k premiers tirages. Ainsi :

$$\forall k \in [\![0, b]\!], \quad \mathbf{P}([Y > k]) = \frac{1}{\binom{N}{k}}\binom{a}{0}\binom{b}{k} = \frac{1}{\binom{N}{k}}\binom{b}{k}$$

Puis classiquement pour chaque $k \in [\![1, b+1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y = k]) &= \mathbf{P}([Y > k-1]) - \mathbf{P}([Y > k]) \\
&= \frac{\binom{b}{k-1}}{\binom{N}{k-1}} - \frac{\binom{b}{k}}{\binom{N}{k}} \\
&= \frac{b!(k-1)!(N-k+1)!}{(k-1)!(b-k+1)!N!} - \frac{b!k!(N-k)!}{k!(b-k)!N!} \\
&= \frac{b!(N-k+1)!}{(b-k+1)!N!} - \frac{b!(N-k)!}{(b-k)!N!} \\
&= \frac{b!((N-k+1)! - (b-k+1)(N-k)!)}{(b-k+1)!N!} \\
&= \frac{b!((N-k)!((N-k+1) - (b-k+1)))}{(b-k+1)!N!} \\
&= \frac{b!((N-k)!(N-b))}{(b-k+1)!N!} \\
&= a\frac{b!(N-k)!}{(b-k+1)!N!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{car } N-b=a \\
= \;& a\frac{b!\,(N-k)!k!}{(b-k+1)!N!k!} \\
= \;& \frac{a}{k}\frac{b!\,(N-k)!k!}{(b-k+1)!N!\,(k-1)!} \\
= \;& \frac{a}{k}\frac{(N-k)!k!}{N!}\frac{b!}{(b-k+1)!\,(k-1)!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, b+1]\!], \quad \mathbf{P}([Y=k]) = \frac{a}{k}\frac{\binom{b}{k-1}}{\binom{N}{k}}}$$

Calcul de l'espérance de Y.
En utilisant le résultat remarquable vu dans le cours permettant de profiter de l'**antirépartition**[14], nous savons que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{b} \mathbf{P}([Y>k]) \\
&= \sum_{k=0}^{b} \frac{1}{\binom{N}{k}}\binom{b}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{b} \frac{b!k!\,(N-k)!}{k!\,(b-k)!N!} \\
&= \sum_{k=0}^{b} \frac{b!\,(N-k)!}{(b-k)!N!} \\
&= \sum_{k=0}^{b} \frac{b!\,(N-k)!\,(N-b)!}{(b-k)!N!\,(N-b)!} \\
&= \sum_{k=0}^{b} \frac{\binom{N-k}{N-b}}{\binom{N}{b}} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{b}} \sum_{k=0}^{b} \binom{N-k}{N-b} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{b}} \sum_{i=N-b}^{N} \binom{i}{N-b} \\
& \quad \text{en posant } i = N-k \\
&= \frac{1}{\binom{N}{b}} \binom{N+1}{N-b+1} \\
& \quad \text{selon la \textbf{formule du triangle de Pascal généralisée}} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{b}} \binom{N+1}{b} \\
& \quad \text{par propriété des coefficients binomiaux} \\
&= \frac{(N+1)!b!\,(N-b)!}{b!\,(N+1-b)!N!} \\
&= \frac{N+1}{N+1-b}
\end{aligned}$$

[14] A redémontrer à chaque fois.

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = \frac{N+1}{a+1} \text{ car } a+b=N}$$

14. (a) Introduisons la suite $(p_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ définie par pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $p_k = \mathbf{P}([X=k])$. Etudions la **monotonie** de cette suite. Soit $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned} \frac{p_{k+1}}{p_k} &= \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \\ &= \frac{n!k!(n-k)!p}{(k+1)!(n-k-1)!n!(1-p)} \\ &= \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} > 1\right) && (11) \\ \iff & \left(\frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} > 1\right) \\ \iff & ((n-k)p > (k+1)(1-p)) \\ \iff & (np - kp > k - kp + 1 - p) \\ \iff & (np > k+1-p) \\ \iff & (k < n(1+p) - 1) && (12) \end{aligned}$$

Le problème qui se pose maintenant est de savoir si $n(1+p)-1$ est un entier. La réponse est que nous n'en savons rien, tout dépendant de p pour lequel nous n'avons aucun renseignement. C'est la raison pour laquelle nous considèrerons la *partie entière* de $n(1+p)-1$, notée $\lfloor n_0 \rfloor$ où $n_0 = n(1+p)-1$.
Par définition $\lfloor n_0 \rfloor \leq n_0 < \lfloor n_0 \rfloor + 1$, nous savons selon (11) et (12) que $p_{n_0} > p_{\lfloor n_0 \rfloor}$ et $p_{n_0} > p_{\lfloor n_0 \rfloor + 1}$, mais la question est de savoir si nous avons $p_{\lfloor n_0 \rfloor} < p_{\lfloor n_0 \rfloor + 1}$ ou le contraire. La réponse est simple : comme $\lfloor n_0 \rfloor \leq n_0$, par définition, alors selon (11) et (12) $p_{\lfloor n_0 \rfloor} \leq p_{\lfloor n_0 \rfloor + 1}$. Moralité le mode de la distribution est $m_o = \lfloor n_0 \rfloor + 1$, soit :

$$m_o = \lfloor n(1+p) - 1 \rfloor + 1 = \lfloor n(1+p) \rfloor - 1 + 1$$

soit :

$$\boxed{m_o = \lfloor n(1+p) \rfloor}$$

(b) De même, pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$:

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+1}k!}{(k+1)!e^{-\lambda}\lambda^k} = \frac{\lambda}{k+1}$$

et :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} > 1\right) \\ \iff & \left(\frac{\lambda}{k+1} > 1\right) \\ \iff & (k < \lambda - 1) \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue nous donne que :

$$\boxed{m_o = \lfloor \lambda \rfloor}$$

15. Nous poserons $Y = \dfrac{1}{X+1} = g(X)$ où $g : t \to \dfrac{1}{1+t}$. Comme $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \{1\} \supset X(\Omega)$ alors d'après le cours Y reste une variable discrète (finie) et selon le **théorème de transfert** :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \mathbf{P}([X = k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} \\
& \quad \text{par propriété des coefficients binomiaux} \\
&= \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^{k-1} (1-p)^{n+1-k} \\
& \quad \text{par décalage d'indice} \\
&= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} \\
&= \frac{1}{p(n+1)} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} - (1-p)^{n+1} \right)
\end{aligned}$$

Conclusion : selon le **binôme de Newton**

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{p(n+1)} \left(1 - (1-p)^{n+1}\right)}$$

16. La variable $X!$ admet une espérance si, et seulement si, la série à termes positifs $\sum_{k \geq 0} k! \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ est convergente, par le théorème de transfert. Or pour tout $k \geq 0$, $k! \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda^k$ (proportionnalité avec une série géométrique). Moralité $X!$ admet une espérance si, et seulement si $|\lambda| < 1$ auquel cas :

$$\boxed{\mathbf{E}(X!) = \frac{e^{-\lambda}}{1-\lambda}}$$

17. La variable $\frac{1}{X+1}$ admet une espérance lorsque la série à termes positifs $\sum_{k \geq 0} \dfrac{1}{k+1} \mathbf{P}([X = k])$ est convergente selon le **théorème de transfert**. Or pour tout entier naturel k :

$$\frac{1}{k+1} \mathbf{P}([X = k]) = \frac{1}{k+1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+1}}{\lambda(k+1)!}$$

Ainsi la série de terme général $\dfrac{1}{k+1}\mathbf{P}([X = k])$ converge comme série proportionnelle à la série exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. En conclusion $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ existe et est égale à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+1}}{\lambda(k+1)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\
& \quad \text{par décalage d'indice} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - 1 \right) \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(e^{\lambda} - 1\right)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)=\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}}$$

De même, la variable $\dfrac{1}{(X+1)(X+2)}$ admet une espérance lorsque la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{\mathbf{P}([X=k])}{(k+1)(k+2)}$ est convergente selon le **théorème de transfert**. Or pour tout entier k :

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}\mathbf{P}([X=k])=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k+2)!}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+2}}{\lambda^2(k+2)!}$$

Ainsi la série de terme général $\dfrac{\mathbf{P}([X=k])}{(k+1)(k+2)}$ converge comme série proportionnelle à la série exponentielle de paramètre $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$. En conclusion $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{(X+1)(X+2)}\right)$ existe et est égale à, par décalage d'indice :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\frac{1}{(X+1)(X+2)}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+2}}{\lambda^2(k+2)!}\\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}-1-\lambda\right)\\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2}\left(e^{\lambda}-1-\lambda\right)\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\frac{1}{(X+1)(X+2)}\right)=\frac{1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}}{\lambda^2}}$$

Enfin comme :

$$\frac{1}{X+2}=\frac{1}{X+1}-\frac{1}{(X+1)(X+2)}$$

la variable $\dfrac{1}{X+2}$ admet une espérance en tant que différence de telles variables avec, par linéarité de l'opérateur $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+2}\right)=\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)-\mathbf{E}\left(\frac{1}{(X+1)(X+2)}\right)=\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}-\frac{1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}}{\lambda^2}$$

Après simplifications :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\frac{1}{X+2}\right)=\frac{\lambda+e^{-\lambda}-1}{\lambda^2}}$$

18. Nous poserons $Y=g(X)$ où $g:t\to\dfrac{A^t}{2n}$avec $A\in\mathbb{R}_+$. Comme $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\supset X(\Omega)$ alors d'après le cours Y reste une variable discrète (finie) et selon le **théorème de transfert** :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{2n}\mathbf{P}([X=k])\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{2n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{2n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &= \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^k\end{aligned}$$

Selon la formule du **binôme de Newton :**

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{2n}\left(\frac{A+1}{2}\right)^n}$$

19. (a) Tout d'abord $X(\Omega) = \mathbb{N}_k$. Calculons pour tout $i \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}([X = i])$. Pour cela introduisons une variable Y associée au nombre de succès obtenus lors des $i-1$ premiers tirages. Il est clair que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(i-1, p)$. D'autre part introduisons pour $i \in \mathbb{N}^*$, S_i l'événement "obtenir un succès lors du $i^{\text{ème}}$ essai". Ainsi nous avons d'évidence :

$$\forall i \in X(\Omega), \quad [X = i] = [Y = k-1] \cap S_i$$

d'où :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X = i]) &= \mathbf{P}([Y = k-1] \cap S_i) \\ &= \mathbf{P}([Y = k-1])\,\mathbf{P}(S_i) \\ &\quad \text{par indépendance des événements} \\ &= \binom{i-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{i-k}\,p\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}_k, \quad \mathbf{P}([X = i]) = \tbinom{i-1}{k-1} p^k (1-p)^{i-k}}$$

Remarque hors programme : on dira que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(k, p)$[15]
Cette loi nous permet de conclure que :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} A_n^k x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

C'est la somme de **la série dérivée d'ordre k de la série géométrique de raison x** qui converge si et seulement si $|x| < 1$.

(b) **Calculons $\mathbf{E}(X)$ pour $k = 2$.**
La variable X admet une espérance lorsque la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{i \geq 2} i\binom{i-1}{1} p^2 (1-p)^{i-2}$ est convergente. En cas de convergence :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=2}^{+\infty} i\binom{i-1}{1} p^2 (1-p)^{i-2}$$

Or :

$$\forall i \geq 2, \quad i\binom{i-1}{1} p^2 (1-p)^{i-2} = i(i-1)\,p^2 q^{i-2}$$

en posant classiquement $q = 1-p$. A ce niveau nous reconnaissons une série convergente en tant que série propotionnelle à une **série dérivée d'ordre deux de la série géométrique de raison q où** $|q| < 1$. Ainsi X admet une espérance égale à :

$$\mathbf{E}(X) = p^2 \sum_{i=2}^{+\infty} i\binom{i-1}{1} q^{i-2} = p^2 \frac{2}{(1-q)^3}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{2}{p}}$$

Calculons $\mathbf{E}\left(\frac{2}{X}\right)$ pour $k = 2$.

La variable $\dfrac{2}{X}$ admet une espérance lorsque la série àtermes positifs $\displaystyle\sum_{i \geq 2} \frac{2}{i}\binom{i-1}{1} p^2 (1-p)^{i-2}$

[15] **Loi de Pascal** de paramètres k et p. C'est la *loi du temps d'attente du $k^{\text{ème}}$ succès*. Elle *généralise* la loi géométrique.

est convergente. En cas de convergence :

$$\mathbf{E}\left(\frac{2}{X}\right) = 2\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i-1}{i} p^2 (1-p)^{i-2}$$

Or $\forall i \geq 2$:

$$2\frac{i-1}{i} p^2 (1-p)^{i-2} = 2p^2 q^{i-2} - \frac{2}{i} p^2 q^{i-2} = 2\left(\frac{p}{q}\right)^2 \left(q^i - \frac{q^i}{i}\right)$$

A ce niveau nous reconnaissons un terme général de série convergente car il s'exprime comme combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes : une **géométrique** de raison q où $|q| < 1$ et une **série logarithmique**[16] (hors programme) dont je vais vous prouver la convergence ci-dessous, **et que vous devez systématiquement reproduire sur votre copie de concours.** Pour cela, introduisons :

$$\forall x \in [0,1[\,, \quad \forall n \geq 1, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i}$$

A ce moment précis vous devez penser à dire que $\dfrac{x^i}{i} = \displaystyle\int_0^x t^{i-1} dt$. Ainsi pour chaque réel $x \in [0,1[$, et chaque $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_0^x t^{i-1} dt \\
&= \int_0^x \left(\sum_{i=1}^{n} t^{i-1}\right) dt \\
&\quad \text{par linéarité de l'intégrale,} \\
&\quad \text{toutes les intégrales en jeu étant cv}^{\text{tes}} \\
&= \int_0^x \left(\sum_{i=0}^{n-1} t^{i}\right) dt \\
&\quad \text{par changement d'indice} \\
&= \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt \\
&\quad \text{calcul d'une somme géo. de raison } t \neq 1 \\
&= \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \\
&\quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt
\end{aligned}$$

Le passage à la limite quand n tend vers l'infini va nous permettre d'**encadrer** $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ (qui n'est pas très engageante à calculer directement) avant d'en faire sa limite[17]. Nous avons :

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$$

Comme :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} = 0$$

[16] Retenez la démonstration de ce *grand classique d'analyse* que l'on peut retrouver en préliminaire un 30 Avril à 8H00 du matin !

[17] A ce propos je vous **interdit** d'écrire que $\lim \int = \int \lim$ sauf si vous aimez tellement Saint-Jean (amour totalement justifié) et que vous vouliez faire carré !

le théorème d'encadrement nous permet d'écrire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-x}dt$ existe et vaut 0. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = -\ln(1-x)$$

La série de terme général $\dfrac{q^i}{i}$ converge et de somme :

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{q^i}{i} = -\ln(1-p) = -\ln p$$

Vous feriez bien d'apprendre ce résultat par **coeur** !
Ainsi $\dfrac{2}{X}$ admet une espérance égale à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\frac{2}{X}\right) &= 2\sum_{i=2}^{+\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^2\left(q^i-\frac{q^i}{i}\right)\\
&= 2\left(\frac{p}{q}\right)^2\sum_{i=2}^{+\infty}\left(q^i-\frac{q^i}{i}\right)\\
&= 2\left(\frac{p}{q}\right)^2\left(\sum_{i=2}^{+\infty}q^i-\sum_{i=2}^{+\infty}\frac{q^i}{i}\right)\\
&= 2\left(\frac{p}{q}\right)^2\left(\frac{q^2}{1-q}-\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{q^i}{i}-q\right)\right)\\
&= 2\left(\frac{p}{q}\right)^2\left(\frac{q^2}{1-q}-(-\ln p-q)\right)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\frac{2}{X}\right) = 2\left(\frac{p}{q}\right)^2\left[\frac{q^2}{p}+\ln p+q\right]}$$

20. **Cherchons la loi de Y**. Tout d'abord $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,6\rrbracket)$ [18], ainsi $Y(\Omega)=\{0,1,4,9\}$. Nous avons :
 - $\mathbf{P}([Y=0]) = \mathbf{P}([X=3]) = 1/6$
 - $\mathbf{P}([Y=1]) = \mathbf{P}([X=2]\uplus[X=4]) = 2/6$
 - $\mathbf{P}([Y=4]) = \mathbf{P}([X=1]\uplus[X=5]) = 2/6$
 - $\mathbf{P}([Y=9]) = \mathbf{P}([X=6]) = 1/6$

 Pour résumer :

k	0	1	4	9
$\mathbf{P}([Y=k])$	1/6	1/3	1/3	1/6

Terminons par la loi de Z.

$$\boxed{Z(\Omega)=\left\{\frac{1}{k},\ k\in\llbracket 1,6\rrbracket\right\} \quad \text{et} \quad \forall k\in Z(\Omega),\quad \mathbf{P}\left(\left[Z=\frac{1}{k}\right]\right)=\mathbf{P}([X=k])=\frac{1}{6}}$$

21. Nous poserons $Y=g(X)$ où $g : t \to \left\lfloor\dfrac{t}{2}\right\rfloor$. Comme $X(\Omega)=\llbracket 0,2N\rrbracket$ et $\mathcal{D}_g=\mathbb{R}\supset X(\Omega)$ alors d'après le cours Y reste une variable discrète (finie) et selon le **théorème de transfert** :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{2n}\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\mathbf{P}([X=k])\\
&= \sum_{k=0}^{2n}\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\binom{2n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left\lfloor\frac{2i}{2}\right\rfloor\binom{2n}{2i}p^{2i}(1-p)^{2n-2i}+\sum_{i=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{2i+1}{2}\right\rfloor\binom{2n}{2i+1}p^{2i+1}(1-p)^{2n-(2i+1)}
\end{aligned}$$

[18] **Loi uniforme** de paramètre $[[1,6]]$.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} i\binom{2n}{2i}p^{2i}(1-p)^{2n-2i} + \sum_{i=0}^{n-1} i\binom{2n}{2i+1}p^{2i+1}(1-p)^{2n-(2i+1)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} 2i\binom{2n}{2i}p^{2i}(1-p)^{2n-2i} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(2i+1)\binom{2n}{2i+1}p^{2i+1}(1-p)^{2n-(2i+1)} \\
&\qquad - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n}{2i+1}p^{2i+1}(1-p)^{2n-(2i+1)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n} i\binom{2n}{i}p^{i}(1-p)^{2n-i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n}{2i+1}p^{2i+1}(1-p)^{2n-(2i+1)} \\
&\quad \text{par regroupement des 2 premières sommes} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} i\binom{2n}{i}p^{i}(1-p)^{2n-i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n}{2i+1}p^{2i+1}(1-p)^{2n-(2i+1)} \\
&= \frac{2n}{2}\sum_{i=1}^{2n}\binom{2n-1}{i-1}p^{i}(1-p)^{2n-i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n}{2i+1}p^{2i+1}(1-p)^{2n-(2i+1)} \\
&\quad \text{par propriété des coefficients binomiaux} \\
&= n\sum_{i=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{i}p^{i+1}(1-p)^{2n-i-1} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n}{2i+1}p^{2i+1}(1-p)^{2n-(2i+1)} \\
&\quad \text{par décalage d'indice} \\
&= np\sum_{i=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{i}p^{i}(1-p)^{(2n-1)-i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n}{2i+1}p^{2i+1}(1-p)^{2n-(2i+1)} \\
&= np\,(p+1-p)^{2n-1} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n}{2i+1}p^{2i+1}(1-p)^{2n-(2i+1)} \\
&= np - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n}{2i+1}p^{2i+1}(1-p)^{2n-(2i+1)} \\
&\quad \text{selon le binôme de Newton}
\end{aligned}
$$

Notons

$$I = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n}{2i+1}p^{2i+1}(1-p)^{2n-(2i+1)}$$

et introduisons

$$P = \sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}p^{2i}(1-p)^{2n-2i}$$

Ainsi :

$$
\begin{cases}
P + I = \sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}p^{i}(1-p)^{2n-i} \\
P - I = \sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}(-p)^{i}(1-p)^{2n-i}
\end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} P + I = 1 \\ P - I = (1-2p)^{2n} \end{cases}
$$

$$
\implies \begin{cases} I = \dfrac{1-(1-2p)^{2n}}{2} \end{cases}
$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = np - \frac{1}{2}\left(\frac{1-(1-2p)^{2n}}{2}\right)}$$

22. **Déterminons la loi de Y.**
Un petit "échauffement" pour fixer les idées nous permet d'écrire que :

$$\begin{array}{c}[X=0]=[Y=0]\\ [X=1]=[Y=0]\\ [X=2]=[Y=1]\\ [X=3]=[Y=0]\\ [X=4]=[Y=2]\\ [X=5]=[Y=0]\\ [X=6]=[Y=3]\\ [X=7]=[Y=0]\\ [X=8]=[Y=4]\\ \vdots\end{array}$$

etc... donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Y=0]) &= \mathbf{P}([X=0])+\sum_{p=0}^{+\infty}\mathbf{P}([X=2p+1])\\ &= e^{-\lambda}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2p+1}}{(2p+1)!}\\ &= e^{-\lambda}+\frac{1-e^{-2\lambda}}{2}\\ &\quad\text{selon l'exercice }\mathbf{11}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\mathbf{P}([Y=0])=\frac{1}{2}+e^{-\lambda}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda}$$

et

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbf{P}([Y=k])=\mathbf{P}([X=2k])=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}}$$

Calculons $E(Y)$.
La variable Y admet une espérance lorsque la série à termes positifs $\sum_{k\geq 1}k\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}$ est convergente.
En cas de convergence :

$$\mathbf{E}(Y)=\sum_{k=1}^{+\infty}k\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}$$

Or :

$$\forall k\geq 1,\quad k\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}=\frac{1}{2}\left(2k\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}\right)=\frac{\lambda}{2}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

et nous reconnaissons le terme général d'une série convergente selon l'**exercice 11**[19]. Donc l'espérance de Y existe et vaut toujours selon (13) :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y)=\lambda\left(\frac{1-e^{-2\lambda}}{4}\right)}$$

Calculons $\mathbf{V}(Y)$.
Par théorème Y admet une variance si et seulement si $2Y(2Y-1)$ admet une espérance et $(2Y(2Y-1)$ admet une espérance si, et seulement si, la série à termes positifs $\sum_{k\geq 1}2k(2k-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}$ est convergente. En cas de convergence :

$$\mathbf{E}(2Y(2Y-1))=\sum_{k=1}^{+\infty}2k(2k-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}$$

[19] Et dont vous devez reprendre les grandes lignes pour faire la preuve de la convergence dans l'exercice.

Or :

$$\forall k \geq 1, \quad 2k\,(2k-1)\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k-2)!} = \lambda^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k-2}}{(2k-2)!}$$

et nous reconnaissons le terme général d'une série convergente selon l'**exercice 11**[20]. Donc l'espérance de $2Y\,(2Y-1)$ existe et vaut toujours selon (13) :

$$\mathbf{E}\,(2Y\,(2Y-1)) = \lambda^2\left(\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}\right)$$

En conclusion la variable Y admet une variance égale, selon le théorème de Huygens-Koenig, à :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}\,(Y) &= \frac{1}{4}\mathbf{E}\,(2Y\,(2Y-1)) + \frac{1}{2}\mathbf{E}\,(Y) - (\mathbf{E}\,(Y))^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\lambda^2\left(\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\lambda\left(\frac{1-e^{-2\lambda}}{4}\right)\right) - \left(\lambda\left(\frac{1-e^{-2\lambda}}{4}\right)\right)^2\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{V}\,(Y) = \frac{1}{8}\lambda + \frac{1}{16}\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda e^{-2\lambda} + \frac{1}{4}\lambda^2 e^{-2\lambda} - \frac{1}{16}\lambda^2 e^{-4\lambda}}$$

[20] Et dont vous devez reprendre les grandes lignes pour faire la preuve de la convergence dans l'exercice.

14 Séries doubles

1. (a) Le **théorème de Fubini** n'imposant pas l'ordre de l'étude successive des séries simples, nous commencerons à travailler à i fixé.

   – Pour $i \geq 2$, la série simple $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{(p+i)^k}$ converge en tant que **série géométrique** de raison $\dfrac{1}{p+i} \in]0,1[$ puisque $p > -1$ donc $\left|\dfrac{1}{p+i}\right| < 1$. Sa somme vaut :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(p+i)^k} = \frac{1}{(p+i)^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{p+i}} = \frac{1}{(p+i)(p-1+i)}$$

   – De plus :

$$\frac{1}{(p+i)(p-1+i)} \underset{i\to\infty}{\sim} \frac{1}{i^2}$$

   le **critère d'équivalence appliqué aux séries à termes positifs** nous dit que la série simple $\displaystyle\sum_{i\geq 2} \frac{1}{(p+i)(p-1+i)}$ converge et **Fubini** permet de conclure à la **convergence** de la série double $\displaystyle\sum_{i\geq 2, k\geq 2} \frac{1}{(p+i)^k}$ où $p > -1$ de somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(p+i)^k} &= \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{(p+i)(p-1+i)} \\
&= \sum_{i=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{p+i} + \frac{1}{p-1+i}\right) \\
&\quad \text{par décomposition en éléments simples} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{-1}{p+i} + \frac{1}{p-1+i}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{p+n} + \frac{1}{p+1}\right)
\end{aligned}$$

   Conclusion :

$$\boxed{\sum_{i=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(p+i)^k} = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{(p+i)^k} = \frac{1}{p+1}}$$

   (b) Cet exercice ressemble beaucoup au précédent, puisque l'étude à k fixé nous amène à considérer une **série géométrique** de raison convenable puisque $|1/2k| < 1$, de somme :

$$\frac{1}{(2k)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{2k}} = \frac{1}{2k(2k-1)}$$

   équivalente à $\dfrac{1}{4k^2}$ qui représente le terme général d'une série convergente, ce n'est pas **Riemann** qui nous dira le contraire puisque $2 > 1$! La série double $\displaystyle\sum_{i\geq 2, k\geq 1} \frac{1}{(2k)^i}$ converge selon **Fubini**, de somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^i} &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^i} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)
\end{aligned}$$

   ce n'est pas une somme télescopique

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Et nous retombons sur la **série harmonique alternée**, bien connue de vous tous, du moins je l'espère, et :

$$\boxed{\sum_{i=2}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^i} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^i} = \ln(2)}$$

(c) Tout d'abord, pour tout couple, $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\frac{3^p}{n^{p+2}\left(\ln^2 p + p^5 + 5^{2p}\right)} \leq \frac{3^p}{n^2 5^{2p}} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{3}{25}\right)^p$$

Le grand intéret de cette majoration est de nous faire obtenir un terme général de série double de la forme $a_n b_p$ bien plus facile à manipuler. En effet le **théorème de Fubini** s'applique très simplement en nous ramenant implicitement à étudier "séparément"[21] des séries plutôt que successivement. Pour vous en convaincre vous écrivez que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{i,j} = a_i b_j$$

avec $\sum\limits_{i\geq 0} a_i$ et $\sum\limits_{j\geq 0} b_j$ convergentes, alors la série $\sum\limits_{i\geq 0, j\geq 0} u_{i,j}$ converge et :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\right)\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j\right)$$

en effet :

$$\left(\sum_{j\geq 0} a_i b_j\right)_{i\in\mathbb{N}} = \left(a_i \sum_{j\geq 0} b_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$$

Cela donne ici :

- $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que **série de Riemann** de paramètre $2 > 1$;
- $\sum\limits_{p\geq 1} \left(\frac{3}{25}\right)^p$ converge en tant que série géométrique de raison en valeur absolue stristenment inférieure à 1.

  Conclusion par le **théorème de comparaison appliqué aux séries doubles à termes positifs** :

$$\boxed{\text{La série double } \sum_{n\geq 1, p\geq 1} \frac{3^p}{n^{p+2}\left(\ln^2 p + p^5 + 5^{2p}\right)} \text{ converge}}$$

(d) Au regard du terme général, le **théorème de sommation par paquets** va s'imposer en sommant par **diagonales**, mais avant toute chose montrons que la série en jeu converge absolument, ce qui équivaut à sa convergence vu la positivité de son terme général. Nous avons pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N}^2$,

$$0 \leq \frac{1}{n!k!\,(n+k+1)} \leq \frac{1}{n!k!}$$

et la série majorante ne pose aucun problème de convergence vu ce qui a été dit à la question précédente puisque $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ représente la même **série exponentielle** convergente. Donc on peut conclure par comparaison pour des termes positifs. Passons au calcul maintenant en écrivant que :

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{n!k!\,(n+k+1)} &= \sum_{m=0}^{+\infty}\Big(\sum_{\left\{\substack{(n,k)\in\mathbb{N}^2 \\ n+k=m}\right.} \frac{1}{n!k!\,(n+k+1)}\Big) \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!\,(m-k)!\,(m+1)}\right)
\end{aligned}$$

[21] C'est une illusion.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m+1} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!\,(m-k)!} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+1)!} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!\,(m-k)!} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+1)!} \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2^m}{(m+1)!} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2^{m+1}}{(m+1)!} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^m}{m!}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{n!k!\,(n+k+1)} = \frac{1}{2}\left(e^2-1\right)}$$

2. Pour $n \geq 1$, nous avons

$$0 \leq \frac{a_n}{n\,(n+1)} \leq a_n$$

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n\,(n+1)}$ converge.

Posons pour tout couple $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, $k \neq 0$,

$$u_{k,n} = \begin{cases} \dfrac{ka_n}{n\,(n+1)} & \text{si} \quad n \geq k \\ 0 & \text{si} \quad n < k \end{cases}$$

Nous avons donc à montrer la convergence de la série $\sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 1} u_{k,n}$ (avez-vous vu le sens des sommes dans l'énoncé ?). Comme il s'agit ici d'une série double à termes positifs, la convergence de cette série équivaut à celle de la série $\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} u_{k,n}$ i.e. $\sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n} u_{k,n}$. Or pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_{k,n} &= \frac{a_n}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{a_n}{n\,(n+1)} \frac{n\,(n+1)}{2} \\
&= \frac{a_n}{2}
\end{aligned}$$

Par hypothèse, $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge donc $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{2}$ converge par proportionnalité, et la série double $\sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 1} u_{k,n}$ est bien convergente donc $\sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n\,(n+1)}$ existe avec :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n\,(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} u_{k,n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$$

3. ▶ **Supposons que n soit fixé dans $\mathbb{N}^*$.**

$$\frac{1}{n^2-m^2} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n+m} + \frac{1}{n-m}\right)$$

Par sommation des égalités sur m allant 1 à N où nous poserons $N > n$, n étant **fixé** :

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in[\![1,N]\!]-\{n\}} \frac{1}{n^2-m^2} &= \sum_{m\in[\![1,N]\!]-\{n\}} \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m-n}\right)\\
&= \frac{1}{2n}\sum_{m\in[\![1,N]\!]-\{n\}}\left(\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m-n}\right)\\
&= \frac{1}{2n}\left(\sum_{m\in[\![1,N]\!]-\{n\}}\frac{1}{m+n}-\sum_{m\in[\![1,N]\!]-\{n\}}\frac{1}{m-n}\right)\\
&= \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=n+1}^{n+N}\frac{1}{i}-\frac{1}{2n}-\sum_{j\in[\![1-n,N-n]\!]-\{0\}}\frac{1}{j}\right)\\
&\quad \text{par changement d'indices}\\
&= \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=n+1}^{n+N}\frac{1}{i}-\frac{1}{2n}-\sum_{j=1-n}^{-1}\frac{1}{j}-\sum_{j=1}^{N-n}\frac{1}{j}\right)\\
&= \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=n+1}^{n+N}\frac{1}{i}-\frac{1}{2n}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}-\sum_{j=1}^{N-n}\frac{1}{j}\right)\\
&= \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n+N}\frac{1}{i}-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}-\sum_{j=1}^{N-n}\frac{1}{j}\right)\\
&= \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n+N}\frac{1}{i}-\frac{3}{2n}-\sum_{j=1}^{N-n}\frac{1}{j}\right)\\
&= \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=N-n+1}^{n+N}\frac{1}{i}-\frac{3}{2n}\right)
\end{aligned}$$

avec :

$$0 < \sum_{i=N-n+1}^{n+N}\frac{1}{i} < \underbrace{(n+N-N+n-1+1)}_{=2n}\frac{1}{N-n+1}$$

Faisons tendre N vers l'infini, n étant fixé dans $\mathbb{N}^*$, le **théorème d'encadrement** nous informe que

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{i=N-n+1}^{n+N}\frac{1}{i}=0$$

et par addition des limites :

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2n}\left(\sum_{i=N-n+1}^{n+N}\frac{1}{i}-\frac{3}{2n}\right)=-\frac{3}{4n^2}$$

et la série simple $\sum_{n\geq 1}\frac{3}{4n^2}$ est convergente en tant que série proportionnelle à une **série de Riemann** de paramètre $2>1$ ce qui signifie que **la somme double** $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ (c'est une succession de deux limites simples) **est bien définie** avec :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}u_{n,m}\right)=\lim_{M\to+\infty}\sum_{n=1}^{M}\left(-\frac{3}{4n^2}\right)=-\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}}$$

▶ **Supposons que m soit fixé dans $\mathbb{N}^*$.**
Commençons par constater que, pour tout couple d'entiers (n,m) tels que $m\neq n$ (où $n\neq 0$) par

décomposition de la fraction en éléments simples, nous avons :

$$\frac{1}{n^2-m^2}=\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}\right)$$

Par sommation des égalités sur p allant 0 à N' où nous poserons $N>n$ où p est **fixé** :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in[\![0,N']\!]-\{m\}}\frac{1}{n^2-m^2} &= \sum_{n\in[\![1,N']\!]-\{m\}}\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}\right)\\
&= \frac{1}{2p}(\sum_{n\in[\![1-m,N'-m]\!]-\{0\}}\frac{1}{n}-\sum_{n\in[\![m+1,N'+m]\!]-\{2m\}}\frac{1}{n+m})\\
&= \frac{1}{2p}\left(\sum_{n=1}^{N'-m}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n}-\sum_{n=m+1}^{N'+m}\frac{1}{n}+\frac{1}{2m}\right)\\
&= \frac{1}{2p}\left(\sum_{n=1}^{N'-m}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N'+m}\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{2m}\right)\\
&= \frac{1}{2m}\left(\frac{3}{2m}-\sum_{n=N'-m+1}^{N'+m}\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

avec :

$$0<\sum_{n=N'-m+1}^{N'+m}\frac{1}{n}<\underbrace{(m+N'-N'+m-1+1)}_{=2m}\frac{1}{N'-m+1}$$

Faisons tendre N' vers l'infini, n étant **fixé** dans $\mathbb{N}^*$, le **théorème d'encadrement** nous informe que

$$\lim_{N'\to+\infty}\sum_{n=N'-m+1}^{N'+m}\frac{1}{n}=0$$

et par addition des limites :

$$\lim_{N'\to+\infty}\frac{1}{2p}\left(\frac{3}{2m}+\sum_{n=N'-m+1}^{N'+m}\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{4m^2}$$

L'enchaînement est le même qu'au cas précédent : la série simple $\sum_{m\geq 1}\frac{3}{4m^2}$ est convergente en tant que série proportionnelle à une **série de Riemann** de paramètre $2>1$ ce qui signifie que **la somme double** $\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ **est bien définie** avec :

$$\boxed{\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,m}\right)=\lim_{M'\to+\infty}\sum_{m=1}^{M'}\left(\frac{3}{4m^2}\right)=\frac{3}{4}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}}$$

Alors quelle est la conclusion ? Réponse :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}u_{n,m}\right)\neq\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,m}\right)}$$

et **la série double n'est donc pas convergente.**

4. ► Soit $x\in\,]-1,1[$. Montrons l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^{2n}}$$

L'observation scrupuleuse des termes généraux des deux sommes doit vous faire penser à faire apparaître une **somme géométrique** et donc nous devons considérer l'étude de la convergence absolue d'une série double $\sum_{n\geq 1, k\geq 0} x^{n(2k+1)}$ en remarquant que :

$$\frac{x^n}{1-x^{2n}} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^n \left(x^{2n}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{n(2k+1)}$$

♠ **Pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$**, la série simple $\sum_{k\geq 0} |x|^{n(2k+1)}$ est convergente puisque $|x|^{2n} < 1$, de somme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |x|^{n(2k+1)} = \frac{|x|^n}{1-|x|^{2n}}$$

♠ De plus :

$$\frac{|x|^n}{1-|x|^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^n$$

le théorème d'équivalence appliqué aux séries à termes positifs permet de conclure que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{|x|^n}{1-|x|^{2n}}$ converge.

♠ Selon le **théorème de Fubini**, la série double $\sum_{n\geq 1, k\geq 0} x^{(2k+1)n}$ converge absolument, donc converge, avec :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} x^{(2k+1)n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} x^{(2k+1)n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{1-x^{2k+1}}$$

$Et comme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} x^{(2k+1)n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$$

il vient bien :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}}$$

► Procédons de la même manière pour l'autre identité.
Remarquons formellement :

$$\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = x^{2^n} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(x^{2^{n+1}}\right)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} x^{2^n(2m+1)}$$

C'est pour cela que nous allons introduire la série double $\sum_{m\geq 0, n\geq 0} x^{2^n(2m+1)}$ afin de voir si le **théorème de Fubini** peut lui être appliqué.

♠ **Pour n fixé dans $\mathbb{N}$**, la série simple $\sum_{m\geq 0} |x|^{2^n(2m+1)}$ est convergente puisque $|x|^{2^{n+1}} < 1$, de somme :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |x|^{2^n(2m+1)} = |x|^{2^n} \frac{1}{1-|x|^{2^{n+1}}}$$

♠ De plus :

$$\frac{|x|^{2^n}}{1-|x|^{2^{n+1}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^{2^n}$$

le **théorème d'équivalence appliqué aux séries à termes positifs** permet de conclure que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{|x|^{2^n}}{1-|x|^{2^{n+1}}}$ converge.

♠ Selon le **théorème de Fubini**, la série double $\sum\limits_{m\geq 0, n\geq 0} x^{2^n(2m+1)}$ converge absolument, donc converge, avec :

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n(2m+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} x^{2^n(2m+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

Et par le théorème de **sommation par paquets** en remarquant que tout entier $k \geq 1$ s'écrit de **manière unique**[22] $k = 2^n(2m+1)$ avec $n \geq 0$ et $m \geq 0$, il vient :

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n(2m+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\begin{cases} (m,n)\in\mathbf{N}^2 \\ 2^n(2m+1)=k \end{cases}}^{+\infty} x^{2^n(2m+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$$

Il vient donc bien que :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1-x}}$$

[22]En effet supposons qu'il y ait deux couples d'entiers (m, n) et (m', n') tel que : $k = 2^n(2m+1)$ et $k = 2^{n'}(2m'+1)$. Alors en regroupant ces identités il vient que $2^n(2m+1) = 2^{n'}(2m'+1)$ soit encore que $2^{n-n'+1}m + 2^{n-n'} - 1 = 2m'$. Or cette égalité est impossible a vérifier quel que soit m et tant que $n \neq n'$ car, dans ce cas $2^{n-n'+1}m + 2^{n-n'} - 1$ est toujours un entier impair, ce qui n'est pas le cas de $2m'$. Cela impose donc que $n = n'$ et dans ce cas il s'ensuit que $2m = 2m'$ d'où $m = m'$. En cas d'existence, n et m sont uniques. Maintenant voyons leur existence : tout nombre entier n pouvant s'écrire comme le produit fini de nombres du type $(p_k)^{\alpha_k}$ où les nombres p_k sont des nombres premiers tels que si $k < l$ alors $p_k < p_l$ et les puissances α_k sont des entiers naturels non nuls.

15 Vecteurs aléatoires

1. Pour simplifier notre tâche construisons le tableau de contingence à deux entrées donnant la lois du couple et les lois marginales.

$X \downarrow \quad \underset{\longrightarrow}{Y}$	0	1	4	$\mathcal{L}(Y) \downarrow$
-2	0	0	1/6	1/6
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/6	0	0	1/6
1	0	1/4	0	1/4
2	0	0	1/6	1/6
$\mathcal{L}(X) \longrightarrow$	1/6	1/2	1/3	**1**

Explications :

$$\mathbf{P}([X=0]\cap[Y=0]) = \mathbf{P}([X=0])\,\mathbf{P}_{[X=0]}([Y=0]) = 1/6\times 1 = 1/6$$
$$\mathbf{P}([X=-1]\cap[Y=1]) = \mathbf{P}([X=-1])\,\mathbf{P}_{[X=-1]}([Y=1]) = 1/4\times 1 = 1/4$$
$$\mathbf{P}([X=1]\cap[Y=1]) = \mathbf{P}([X=1])\,\mathbf{P}_{[X=1]}([Y=1]) = 1/4\times 1 = 1/4$$
$$\mathbf{P}([X=-2]\cap[Y=4]) = \mathbf{P}([X=-2])\,\mathbf{P}_{[X=-2]}([Y=4]) = 1/6\times 1 = 1/6$$
$$\mathbf{P}([X=2]\cap[Y=4]) = \mathbf{P}([X=2])\,\mathbf{P}_{[X=2]}([Y=4]) = 1/6\times 1 = 1/6$$

2. (a) Calculons a.
   - Pour commencer signalons que a doit être positif pour que pour tout couple (i,j) de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$, $\mathbf{P}([X=i]\cap[Y=j])$ le soit.
   - Pour $i\in\mathbb{N}^*$, la **série simple** $\sum_j p_{i,j}$ converge puisque le terme génréal est proportionnel à celui d'une série exponentielle de paramètre $1\in\mathbb{R}$, de somme :

   $$\sum_{j=0}^{+\infty} p_{i,j} = a^i\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!} = ea^i$$

   - Enfin la **série simple** de terme général ea^i converge par proportionnalité avec une série géométrique de raison a si et seulement si $|a|<1$ avec dans ce cas :

   $$\sum_{i=1}^{+\infty} ea^i = \frac{ea}{1-a}$$

   - D'après le **théorème de Fubini** la **série double** $\sum_{(i,j)}\frac{a^i}{j!}$ converge et de somme :

   $$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}\frac{a^i}{j!} &= \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{a^i}{j!}\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} ea^i\\ &= \frac{ea}{1-a}\end{aligned}$$

   Pour avoir le paramètre $a>0$ il suffit de poser la contrainte $\frac{ea}{1-a}=1$ ce qui donne :

   $$\boxed{a=\frac{1}{e+1}}$$

   et on confirme bien que $|a|<1$.

   (b) C'est parti !
   - **Déterminons la loi de X.**
     - $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$

– Soit $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=i]) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a^i}{j!} \\
&= ea^i \\
&= \frac{e}{(e+1)^i} \\
&= \frac{e}{e+1}\left(\frac{1}{e+1}\right)^{i-1}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{e}{e+1}\right)}$$

– **Déterminons la loi de Y.**
  – $Y(\Omega) = \mathbb{N}$
  – Soit $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y=j]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a^i}{j!} \\
&= \frac{1}{j!}\frac{a}{1-a} \\
&= \frac{1}{j!}\left(\frac{\frac{1}{1+e}}{1-\frac{1}{1+e}}\right) \\
&= \frac{e^{-1}}{j!} \\
&= \frac{e^{-1}1^j}{j!}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)}$$

– Vérifions l'indépendance de X et Y. Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
p_{i,j} &= \left(\frac{1}{e+1}\right)^i \frac{1}{j!} \\
&= \frac{e}{(e+1)^i} \times \frac{e^{-1}}{j!} \\
&= p_{i\bullet} \times p_{\bullet j}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}$$

(c) Comme X et Y admettent chacune une espérance et une variance, S admet aussi une espérance et une variance en tant que somme de telles variables. Par **linéarité de l'espérance** :

$$\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) = \frac{e+1}{e} + 1$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(S) = \frac{2e+1}{e}}$$

Enfin par **indépendance** des variables X et Y :

$$\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) = \frac{1-\frac{e}{e+1}}{\left(\frac{e}{e+1}\right)^2} + 1$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{V}(S) = \frac{e^2+e+1}{e^2}}$$

3. Nous avons $D(\Omega) = \{0,1\}$ et $D \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{P}([D=1]))$ avec :

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{P}([D=1]) & = & \mathbf{P}([|X-Y|=1]) \\ & = & \mathbf{P}([X=1]\cap[Y=0]) + \mathbf{P}([X=0]\cap[Y=1]) \\ & = & \mathbf{P}([X=1])\,\mathbf{P}([Y=0]) + \mathbf{P}([X=0])\,\mathbf{P}([Y=1]) \\ & & \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ & = & 2\times(1/2)^2 \\ & = & 1/2\end{array}$$

Conclusion :

$$\boxed{D \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)}$$

4. (a) Nous avons :
   - $(X,Y)(\Omega) = \{(i,j) \in [\![1,n]\!] \mid i \le j\}$.
   - Soit $(i,j) \in (X,Y)(\Omega)$:

$$([X=i]\cap[Y=j]) = \left\{(n_1,n_2)\in[\![1,n]\!]^2 \mid (n_1=i, n_2=j) \text{ ou } (n_1=j,n_2=i)\right\}$$

   en notant pour $k \in [\![1,2]\!]$, n_k le numéro obtenu lors du $k^{\text{ème}}$ tirage. Donc si $i \neq j$,

$$|([X=i]\cap[Y=j])| = 2$$

   et si $i=j$,

$$|([X=i]\cap[Y=j])| = 1$$

   Enfin Ω est l'ensemble des **listes d'ordre deux** de $[\![1,n]\!]$ donc $|\Omega| = n^2$.
   Conclusion :

$$\boxed{\forall (i,j)\in(X,Y)(\Omega),\quad \mathbf{P}([X=i]\cap[Y=j]) = \begin{cases}\dfrac{1}{n^2} & \text{si } i=j \\ \dfrac{2}{n^2} & \text{si } i<j\end{cases}}$$

   (b) Passons aux “marges”.
   - **Déterminons la loi de X.**
     - Tout d'abord $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
     - Soit $i \in X(\Omega)$:

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{P}([X=i]) & = & \sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j} \\ & = & 0 + \sum\limits_{j=i}^{n} p_{i,j} \\ & = & \dfrac{1}{n^2} + \sum\limits_{j=i+1}^{n}\dfrac{2}{n^2} \\ & = & \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2(n-i)}{n^2}\end{array}$$

     Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in X(\Omega),\quad \mathbf{P}([X=i]) = \frac{2n-2i+1}{n^2}}$$

   - **Déterminons la loi de Y.**
     - Tout d'abord $Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$.

– Soit $j \in Y(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Y=j]) &= \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{j} p_{i,j} + 0 \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{2(j-1)}{n^2} + \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall j \in Y(\Omega), \quad \mathbf{P}([Y=j]) = \frac{2j-1}{n^2}}$$

5. • **Déterminons la loi du couple (X,Y).**
   – – $(X,Y)(\Omega) = \left\{(i,j) \in [\![1, n+2]\!]^2 \mid i < j\right\}$.
   – Soit $(i,j) \in (X,Y)(\Omega)$:

$$\boxed{\mathbf{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \frac{1}{\dbinom{n+2}{2}}}$$

En effet il n'y a qu'un seul "vidage" observable favorable :

N_1	N_2	$\cdots$	N_{i-1}	B_i	N_{i+1}	N_{i+2}	$\cdots$	N_{j-1}	B_j	N_{j+1}	$\cdots$	N_n

En notant r_1 le rang d'arrivée de la première boule blanche et r_2 celui de la deuxième, nous avons : $\Omega = \left\{(r_1, r_2) \in [\![1, n+2]\!]^2 \mid r_1 < r_2\right\}$ ce qui entraîne que $\operatorname{Card} \Omega = \dbinom{n+2}{2}$. Enfin :

$$([X=i] \cap [Y=j]) = \left\{(r_1, r_2) \in [\![1, n+2]\!]^2 \mid (r_1 = i, r_2 = j)\right\}$$

et :

$$\operatorname{Card}([X=i] \cap [Y=j]) = 1$$

– **Déterminons la loi de X.**
   – $X(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.
   – Soit $i \in X(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X=i]) &= \sum_{j=1}^{n+2} p_{i,j} \\ &= 0 + \sum_{j=i+1}^{n+2} p_{i,j} \\ &= \frac{(n+2)-(i+1)+1}{\dbinom{n+2}{2}}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}([X=i]) = \frac{n-i+2}{\dbinom{n+2}{2}}}$$

– **Déterminons la loi de Y.**
   – $Y(\Omega) = [\![2, n+2]\!]$.
   – Soit $j \in Y(\Omega)$:

$$\mathbf{P}([Y=j]) = \sum_{i=1}^{n+2} p_{i,j} = \sum_{i=1}^{j-1} p_{i,j} + 0$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall j \in Y(\Omega), \quad \mathbf{P}([Y=j]) = \frac{j-1}{\dbinom{n+2}{2}}}$$

6. • $(X,Y)(\Omega) = \left\{(i,j) \in [\![1, n+2]\!]^2 \mid i \geq j\right\}$
   – Soit $(i,j) \in (X,Y)(\Omega)$:

$$\mathbf{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \mathbf{P}([X=i])\,\mathbf{P}_{[X=i]}([Y=j]) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{i}$$

   Conclusion :

$$\boxed{\forall (i,j) \in (X,Y)(\Omega), \quad \mathbf{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \frac{1}{ni}}$$

7. (a) Il est clair que :

$$\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!]), \quad \mathbf{E}(X_1) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X_1) = \frac{n^2-1}{12}}$$

   (b) Il sera plus judicieux de passer par la loi du couple (X_1, X_2).

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X_1=i] \cap [X_2=j]) &= \mathbf{P}([X_1=i])\,\mathbf{P}_{[X_1=i]}([X_2=j]) \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n+i} & \text{si} \quad i \neq j \\ \dfrac{1}{n} \times \dfrac{i+1}{n+i} = \dfrac{j+1}{n(n+j)} & \text{si} \quad i = j \end{cases} \end{aligned}$$

   Cherchons la loi de X_2.
   Nous avons $X_2(\Omega) = [\![1,n]\!]$. Soit $j \in X_2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X_2=j]) &= \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} \\ &= \sum_{\begin{cases} i \in [\![1,n]\!] \\ i \neq j \end{cases}} p_{i,j} + p_{j,j} \\ &= \sum_{\begin{cases} i \in [\![1,n]\!] \\ i \neq j \end{cases}} \left(\frac{1}{n}\frac{1}{n+i}\right) + \frac{j+1}{n(n+j)} \\ &= \sum_{\begin{cases} i \in [\![1,n]\!] \\ i \neq j \end{cases}} \left(\frac{1}{n}\frac{1}{n+i}\right) + \frac{j}{n(n+j)} + \frac{1}{n(n+j)} \end{aligned}$$

   Conclusion :

$$\boxed{\forall j \in X_2(\Omega), \quad \mathbf{P}([X_2=j]) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n(n+i)} + \frac{j}{n(n+j)}}$$

   Vérifions pour terminer que

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}([X_2=j]) = 1$$

   Nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}([X_2=j]) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n(n+i)} + \frac{j}{n(n+j)}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n(n+i)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n(n+j)} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n(n+i)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{n+j-n}{n(n+j)} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n(n+i)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{n+j}{n(n+j)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n\,(n+i)}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n+i)}+1-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}\\
&= 1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+i}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}\\
&= 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n}\mathbf{P}\left([X_2=j]\right)=1}$$

8. (a) i. Nous avons $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ car lorsque Z couvre toutes les valeurs de $[\![0,n]\!]$, on couvre toutes celles de X.
   - Si $i>k$, $p_{i,k}=0$.
   - Si $i\leq k$:

$$\boxed{p_{i,k}=\mathbf{P}\left([Z=k]\right)\mathbf{P}_{[Z=k]}\left([X=i]\right)=\frac{1}{k+1}\mathbf{P}\left([Z=k]\right)}$$

ii. Tout d'abord $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et pour chaque $i\in X(\Omega)$:

$$\mathbf{P}\left([X=i]\right)=\sum_{k=1}^{n}p_{i,k}=0+\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k+1}\mathbf{P}\left([Z=k]\right)$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall i\in X(\Omega),\quad \mathbf{P}\left([X=i]\right)=\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k+1}\mathbf{P}\left([Z=k]\right)}$$

iii. Déduisons-en l'espérance de X en fonction de $\mathbf{E}(Z)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{i=0}^{n} i\mathbf{P}\left([X=i]\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} i\frac{1}{k+1}\mathbf{P}\left([Z=k]\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} i\frac{1}{k+1}\mathbf{P}\left([Z=k]\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\mathbf{P}\left([Z=k]\right)\sum_{i=0}^{k} i\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{k\,(k+1)}{2\,(k+1)}\mathbf{P}\left([Z=k]\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{2}\mathbf{P}\left([Z=k]\right)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(X)=\frac{1}{2}\mathbf{E}(Z)}$$

(b) Tout d'abord $X(\Omega)=(Z-X)(\Omega)=[\![0,n]\!]$. Pour terminer montrons que :

$$\forall j\in[\![0,n]\!],\quad \mathbf{P}\left([X=j]\right)=\mathbf{P}\left([Z-X=j]\right)$$

Nous avons pour chaque $j \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Z - X = j]) &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{i\in[\![0,n]\!]}([Z = j + i] \cap [X = i])\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\biguplus_{i=0}^{n-j}([Z = j + i] \cap [X = i])\right) \\
&\quad \text{car } j + i \in [\![0, n]\!] \text{ et } i \in [\![0, n]\!] \\
&= \sum_{i=0}^{n-j} \mathbf{P}([Z = i + j])\, \mathbf{P}_{[Z=i+j]}([X = i]) \\
&\quad \text{par } \sigma - \text{additivité de } \mathbf{P} \text{ et la FPC} \\
&= \sum_{i=0}^{n-j} \frac{1}{i + j + 1} \mathbf{P}([Z = i + j]) \\
&\quad \text{posons } k = j + i \\
&= \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{k + 1} \mathbf{P}([Z = k]) \\
&= \mathbf{P}([X = j])
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{L}(Z - X) = \mathcal{L}(X)}$$

9. (a) Soit m un entier naturel, rappelons $\mathbf{P}([X = m])$, $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X = m]) = \frac{e^{-a}a^m}{m!} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X) = a, \quad \mathbf{V}(X) = a}$$

(b) C'est le problème classique de **relativisation** qui nous met en présence d'un **shéma de Bernoulli**. Il est clair que :

$$\boxed{\mathbf{P}_{[X=n]}([Y = k]) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} & \text{si} \quad k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{si} \quad k > n \end{cases}}$$

(c) Tout d'abord $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour chaque $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y = j]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = n])\, \mathbf{P}_{[X=n]}([Y = j]) \\
&= 0 + \sum_{n=j}^{+\infty} \mathbf{P}([X = n])\, \mathbf{P}_{[X=n]}([Y = j]) \\
&= \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{e^{-a}a^n}{n!} \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j} \\
&= \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{e^{-a}a^n}{n!} \frac{n!}{j!\,(n - j)!} p^j (1 - p)^{n-j} \\
&= \frac{(pa)^j e^{-a}}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{a^{n-j} (1 - p)^{n-j}}{(n - j)!} \\
&= \frac{(pa)^j e^{-a}}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{(a(1 - p))^{n-j}}{(n - j)!} \\
&\quad \text{posons } k = n - j \\
&= \frac{(pa)^j e^{-a}}{j!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a(1 - p))^k}{k!}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(pa)^j e^{-a} e^{a(1-p)}}{j!}$$
$$= \frac{(pa)^j e^{-ap}}{j!}$$

Conclusion :

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{P}(ap) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(Y) = ap, \quad \mathbf{V}(Y) = ap}$$

(d) Comme Y et Z jouent des **rôles symétriques**, sans aucun calcul, juste en remplaçant p par $1-p$ et inversement, nous pouvons annoncer que :

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{P}(a(1-p))}$$

(e) Pour montrer que Y et Z sont indépendantes, montrons que :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([Y=j] \cap [Z=k]) = \mathbf{P}([Y=j])\,\mathbf{P}([Z=k])$$

Nous avons pour chaque couple $(j,k) \in \mathbb{N}^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y=j])\,\mathbf{P}([Z=k]) &= \frac{(pa)^j e^{-ap}}{j!} \times \frac{(qa)^k e^{-aq}}{k!} \\ &\quad \text{en posant } q = 1-p \\ &= \frac{e^{-a}(a)^{j+k} p^j q^k}{j!k!} \end{aligned} \tag{13}$$

*Nota bene : **remarquez bien que*** $Z + Y = X$ cela peut vous être utile ! Soit $(j,k) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y=j] \cap [Z=k]) &= \mathbf{P}([Y=j] \cap [X-Y=k]) \\ &= \mathbf{P}([Y=j] \cap [X=k+j]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{P}([X=k+j])\,\mathbf{P}_{[X=i+j]}([Y=j]) \\ &= \binom{k+j}{j} p^j q^k \frac{a^{k+j} e^{-a}}{(k+j)!} \\ &= \frac{(k+j)!}{k!j!} p^j q^k \frac{e^{-a}(a)^{j+k}}{(k+j)!} \\ &= \frac{e^{-a}(a)^{j+k} p^j q^k}{j!k!} \end{aligned} \tag{14}$$

Selon (13) et (14)

$$\boxed{Y \text{ et } Z \text{ sont indépendantes}}$$

10. (a) Il est clair que nous sommes en présence de **tirages bernoulliens indépendants** et donc :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent une loi } \mathcal{B}(n, 1/2)}$$

(b) Calculons $\mathbf{P}([X=Y])$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X=Y]) &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{k=0}^{n} ([X=Y] \cap [Y=k])\right) \\ &\quad \text{selon la FPt avec le SCE } ([Y=k])_{k \in [\![0,n]\!]} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(([X=Y] \cap [Y=k])) \\ &\quad \text{par } \sigma-\text{additivité de } \mathbf{P} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(([X=k] \cap [Y=k])) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}([X=k])\,\mathbf{P}([Y=k]) \\ &\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right)^{2} \\ &= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\right)^{2} \end{aligned}$$

Selon un célèbre violoniste français

$$\boxed{\mathbf{P}([X=Y])=\frac{1}{4^{n}}\binom{2n}{n}}$$

(c) Nous avons $Z(\Omega)=[\![-n,n]\!]$;

– Soit $k\geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Z=k]) &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{j=0}^{n}([X-Y=k]\cap[Y=j])\right) \\ &\quad \text{selon la FPT avec le SCE } ([Y=j])_{j\in[\![0,n]\!]} \\ &= \sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}\left(([X-Y=k]\cap[Y=j])\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad \text{par } \sigma - \text{additivité de } \mathbf{P} \\ &= \sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}\left(([X=k+j]\cap[Y=j])\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-k}\mathbf{P}\left(([X=k+j]\cap[Y=j])\right)+0 \\ &\quad \text{car } k+j \text{ et } j \text{ doivent appartenir à } [\![0,n]\!] \\ &= \sum_{j=0}^{n-k}\mathbf{P}([X=k+j])\,\mathbf{P}([Y=j]) \\ &\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= \sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k+j}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\ &= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{n-(k+j)}\binom{n}{j} \\ &= \frac{1}{4^{n}}\binom{2n}{n-k} \text{ toujours selon le même violoniste} \qquad (15) \end{aligned}$$

– Soit $k\leq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Z=k]) &= \mathbf{P}([Y-X=-k]) \text{ avec } -k\geq 0 \qquad (16) \\ &= \frac{1}{4^{n}}\binom{2n}{n+k} \\ &\quad \text{par symétrie : } -k \text{ jouant le rôle de } k \end{aligned}$$

Selon (15) et (16)

$$\boxed{\forall k\in[\![-n,n]\!],\quad \mathbf{P}([Z=k])=\frac{1}{4^{n}}\binom{2n}{n-|k|}}$$

(d) Calculons $\mathbf{P}([X<Y])$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X<Y]) &= \mathbf{P}([X-Y<0]) \\ &= \mathbf{P}([Z<0]) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=-n}^{-1} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n+k} \\
&\quad \text{posons } i = n+k \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{i}
\end{aligned}
$$

Faisons une halte dans le raisonnement pour calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{i}$. Il est existe deux méthodes :

– Méthode des "**sommes à trous**".
– Une autre très importante que nous avons déjà utilisé disant que :

$$\mathbf{P}([X<Y]) + \mathbf{P}([X>Y]) + \mathbf{P}([X=Y]) = 1$$

soit :

$$2\mathbf{P}([X<Y]) + \mathbf{P}([X=Y]) = 1$$

pour des raisons évidentes de **symétrie des rôles** joués par X et Y. D'où :

$$\mathbf{P}([X<Y]) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathbf{P}([X=Y])\right)$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([X<Y]) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\right)}$$

11. (a) Nous avons pour chaque entier naturel i non nul :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}([\min(X,Y)] \leq i) &= 1 - \mathbf{P}([\min(X,Y)] > i) \\
&= 1 - \mathbf{P}([X>i] \cap [Y>i]) \\
&= 1 - \mathbf{P}([X>i])\,\mathbf{P}([Y>i]) \\
&\quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= 1 - (1/2)^{2i}
\end{aligned}
$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([\min(X,Y)] \leq i) = 1 - (1/4)^i}$$

(b) Nous avons :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=Y]) &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{k=1}^{+\infty} ([X=Y] \cap [Y=k])\right) \\
&\quad \text{selon la "FPT" avec le "SCE" } ([Y=k])_{k\in\mathbb{N}^*} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(([X=Y] \cap [Y=k])) \\
&\quad \text{par } \sigma - \text{additivité de } \mathbf{P} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(([X=k] \cap [Y=k])) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X=k])\,\mathbf{P}([Y=k]) \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X=k])^2 \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-1/4}\right)$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([X=Y]) = \frac{1}{3}}$$

(c) Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y>X]) &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{k=1}^{+\infty}([Y>X]\cap[X=k])\right) \\
&\quad \text{selon la FPT avec le SCE } ([X=k])_{k\in\mathbf{N}^*} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}\left(([Y>X]\cap[X=k])\right) \\
&\quad \text{par } \sigma-\text{additivité de } \mathbf{P} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}\left(([Y>k]\cap[X=k])\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}([Y>k])\,\mathbf{P}([X=k]) \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\times\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k \\
&= \frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([Y>X]) = \frac{1}{3}}$$

(d) Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X \text{ divise } Y]) &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{k=1}^{+\infty}([Y=kX])\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}([Y=kX]) \\
&\quad \text{par } \sigma-\text{additivité de } \mathbf{P} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}\left(\biguplus_{i=1}^{+\infty}([Y=kX]\cap[X=i])\right) \\
&\quad \text{selon la FPT avec le SCE } ([X=i])_{i\in\mathbf{N}^*} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty}\mathbf{P}\left(([Y=kX]\cap[X=i])\right) \\
&\quad \text{par } \sigma-\text{additivité de } \mathbf{P} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty}\mathbf{P}([Y=ki])\,\mathbf{P}([X=i]) \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{ki}\times\left(\frac{1}{2}\right)^i \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^i}\right)^k\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^i} \frac{1}{2^i} \times \frac{1}{1 - 1/2^I} \right)$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([X \text{ divise } Y]) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{1}{2^i - 1}}$$

(e) Nous avons pour chaque entier k non nul :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{P}([X \geq kY]) & = & \mathbf{P}\left(\biguplus_{i=1}^{+\infty} ([X \geq kY] \cap [Y = i]) \right) \\
& & \text{selon la "FPT" avec le "SCE"} \ ([Y = i])_{i \in \mathbb{N}^*} \\
& = & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(([X \geq kY] \cap [Y = i])) \\
& & \text{par } \sigma - \text{additivité de } \mathbf{P} \\
& = & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(([X \geq ki] \cap [Y = i])) \\
& = & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X \geq ki]) \mathbf{P}([Y = i]) \\
& & \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
& = & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X > ki - 1]) \mathbf{P}([Y = i]) \\
& & \text{car } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi} \\
& = & \sum_{i=1}^{+\infty i} \left(\frac{1}{2} \right)^{ki-1} \left(\frac{1}{2} \right)^i \\
& = & 2 \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{k+1} \right)^i \\
& = & \frac{1}{2^k} \left(\frac{1}{1 - (1/2)^{k+1}} \right)
\end{array}$$

Conclusion :

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbf{P}([X \geq kY]) = \frac{2}{2^{k+1} - 1}$$

12. Nous avons $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{P}([Z = k]) & = & \mathbf{P}([Z \geq k]) - \mathbf{P}([Z > k]) \\
& = & \mathbf{P}([Z > k - 1]) - \mathbf{P}([Z > k]) \\
& & \text{la formule reste valable pour } k = 1 \\
& = & \mathbf{P}([X > k - 1] \cap [Y > k - 1]) - \mathbf{P}([X > k] \cap [Y > k]) \\
& = & \mathbf{P}([X > k - 1]) \mathbf{P}([Y > k - 1]) - \mathbf{P}([X > k]) \mathbf{P}([Y > k]) \\
& & \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
& = & (\lambda\mu)^{k-1} - (\lambda\mu)^k \\
& = & (\lambda\mu)^{k-1} (1 - \lambda\mu)
\end{array}$$

Conclusion :

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{G}(\lambda\mu)}$$

13. • Pour commencer déterminons la loi de Z.
► $Z(\Omega) = \{-1, 1\}$
► $\mathbf{P}([Z = -1]) = 1/2$ car :

$$\mathbf{P}([Z = -1]) = \mathbf{P}([X = -1]) \mathbf{P}([Y = 1]) + \mathbf{P}([X = 1]) \mathbf{P}([Y = -1]) = 1/2$$

▶ $\mathbf{P}([Z=1])=1/2$ car :

$$\mathbf{P}([Z=1])=\mathbf{P}([X=-1])\,\mathbf{P}([Y=-1])+\mathbf{P}([X=1])\,\mathbf{P}([Y=1])=1/2$$

• Etude de l'indépendance de X et Z.

▶ $\mathbf{P}([Z=-1]\cap[X=-1])=1/4$ car :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Z=-1]\cap[X=-1]) &= \mathbf{P}([XY=-1]\cap[X=-1])\\ &= \mathbf{P}([Y=1]\cap[X=-1])\\ &= \mathbf{P}([Y=1])\,\mathbf{P}([X=-1])\\ &= 1/4\end{aligned}$$

▶ $\mathbf{P}([Z=-1]\cap[X=1])=1/4$ car :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Z=-1]\cap[X=1]) &= \mathbf{P}([XY=-1]\cap[X=1])\\ &= \mathbf{P}([Y=-1]\cap[X=1])\\ &= \mathbf{P}([Y=-1])\,\mathbf{P}([X=1])\\ &\quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y\\ &= 1/4\end{aligned}$$

▶De même $\mathbf{P}([Z=1]\cap[X=-1])=1/4$ car :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Z=1]\cap[X=-1]) &= \mathbf{P}([XY=1]\cap[X=-1])\\ &= \mathbf{P}([Y=-1]\cap[X=-1])\\ &= \mathbf{P}([Y=-1])\,\mathbf{P}([X=-1])\end{aligned}$$

▶Enfin $\mathbf{P}([Z=1]\cap[X=1])=1/4$ car :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Z=1]\cap[X=1]) &= \mathbf{P}([XY=1]\cap[X=1])\\ &= \mathbf{P}([Y=1]\cap[X=1])\\ &= \mathbf{P}([Y=1])\,\mathbf{P}([X=1])\end{aligned}$$

Ces quatre résultats montrent bien que X et Z sont indépendantes.

– L'indépendance de Y et Z est réalisé clairement par **symétrie des rôles** joués par les variables X et Y.

– Indépendance de X,Y et Z.
Nous avons $\mathbf{P}([Z=-1]\cap[X=1]\cap[Y=1])=0$ alors que $\mathbf{P}([Z=-1])\,\mathbf{P}([X=1])\,\mathbf{P}([Y=1])\neq 0$ ce qui montre que X,Y,Z ne sont pas mutuellement indépendantes.
Conclusion :

$$\boxed{X,Y,Z \text{ sont indépendantes deux à deux, mais elles ne sont pas mutuellement indépendantes}}$$

14. (a) Nous avons $(X+Y)(\Omega)=\mathbb{N}_2$ et pour chaque $k\in\mathbb{N}_2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X+Y=k]) &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{i=1}^{+\infty}([X+Y=k]\cap[X=i])\right)\\ &\quad \text{selon la “FPT” avec le “SCE” } ([X=i])_{i\in\mathbb{N}^*}\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbf{P}(([X+Y=k]\cap[X=i]))\\ &\quad \text{par } \sigma-\text{additivité de } \mathbf{P}\\ &= \sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{P}(([Y=k-i]\cap[X=i]))\\ &= \sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{P}([X=i])\,\mathbf{P}([Y=k-i])\\ &\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont } \textbf{indépendantes}\\ &= \sum_{i=1}^{k-1}pq^{i-1}pq^{k-i-1}\\ &\quad \text{en posant } q=1-p\\ &= \sum_{i=1}^{k-1}p^2q^{k-2}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}_2, \quad \mathbf{P}([X+Y=k]) = (k-1)\, p^2 q^{k-2}}$$

(b) Nous avons $(\max(X,Y))(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Nous noterons $M = \max(X,Y)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([M=k]) &= \mathbf{P}([M \leq k]) - \mathbf{P}([M \leq k-1]) \\
&\quad \text{valable pour } k=1 \text{ car } \mathbf{P}([M \leq 0]) = 0 \\
&= \mathbf{P}([X \leq k] \cap [Y \leq k]) - \mathbf{P}([X \leq k-1] \cap [Y \leq k-1]) \\
&= \mathbf{P}([X \leq k])\,\mathbf{P}([Y \leq k]) - \mathbf{P}([X \leq k-1])\,\mathbf{P}([Y \leq k-1]) \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= (1 - \mathbf{P}([X > k]))^2 - (1 - \mathbf{P}([X > k-1]))^2 \\
&\quad \text{car } \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y) \\
&= \left(1 - q^k\right)^2 - \left(1 - q^{k-1}\right)^2 \\
&= \left(1 - q^k - 1 + q^{k-1}\right)\left(1 - q^k + 1 - q^{k-1}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([M=k]) = pq^{k-1}\left(2 - q^k - q^{k-1}\right)}$$

(c) Nous avons $\min(X,Y)(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Nous noterons $I = \min(X,Y)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([I=k]) &= \mathbf{P}([I \geq k]) - \mathbf{P}([I > k]) \\
&= \mathbf{P}([I > k-1]) - \mathbf{P}([I > k]) \\
&\quad \text{la formule reste valable pour } k=1 \\
&= \mathbf{P}([X > k-1] \cap [Y > k-1]) - \mathbf{P}([X > k] \cap [Y > k]) \\
&= \mathbf{P}([X > k-1])\,\mathbf{P}([Y > k-1]) - \mathbf{P}([X > k])\,\mathbf{P}([Y > k]) \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \left(pq^{k-1}\right)^2 - \left(pq^k\right)^2 \\
&= p^2 q^{2k-2} - p^2 q^{2k}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([I=k]) = p^3\left(q^2\right)^{k-1}(1+q)}$$

15. (a) D'après le cours, **la stabilité de la loi binomiale pour la somme de variables indépendantes** nous permet de dire que :

$$\boxed{X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m, p)}$$

(b) Déterminons la loi conditionnelle de X sachant que $[S=s]$ où $s \in [\![0, n+m]\!]$. Soit $i \in [\![0, s]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{[S=s]}([X=i]) &= \frac{\mathbf{P}([X=i] \cap [S=s])}{\mathbf{P}([S=s])} \\
&= \frac{\mathbf{P}([X=i] \cap [X+Y=s])}{\mathbf{P}([S=s])} \\
&= \frac{\mathbf{P}([X=i] \cap [Y=s-i])}{\mathbf{P}([S=s])} \\
&= \frac{\mathbf{P}([X=i])\,\mathbf{P}([Y=s-i])}{\mathbf{P}([S=s])} \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \frac{\binom{n}{i} p^i q^{n-i} \times \binom{m}{s-i} p^{s-i} q^{m-s+i}}{\binom{n+m}{s} p^s q^{n+m-s}} \\
&\quad \text{en posant } q = 1-p \\
&= \frac{\dbinom{n}{i}\dbinom{m}{s-i}}{\dbinom{n+m}{s}}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } X \text{ sachant que } [S=s] \text{ où } s \in [\![0, n+m]\!] \text{ est la loi } \mathcal{H}(n+m, s, p)}$$

(c) Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=Y]) &= \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \mathbf{P}([X=k])\,\mathbf{P}([Y=k]) \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \binom{n}{k}\binom{m}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+m} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n+m}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{m}{k} = \dfrac{1}{2^{n+m}}\binom{n+m}{n} & \text{si } \min(n,m)=n \\ \dfrac{1}{2^{n+m}} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{m}{m-k} = \dfrac{1}{2^{n+m}}\binom{n+m}{n} & \text{si } \min(n,m)=m \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([X=Y]) = \frac{1}{2^{n+m}}\binom{n+m}{n}}$$

d'où :

$$\boxed{\mathbf{P}([X\neq Y]) = 1 - \mathbf{P}([X=Y]) = 1 - \frac{1}{2^{n+m}}\binom{n+m}{n}}$$

16. (a) Nous avons $S(\Omega) = \mathbb{N}_2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_2$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([S=k]) &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{i=1}^{+\infty}([S=k]\cap[X=i])\right) \\
&\quad \text{selon la FPT avec le SCE } ([X=i])_{i\in\mathbb{N}^*} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(([S=k]\cap[X=i])) \\
&\quad \text{par } \sigma-\text{additivité de } \mathbf{P} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(([X+Y=k]\cap[X=i])) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}(([Y=k-i]\cap[X=i])) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}([X=i])\,\mathbf{P}([Y=k-i]) \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} pq^{i-1}pq^{k-i-1} \\
&\quad \text{en posant } q = 1-p \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} p^2q^{k-2}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}_2, \quad \mathbf{P}([S=k]) = (k-1)\,p^2q^{k-2}}$$

Comme X et Y admettent chacune une espérance et une variance, alors S admet aussi une espérance et une variance en tant que somme de telles variables, et par **linéarité de l'espérance** :

$$\boxed{\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) = \frac{2}{p}}$$

et par **indépendance** des variables X et Y :

$$\boxed{\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) = \frac{2q}{p^2}}$$

(b) Calcul de $\mathbf{P}([S \leq Z])$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([S \leq Z]) &= \mathbf{P}\left(\biguplus_{k=1}^{+\infty}([S \leq k] \cap [Z = k])\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([S \leq k])\,\mathbf{P}([Z = k]) \\
& \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \mathbf{P}([S > k]))\,\mathbf{P}([Z = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \sum_{i=k+1}^{+\infty} (i-1)\,p^2 q^{i-2}\right) q^{k-1}p \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - p^2 \sum_{i=k+1}^{+\infty} (i-1)\,q^{i-2}\right) q^{k-1}p \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} (j+k)\,q^{j+k-1}\right) q^{k-1}p \\
& \text{en posant } j = i - k - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - p^2 q^{k-1}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} jq^j + k\sum_{j=0}^{+\infty} q^j\right)\right) q^{k-1}p \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - p^2 q^{k-1}\left(q\sum_{j=1}^{+\infty} jq^{j-1} + k\sum_{j=0}^{+\infty} q^j\right)\right) q^{k-1}p \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - p^2 q^{k-1}\left(q\frac{1}{(1-q)^2} + k\frac{1}{1-q}\right)\right) q^{k-1}p \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - q^k - kpq^{k-1}\right) q^{k-1}p \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p - p\sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-1} - p^2\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{2k-2} \\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} - \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^k - p^2\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(q^2\right)^{k-1} \\
&= \frac{p}{1-q} - \frac{p}{q}\frac{q^2}{1-q^2} - \frac{p^2}{(1-q^2)^2} \\
&= 1 - \frac{q}{1+q} - \frac{1}{(1+q)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([S \leq Z]) = \frac{q}{(1+q)^2}}$$

Remarque : vous constaterez qu'il était bien plus simple et rapide de calculer la somme $\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}([S = k] \cap [Z \geq k])$!

– Calcul de $\mathbf{P}([S \geq Z])$

L'ensemble $\{[S < Z], [S = Z], [S > Z]\}$ constitue un système complet d'événements donc :

$$\mathbf{P}([S < Z]) + \mathbf{P}([S = Z]) + \mathbf{P}([S > Z]) = 1$$

soit :

$$\mathbf{P}([S = Z]) = \mathbf{P}\left(\biguplus_{k=2}^{+\infty}([S = Z] \cap [S = k])\right)$$

$$\begin{aligned}
& \text{selon la FPT avec le SCE } ([S=k])_{i\in\mathbb{N}_2} \\
= & \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}\left(([S=Z]\cap[S=k])\right) \\
& \text{par } \sigma - \text{additivité de } \mathbf{P} \\
= & \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}\left([S=k]\cap[Z=k]\right) \\
= & \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}\left([S=k]\right)\mathbf{P}\left([Z=k]\right)
\end{aligned}$$

car S et Z sont deux variables **indépendantes** du fait que X, Y, Z le sont (**lemme des coalitions**). D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left([S=Z]\right) &= \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)\,p^2 q^{k-2} q^{k-1} p \\
&= \left(\frac{p}{q}\right)^3 \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)\left(q^2\right)^k \\
&= q^4\left(\frac{p}{q}\right)^3 \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)\left(q^2\right)^{k-2} \\
&= qp^3 \sum_{i=1}^{+\infty} i\left(q^2\right)^{i-1} \\
& \quad \text{en posant } i = k-1 \\
&= \frac{qp^3}{\left(1-q^2\right)^2} \\
&= \frac{qp}{\left(1+q\right)^2}
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left([S>Z]\right) &= 1-\mathbf{P}\left([S\le Z]\right) \\
&= \frac{q^2+q+1}{\left(q+1\right)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left([S\ge Z]\right) &= \mathbf{P}\left([S=Z]\right)+\mathbf{P}\left([S>Z]\right) \\
&= \frac{qp}{\left(1+q\right)^2}+\frac{q^2+q+1}{\left(q+1\right)^2}
\end{aligned}$$

et :

$$\boxed{\mathbf{P}\left([S\ge Z]\right) = \frac{2q+1}{\left(q+1\right)^2}}$$

17. (a) Comme X et Y admettent chacune une espérance, alors Z en admet une aussi égale à :

$$\boxed{\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y) = p\lambda}$$

par indépendance de X et Y.

(b) Nous avons $Z(\Omega) = \{(i,j) \mid i\in\{0,1\}\,;\ j\in\mathbb{N}\}$. et :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left([Z=0]\right) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left([X=0]\cap[Y=j]\right)+\mathbf{P}\left([X=1]\cap[Y=0]\right) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left([X=0]\right)\mathbf{P}\left([Y=j]\right)+\mathbf{P}\left([X=1]\right)\mathbf{P}\left([Y=0]\right) \\
& \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= q\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left([Y=j]\right)+pe^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([Z=0]) = q + pe^{-\lambda}}$$

Maintenant pour tout entier naturel k non nul :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Z=k]) &= \mathbf{P}([Z=k]\cap[X=1]) + \mathbf{P}([Z=k]\cap[X=0]) \\
&= \mathbf{P}([XY=k]\cap[X=1]) + \mathbf{P}([XY=k]\cap[X=0]) \\
&= \mathbf{P}([XY=k]\cap[X=1]) + 0 \\
&= \mathbf{P}([X=1]\cap[Y=k]) \\
&= \mathbf{P}([X=1])\,\mathbf{P}([Y=k]) \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([Z=k]) = p\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
& (Z \text{ admet une espérance}) \\
\iff & \left(\sum_{k\geq 1} kp\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \text{ est convergente (SATP)}\right) \\
\iff & \left(\sum_{k\geq 1} \lambda pe^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}, \text{ est convergente}\right)
\end{aligned}$$

Comme nous sommes en présence d'une série proportionnelle à une série exponentielle, Z admet donc une espérance égale à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda pe^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda pe^{-\lambda}e^{\lambda} \\
&= \lambda p
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
& (Z \text{ admet une variance}) \\
\iff & (Z(Z-1) \text{ admet une espérance}) \\
\iff & \left(\sum_{k\geq 2} k(k-1)\frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \text{ est convergente (SAPT)}\right) \\
\iff & \left(\sum_{k\geq 2} \lambda^2 pe^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}, \text{ est convergente}\right)
\end{aligned}$$

Comme nous sommes en présence d'une série proportionnelle à une série exponentielle, Z admet donc une variance donnée par la **formule de Huygens-Koenig**, soit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(Z) &= \mathbf{E}(Z(Z-1)) + \mathbf{E}(Z) - (\mathbf{E}(Z))^2 \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \lambda^2 pe^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda p - (\lambda p)^2 \\
&= \lambda^2 pe^{-\lambda}e^{\lambda} + \lambda p - (\lambda p)^2
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{V}(Z) = \lambda p(\lambda - p\lambda + 1)}$$

Notez aussi que nous aurions pu écrire que $\mathbf{E}(Z^2) = \mathbf{E}(X^2Y^2) = \mathbf{E}(X^2)\,\mathbf{E}(Y^2)$ par indépendance de X et Y.

18. (a) Par confort construisons un tableau des valeurs possibles de U et V.

$Y \longrightarrow$ $X \downarrow$	0	1
0	$U=0$ $V=0$	$U=1$ $V=-1$
1	$U=1$ $V=1$	$U=2$ $V=0$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}([U=0]\cap[V=0]) = \mathbf{P}([X=0]\cap[Y=0]) = \mathbf{P}([X=0])\,\mathbf{P}([Y=0]) = \boxed{q^2}\\
&\mathbf{P}([U=1]\cap[V=-1]) = \mathbf{P}([X=0]\cap[Y=1]) = \mathbf{P}([X=0])\,\mathbf{P}([Y=1]) = \boxed{pq}\\
&\mathbf{P}([U=1]\cap[V=1]) = \mathbf{P}([X=1]\cap[Y=0]) = \mathbf{P}([X=1])\,\mathbf{P}([Y=0]) = \boxed{pq}\\
&\mathbf{P}([U=2]\cap[V=0]) = \mathbf{P}([X=1]\cap[Y=1]) = \mathbf{P}([X=1])\,\mathbf{P}([Y=1]) = \boxed{p^2}
\end{aligned}$$

(b) Nous avons :

k	0	1	2
$\mathbf{P}([U=k])$	q^2	$2pq$	p^2

et

k	-1	0	1
$\mathbf{P}([V=k])$	qp	p^2+q^2	qp

et $\text{Cov}(U,V) = \mathbf{E}(UV) - \mathbf{E}(U)\,\mathbf{E}(V)$ avec :
- $\mathbf{E}(UV) = -pq + pq = 0$,
- $\mathbf{E}(U) = 2pq + 2p^2 = 2p$,
- $\mathbf{E}(V) = 0$,
- $\mathbf{E}(U)\,\mathbf{E}(V) = 0$

Conclusion :

$$\boxed{\rho_{U,V} = 0}$$

(c) Nous avons $\mathbf{P}([U=0]\cap[V=1]) = 0$ alors que $\mathbf{P}([U=0])\,\mathbf{P}([V=1]) \neq 0$.
Ce contre-exemple montre deux choses :
- les deux variables U et V sont dépendantes ;
- il montre aussi que la réciproque de l'implication

$$(U, V \text{ indépendantes}) \Longrightarrow (\text{Cov}(U,V) = 0) \text{ EST FAUSSE}$$

19. Nous avons $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Z=0]) &= \mathbf{P}([Z=0]\cap[X>Y]) + \mathbf{P}([Z=0]\cap[X\leq Y])\\
&= 0 + \mathbf{P}([Z=0]\cap[X\leq Y])\\
&= \mathbf{P}([X\leq Y])\,\mathbf{P}_{[X\leq Y]}([Z=0])\\
&\ \text{par la FPC}\\
&= \mathbf{P}([X\leq Y]) \times 1\\
&= \mathbf{P}\left(\biguplus_{k\in Y(\Omega)} ([X\leq Y]\cap[Y=k])\right)\\
&= \sum_{k\in Y(\Omega)} \mathbf{P}(([X\leq Y]\cap[Y=k]))\\
&\ \text{selon la FPT avec le SCE } ([Y=k])_{k\in Y(\Omega)}\\
&= \sum_{k\in Y(\Omega)} \mathbf{P}([X\leq k]\cap[Y=k])\\
&= \sum_{k\in Y(\Omega)} \mathbf{P}([X\leq k])\,\mathbf{P}([Y=k])\\
&\ \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}\\
&= \sum_{k\in Y(\Omega)} (1-\mathbf{P}([X>k]))\,\mathbf{P}([Y=k])\\
&= \sum_{k\in Y(\Omega)} \left(1-(1-a)^k\right)\mathbf{P}([Y=k])\\
&= \sum_{k\in Y(\Omega)} \mathbf{P}([Y=k]) - \sum_{k\in Y(\Omega)} (1-a)^k\,\mathbf{P}([Y=k])
\end{aligned}$$

Par le **théorème de transfert**

$$\boxed{\mathbf{P}([Z=0]) = 1 - \mathbf{E}\left((1-a)^Y\right)}$$

Enfin pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Z=k]) &= \mathbf{P}([Z=k]\cap[X>Y]) + \mathbf{P}([Z=k]\cap[X\leq Y]) \\
&\quad \text{par la FPT} \\
&= \mathbf{P}([Z=k]\cap[X>Y]) + 0 \\
&= \mathbf{P}([X-Y=k]\cap[X-Y>0]) \\
&= \mathbf{P}([X-Y=k]) \text{ car } [X-Y=k]\subset[X-Y>0] \\
&= \sum_{i\in Y(\Omega)} \mathbf{P}([X=k+i]\cap[Y=i]) \\
&= \sum_{i\in Y(\Omega)} \mathbf{P}([X=k+i])\,\mathbf{P}([Y=i]) \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{i\in Y(\Omega)} a(1-a)^{k+i-1}\,\mathbf{P}([Y=i]) \\
&= a(1-a)^{k-1}\sum_{i\in Y(\Omega)} (1-a)^i\,\mathbf{P}([Y=i])
\end{aligned}$$

Par le **théorème de transfert**

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbf{P}([Z=k]) = a(1-a)^{k-1}\,\mathbf{E}\left((1-a)^Y\right)}$$

Vérification :

$$1-\mathbf{E}\left((1-a)^Y\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} a(1-a)^{k-1}\,\mathbf{E}\left((1-a)^Y\right) = 1-\mathbf{E}\left((1-a)^Y\right) + \frac{a\mathbf{E}\left((1-a)^Y\right)}{1-(1-a)} = 1 \text{ ouf!}$$

20. (a) Nous avons $(U,V)(\Omega) = \left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \mid i\leq j\right\}$.
   – Si $i=j$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([U=i]\cap[V=j]) &= \mathbf{P}([X=i])\,\mathbf{P}([Y=i]) \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= (\mathbf{P}([X=i]))^2 \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi} \\
&= \left(q^{i-1}p\right)^2
\end{aligned}$$

   et :

$$\boxed{\forall i\in\mathbb{N}\quad \mathbf{P}([U=i]\cap[V=i]) = q^{2i-2}p^2}$$

   – Si $i<j$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([U=i]\cap[V=j]) &= \mathbf{P}([X=i])\,\mathbf{P}([Y=j]) + \mathbf{P}([X=j])\,\mathbf{P}([Y=i]) \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= 2\mathbf{P}([X=i])\,\mathbf{P}([Y=j]) \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi} \\
&= 2q^{i-1}pq^{j-1}p
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2 \mid i<j,\quad \mathbf{P}([U=i]\cap[V=j]) = 2q^{i+j-2}p^2}$$

   – Si $i>j$:

$$\boxed{\mathbf{P}([U=i]\cap[V=j]) = 0}$$

   (b) Déterminons les lois marginales.

– **Déterminons la loi de U.**
Tout d'abord $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([U=i]) &= 0 + \sum_{j=i}^{+\infty} \mathbf{P}([U=i]\cap[V=j]) \\
&= \mathbf{P}([U=i]\cap[V=i]) + \sum_{j=i}^{+\infty} \mathbf{P}([U=i]\cap[V=j]) \\
&= q^{2i-2}p^2 + \sum_{j=i}^{+\infty} 2q^{i+j-2}p^2 \\
&= q^{2i-2}p^2 + 2q^{i-2}p^2 \sum_{j=i+1}^{+\infty} q^j \\
&= q^{2i-2}p^2 + 2q^{i-2}p^2 \frac{q^{i+1}}{1-q} \\
&= q^{2i-2}p^2 + 2q^{2i-1}p \\
&= q^{2i-2}p(p+2q) \\
&= \left(q^2\right)^{i-1} p(1+q) \\
&\quad \text{avec } q^2 + p(1+q) = 1
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{G}(p(1+q))}$$

– **Déterminons la loi de V.**
Tout d'abord $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([V=j]) &= \sum_{i=1}^{j} \mathbf{P}([U=i]\cap[V=j]) + 0 \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{P}([U=i]\cap[V=j]) + \mathbf{P}([U=j]\cap[V=j]) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} 2q^{i+j-2}p^2 + q^{2j-2}p^2 \\
&= 2q^{j-2}p^2 \sum_{i=1}^{j-1} q^i + q^{2j-2}p^2 \\
&= 2q^{j-2}p^2 q\left(\frac{1-q^{j-1}}{1-q}\right) + q^{2j-2}p^2 \\
&= 2q^{j-2}pq\left(1-q^{j-1}\right) + q^{2j-2}p^2
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([V=j]) = \frac{p}{q^2}\left(2q^{j+1} - 2q^{2j} + pq^{2j}\right)}$$

(c) Retenez que :

$$\boxed{\heartsuit} \quad U + V = X + Y$$

donc

$$\mathcal{L}(U+V) = \mathcal{L}(X+Y)$$

et comme nous l'avons vu dans l'exercice **16**. Rapidement en sautant quelques étapes, soit $k \in (X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X+Y=k]) &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}([X=i])\,\mathbf{P}([Y=k-i]) \\
&\quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} pq^{i-1}pq^{k-i-1} \\
&\quad \text{en posant } q = 1-p \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} p^2q^{k-2}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}_2, \quad \mathbf{P}([X+Y=k]) = (k-1)\,p^2 q^{k-2}}$$

21. Tout d'abord notons que :

$$(A \text{ et } B \text{ indépendants}) \Longleftrightarrow \begin{cases} \overline{A} \text{ et } B & \text{indépendants} \\ A \text{ et } \overline{B} & \text{indépendants} \\ \overline{A} \text{ et } \overline{B} & \text{indépendants} \end{cases} \tag{17}$$

Tout d'abord nous savons que X et Y indépendantes implique que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Montrons maintenant que lorsque X et Y sont **bernoulliennes** la réciproque est vraie. Nous avons, en notant que XY reste **bernoullienne** :

$$(\mathrm{Cov}(X,Y) = 0) \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y))$$

autrement dit :

$$(\mathrm{Cov}(X,Y) = 0) \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{P}([X=1]\cap[Y=1]) = \mathbf{P}([X=1])\,\mathbf{P}([Y=1]))$$

et en utilisant l'équivalence, comme une réaction en chaîne qui se déclencherait, nous avons "le grand chelem" des égalités :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X=1]\cap[Y=0]) &= \mathbf{P}([X=1])\,\mathbf{P}([Y=0]) \\ \mathbf{P}([X=0]\cap[Y=1]) &= \mathbf{P}([X=0])\,\mathbf{P}([Y=1]) \\ \mathbf{P}([X=0]\cap[Y=0]) &= \mathbf{P}([X=0])\,\mathbf{P}([Y=0]) \end{aligned}$$

Comme X et Y sont **bernoulliennes** (binaires) alors nous pouvons dire qu'elles sont **indépendantes** et la réciproque est démontrée, ce qui entraîne l'équivalence.

22. (a) Il vient clairement :

$$\boxed{\rho(X,X) = 1}$$

et :

$$\begin{aligned} \rho(X,-X) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,-X)}{\mathbf{V}(X)} \\ &= \frac{-\mathrm{Cov}(X,X)}{\mathbf{V}(X)} \\ &= \frac{-\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X)} \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\rho(X,-X) = -1}$$

(b) Pour tout $(a,c,b,d) \in (\mathbb{R}^*)^2 \times \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \rho(aX+b, cX+d) &= \frac{ac \times \mathrm{Cov}(X,X)}{\sqrt{a^2\mathbf{V}(X)\,c^2\mathbf{V}(X)}} \\ &= \frac{ac \times \mathrm{Cov}(X,X)}{|ac|\,\mathbf{V}(X)} \\ &= \frac{ac}{|ac|} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\rho(aX+b, cX+d) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad a \text{ et } c \text{ sont de signes différents} \\ 1 & \text{si} \quad a \text{ et } c \text{ sont de même signe} \end{cases}}$$

23. (a) Par le calcul, on trouve :

$X \diagdown Y$	1	2	3	4	$\mathcal{L}(X) \downarrow$
1	0.08	0.04	0.16	0.12	0.4
2	0.04	0.02	0.08	0.06	0.2
3	0.08	0.04	0.16	0.12	0.4
$\underrightarrow{\mathcal{L}(Y)}$	0.2	0.1	0.4	0.3	**1**

(b) Nous constatons que :

$$\forall (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad p_{i,j} = p_{i\bullet} \times p_{\bullet j}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{Les variables } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}$$

(c) Il résulte de l'indépendance que :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = 0}$$

(d) Les variables étant indépendantes,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La loi conditionnelle de } X \text{ sachant que } Y = 2 \text{ est la loi de } X \text{ et la loi conditionnelle}\\ \text{de } Y \text{ sachant que } X \in \{1,3\} \text{ est la loi de } Y.\end{array}}$$

(e) Etant donné que X et Y sont indépendantes, on a :

$$\mathbf{E}(Y \mid X) = \mathbf{E}(Y) = (1 \times 0.2) + (2 \times 0.1) + (3 \times 0.4) + (4 \times 0.3) = 2.8$$

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } \mathbf{E}(Y \mid X) \text{ est la variable certaine égale à } 2.8}$$

(f) Il résulte de la question précédente que :

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{E}(Y \mid X)) = \mathbf{E}(Y) = 2.8}$$

24. (a) Nous avons :

$X \diagdown Y$	1	2	3	4	$\mathcal{L}(X) \downarrow$
1	0	0	0	0.3	0.3
2	0.2	0	0	0	0.2
3	0	0	0.1	0	0.1
4	0.3	0.1	0	0	0.4
$\underset{\longrightarrow}{\mathcal{L}(Y)}$	0.5	0.1	0.1	0.3	**1**

(b) Nous avons :

$$\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1]) = 0 \neq \mathbf{P}([X=1])\,\mathbf{P}([Y=1])$$

$$\boxed{\text{Les variables } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

(c) Par théorème nous avons :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)$$

qui existe puisque toutes les variables en jeu sont finies. D'après les lois marginales de X et Y nous avons après calculs élémentaires :

$$\mathbf{E}(X) = 2.6 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(Y) = 2.2$$

et en utilisant le tableau de contingence de la loi conjointe du couple (X,Y) on obtient :

$$\mathbf{E}(XY) = (4 \times 0.3) + (2 \times 0.2) + (9 \times 0.1) + (4 \times 0.3) + (8 \times 0.1) = 4.5$$

D'où :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = 4.5 - 2.6 \times 2.2 = -1.22}$$

(d) Pour la loi de X sachant que $Y = 2$ avec $\mathbf{P}([Y=2]) \neq 0$, on a $\mathbf{P}_{[Y=2]}([X=4]) = 1$ et $\mathbf{P}_{[Y=2]}([X=k]) = 0$ si $k \in [\![1,3]\!]$. En remarquant que :

$$\mathbf{P}_{[X\in\{1,4\}]}([Y=k]) = \frac{\mathbf{P}([Y=k] \cap [X=1]) + \mathbf{P}([Y=k] \cap [X=3])}{\mathbf{P}([X \in \{1,4\}])}$$

On obtient la loi de Y sachant que $X \in \{1,4\}$ avec $\mathbf{P}([X \in \{1,4\}]) \neq 0$:

k	1	2	3	4
$\mathbf{P}_{[X\in\{1,4\}]}([Y=k])$	3/7	1/7	0	3/7

(e) Nous avons :

$$\mathbf{E}_{[Y=1]}(X) = (2\times 0.4) + (4\times 0.6) = 3.2$$
$$\mathbf{E}_{[Y=2]}(X) = 4$$
$$\mathbf{E}_{[Y=3]}(X) = 3$$
$$\mathbf{E}_{[Y=4]}(X) = 1$$

D'après la définition de $\mathbf{E}(X \mid Y)$, il résulte que :

x	1	3	3.2	4
$\mathbf{P}([\mathbf{E}(X \mid Y) = x])$	0.3	0.1	0.5	0.1

car :

$$\mathbf{P}([Y=4]) = 0.3, \quad \mathbf{P}([Y=3]) = 0.1, \quad \mathbf{P}([Y=1]) = 0.5, \quad \mathbf{P}([Y=2]) = 0.1$$

Explications : nous avons vu d'après le cours que $\mathbf{E}(X \mid Y) = \varphi(Y)$ où :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \varphi(y) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}_{[Y=y]}([X=x])$$

et l'on fait parcourir à y l'ensemble $Y(\Omega)$. Ainsi tour à tour x vaut $\mathbf{E}(X \mid [Y=1])$, $\mathbf{E}(X \mid [Y=2])$, $\mathbf{E}(X \mid [Y=3])$ et $\mathbf{E}(X \mid [Y=4])$ donnent les différentes valeurs de la variable aléatoire $\mathbf{E}(X \mid Y)$, elles sont notées x dans le tableau ci-dessus, la probabilité de ces différentes valeurs étant respectivement $\mathbf{P}([Y=1])$, $\mathbf{P}([Y=2])$, $\mathbf{P}([Y=3])$, $\mathbf{P}([Y=4])$.

(f) La **formule de l'espérance totale** nous donne le résultat bien connu qui est :

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \mid Y)) = \mathbf{E}(X)}$$

ce qui est parfaitement confirmé par le calcul :

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \mid Y)) = 0.3 + 0.3 + 1.6 + 0.4 = 2.6 = \mathbf{E}(X)$$

25. (a) On nous demande de chercher la première loi marginale du couple (X,Y) ce qui se fait en utilisant la **formule des probabilités totales**. Nous avons $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et pour chaque x de $X(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=x]) &= \sum_{y=0}^{n-x} \binom{n}{x}\binom{n-x}{y} p^x q^y (1-p-q)^{n-x-y} \\
&= \binom{n}{x} p^x \sum_{y=0}^{n-x} \binom{n-x}{y} q^y (1-p-q)^{n-x-y} \\
&= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&\quad \text{par la formule du binôme de Newton}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)}$$

(b) • **Loi conditionnelle de Y sachant que $[X=x]$.**
Soit $y \in [\![0, n-x]\!]$,

$$\mathbf{P}_{[X=x]}([Y=y]) = \frac{\binom{n}{x}\binom{n-x}{y} p^x q^y (1-p-q)^{n-x-y}}{\underbrace{\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}_{\neq 0}} = \binom{n-x}{y}\left(\frac{q}{1-p}\right)^y \left(\frac{1-p-q}{1-p}\right)^{n-x-y}$$

avec :

$$\frac{q}{1-p} + \frac{1-p-q}{1-p} = 1$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } Y \text{ sachant que } [X=x] \text{ est la loi binomiale } \mathcal{B}\left(n-x, \frac{q}{1-p}\right)}$$

– **Loi conditionnelle de X sachant que $[Y = y]$.**
Comme :
$$\binom{n}{x}\binom{n-x}{y} = \binom{n}{y}\binom{n-y}{x}$$
après calculs, comme fait en classe, nous obtenons le résultat demandé en inversant les rôles de p et q d'une part et de x et y de l'autre, ce qui donne :

$$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } X \text{ sachant que } [Y = y] \text{ est la loi binomiale } \mathcal{B}\left(n-y, \frac{p}{1-q}\right)}$$

(c) D'après le cours :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(Y \mid [X = x]\right) = \frac{(n-x)\,q}{1-p} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\left(X \mid [Y = y]\right) = \frac{(n-y)\,p}{1-q}}$$

(d) Toujours d'après le cours :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(Y \mid X\right) = \frac{(n-X)\,q}{1-p} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\left(X \mid Y\right) = \frac{(n-Y)\,p}{1-q}}$$

26. (a) Nous avons :
– **Loi du couple (X_2, Z)**
Nous avons :
$$(X_2, Z)(\Omega) = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \leq j\right\}$$
Et pour tout $(i,j) \in (X_2, Z)(\Omega)$:
$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left([X_2 = i] \cap [Z = j]\right) &= \mathbf{P}\left([X_2 = i] \cap [X_1 + X_2 = j]\right) \\
&= \mathbf{P}\left([X_2 = i] \cap [X_1 = j - i]\right) \\
&= \mathbf{P}\left([X_2 = i]\right)\mathbf{P}\left([X_1 = j - i]\right) \\
&\quad \text{par indépendance des variables} \\
&= \frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^i}{i!} \times \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^{j-i}}{(j-i)!}
\end{aligned}$$
Finalement :

$$\boxed{\forall (i,j) \in (X_2, Z)(\Omega), \quad \mathbf{P}\left([X_2 = i] \cap [Z = j]\right) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda_1^{j-i}\lambda_2^i}{i!\,(j-i)!}}$$

– **Loi conditionnelle de X_2 sachant que $[Z = z]$.**
Nous avons pour chaque $i \in [\![0, z]\!]$,
$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{[Z=z]}\left([X_2 = i]\right) &= \frac{\mathbf{P}\left([X_2 = i] \cap [Z = z]\right)}{\mathbf{P}\left([Z = z]\right)} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda_1^{z-i}\lambda_2^i}{i!\,(z-i)!} \times \frac{z!}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\left(\lambda_1+\lambda_2\right)^z} \\
&= \binom{z}{i}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{z-i}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^i \\
&\quad \text{avec } \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = 1
\end{aligned}$$
Conclusion :

$$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } X_2 \text{ sachant que } [Z = z] \text{ est la loi } \mathcal{B}\left(z, \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)}$$

(b) D'après le cours :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(X_2 \mid [Z=z]\right) = \frac{\lambda_2 z}{\lambda_1+\lambda_2} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\left(X_2 \mid Z\right) = \frac{\lambda_2 Z}{\lambda_1+\lambda_2}}$$

27. D'après le cours $\mathbf{E}\left(aY_1+bY_2 \mid X\right)$ est la variable aléatoire $\varphi\left(X\right)$ où φ est la fonction définie par :

$$\forall x \in X\left(\Omega\right), \quad \varphi\left(x\right) = \sum_{(y_1,y_2)\in Y_1(\Omega)\times Y_2(\Omega)} \left(ay_1+by_2\right) \mathbf{P}_{[X=x]}\left([Y_1=y_1]\cap[Y_2=y_2]\right)$$

Nous avons pour tout $x \in X\left(\Omega\right)$:

$$\begin{aligned}
\varphi\left(x\right) &= \sum_{(y_1,y_2)\in Y_1(\Omega)\times Y_2(\Omega)} \left(ay_1+by_2\right) \mathbf{P}_{[X=x]}\left([Y_1=y_1]\cap[Y_2=y_2]\right) \\
&= \sum_{(y_1,y_2)\in Y_1(\Omega)\times Y_2(\Omega)} ay_1 \mathbf{P}_{[X=x]}\left([Y_1=y_1]\cap[Y_2=y_2]\right) \\
&\qquad + \sum_{(y_1,y_2)\in Y_1(\Omega)\times Y_2(\Omega)} by_2 \mathbf{P}_{[X=x]}\left([Y_1=y_1]\cap[Y_2=y_2]\right) \\
&= \sum_{y_1\in Y_1(\Omega)} ay_1 \mathbf{P}_{[X=x]}\left([Y_1=y_1]\right) + \sum_{y_2\in Y_2(\Omega)} by_2 \mathbf{P}_{[X=x]}\left([Y_2=y_2]\right) \\
&= a\mathbf{E}\left(Y_1 \mid [X=x]\right) + b\mathbf{E}\left(Y_2 \mid [X=x]\right)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(aY_1+bY_2 \mid X\right) = a\mathbf{E}\left(Y_1 \mid X\right) + b\mathbf{E}\left(Y_2 \mid X\right)}$$

28. Cette exercice a fait l'objet d'une démonstration dans le cours que je vous engage vivement à revoir.

29. Pour montrer que :

$$\forall a>0, \quad \forall x>0, \quad \mathbf{P}\left([S_n \geq a]\right) \leq e^{-xa}\mathbf{E}\left(e^{xS_n}\right)$$

montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall a>0, \quad \forall x>0, \quad \mathbf{1}_{[S_n\geq a]} \leq e^{x(S_n-a)} \tag{18}$$

– Si l'événement $[S_n \geq a]$ est réalisé alors $\mathbf{1}_{[S_n\geq a]} = 1$. D'autre part l'événement $S_n - a \geq 0$ est réalisé si et seulement si $e^{x(S_n-a)} \geq 1$ car exp est une **bijection croissante** sur $\mathbb{R}$ d'où :

$$e^{x(S_n-a)} \geq \mathbf{1}_{[S_n\geq a]}$$

et l'inégalité (18) est vérifiée.

– Si l'événement $[S_n \geq a]$ n'est pas réalisé alors $\mathbf{1}_{[S_n\geq a]} = 0$ et nous avons bien $e^{x(S_n-a)} \geq 0$ par positivité de la fonction exp et (18) est encore vérifiée.
Dans les deux cas (18) est vérifiée, la **croissance de l'espérance** permettant d'écrire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall a>0, \quad \forall x>0, \quad \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{[S_n\geq a]}\right) \leq \mathbf{E}\left(e^{x(S_n-a)}\right)$$

autrement dit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall a>0, \quad \forall x>0, \quad \mathbf{P}\left([S_n \geq a]\right) \leq e^{-xa}\mathbf{E}\left(e^{xS_n}\right)$$

30. (a) Signalons pour commencer que S_n et V_n admettent chacune une espérance et une variance car elles sont définies en fonction de variables X_i et Y_i admettant chacune espérance et variance.

– $\boxed{\mathbf{E}\left(S_n\right) = np}$ car $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n,p\right)$ du fait qu'elle est la somme de n variables bernoulliennes indépendantes et de même paramètre p.

– $\boxed{\mathbf{V}\left(S_n\right) = npq}$

– Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}\left(V_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p^2$$

d'où :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(V_n\right) = np^2}$$

– Par théorème :

$$\mathbf{V}(V_n) = \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(Y_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$$

– Si $j > i+1$,

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathrm{Cov}(X_iX_{i+1}, X_jX_{j+1}) = 0$$

car les variables sont **indépendantes**.

– Si $j = i+1$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) &= \mathbf{E}(Y_iY_{i+1}) - \mathbf{E}(Y_i)\mathbf{E}(Y_{i+1}) \\
&= \mathbf{P}([Y_i = 1] \cap [Y_{i+1} = 1]) - p^4 \\
&= \mathbf{P}([X_iX_{i+1} = 1] \cap [X_{i+1}X_{i+2} = 1]) - p^4 \\
&= \mathbf{P}[X_i = 1 \cap X_{i+1} = 1 \cap X_{i+2} = 1] - p^4 \\
&= \mathbf{P}[X_i = 1]\mathbf{P}[X_{i+1} = 1]\mathbf{P}[X_{i+2} = 1] - p^4 \\
&= p^3 - p^4
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(V_n) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(Y_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) \\
&= np^2\left(1-p^2\right) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(p^3 - p^4\right) \\
&= np^2\left(1-p^2\right) + 2\binom{n}{2}\left(p^3 - p^4\right) \\
&= np^2\left(1-p^2\right) + n(n-1)\left(p^3 - p^4\right)
\end{aligned}$$

en regroupant :

$$\boxed{\mathbf{V}(V_n) = p^2 n(1-p)(np+1)}$$

(b) Calculons $\mathrm{Cov}(S_n, V_n)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(S_n, V_n) &= \mathbf{E}(S_nV_n) - \mathbf{E}(S_n)\mathbf{E}(V_n) \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{n} Y_j\right) - n^2p^3 \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_iX_jX_{j+1}\right) - n^2p^3 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(X_iX_jX_{j+1}) - n^2p^3
\end{aligned}$$

– Si $i = j$, $\mathbf{E}(X_iX_jX_{j+1}) = \mathbf{E}\left(X_i^2X_{i+1}\right) = p \times p = p^2$.
– Si $j = i-1$, $\mathbf{E}(X_iX_jX_{j+1}) = \mathbf{E}\left(X_i^2X_{i-1}\right) = p \times p = p^2$.
– Si $j \neq i-1$ et $j \neq i$, $\mathbf{E}(X_iX_jX_{j+1}) = p^3$.
– $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=2}^{n} a_{i,i-1} + \sum_{\left\{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j, i\neq j+1}\right.} a_{i,j}$.

Conclusion :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(S_n, V_n) &= \sum_{i=1}^{n} p^2 + \sum_{i=2}^{n} p^2 + \sum_{\left\{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j, i\neq j+1}\right.} p^3 - n^2p^3 \\
&= np^2 + (n-1)p^2 + \left(n^2 - (n+n-1)\right)p^3 - n^2p^3
\end{aligned}$$

après simplifications :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(S_n, V_n) = p^2(1-2n)(p-1)}$$

✠✠✠✠✠

16 Variables à densité

1. (a) Montrons que f est une densité.
   - f est positive sur $\mathbb{R}$;
   - f est continue sur au moins $\mathbb{R} - \{-1, 0, \pi/2\}$ la justification est simple à faire;
   - L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge car f coïncide avec la fonction nulle sur $]-\infty, -1[$ et sur $]\pi/2, +\infty[$.

     Enfin $\displaystyle\int_{-1}^{0} f$ et $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} f$ convergent en tant qu'intégrales de fonctions continues sur un segment, et comme :
     $$\int_{-1}^{0} (x+1)\,dx = \left[x + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}$$
     et
     $$\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2}\cos x dx = \left[\frac{1}{2}\sin x\right]_{0}^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$
     alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut par **Chasles** :
     $$\int_{-\infty}^{-1} f + \int_{-1}^{0} f + \int_{0}^{\pi/2} f + \int_{\pi/2}^{+\infty} f = 1$$
     Conclusion :
     $$\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité}}$$

   (b) Soit F_X la fonction de répartition de X définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$
   Nous avons :
   $$\begin{aligned} F_X(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f = \int_{-\infty}^{-1} f + \int_{-1}^{x} f & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f = \int_{-\infty}^{-1} f + \int_{-1}^{0} f + \int_{0}^{x} f & \text{si} \quad x \in]0, \pi/2] \\ 1 & \text{si} \quad x > \pi/2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ \displaystyle\int_{-1}^{x} (t+1)\,dt & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ \displaystyle\int_{-1}^{0} (t+1)\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}\cos t dt & \text{si} \quad x \in]0, \pi/2] \\ 1 & \text{si} \quad x > \pi/2 \end{cases} \end{aligned}$$
   Conclusion :
   $$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x \in [-1, 0] \\ \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x \in]0, \pi/2] \\ 1 & \text{si} \quad x > \pi/2 \end{cases}}$$

(c) La variable aléatoire X admet une espérance lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ est convergente. Comme les intégrales $\displaystyle\int_{-1}^{0} x(x+1)\,dx$ et $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{2}x\cos x dx$ et en dehors du segment $[-1,\pi/2]$, et f coïncide avec la fonction nulle alors il vient que la variable X admet une espérance égale à :

$$\mathbf{E}(X)=\int_{-1}^{0} x(x+1)\,dx+\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{2}x\cos x\ dx$$

Par une intégration par parties sur la deuxième intégrale :

$$\int_{0}^{\pi/2} x\cos x\ dx=[x\sin x]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx$$

en posant $u(x)=x$ alors $\dfrac{du}{dx}=1$ et $\dfrac{dv}{dx}=\cos x$ si $v(x)=\sin x$ avec $(u,v)\in\mathcal{C}^1([0,\pi/2])^2$.
Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(X)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}}$$

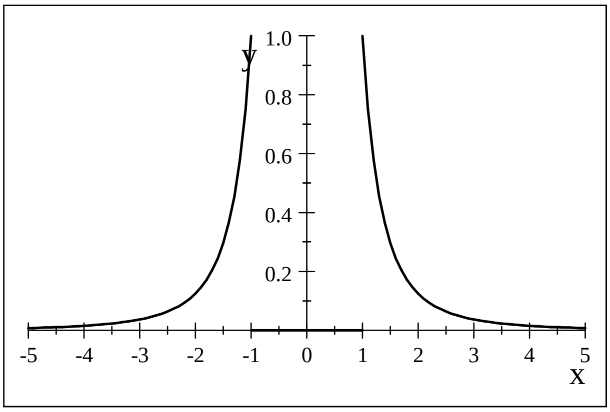
2. (a) Nous avons :

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^3} & \text{si}\quad x<-1\\ \dfrac{1}{x^3} & \text{si}\quad x>1\\ 0 & \text{si}\quad |x|\le 1\end{cases}$$

La fonction f est paire car pour tout réel x, $-x$ est un réel et $f(-x)=f(x)$ (on parle de distribution bilatérale). Nous étudierons donc f simplement sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+-\{1\}$ avec pour tout réel $x\in\,]1,+\infty[$, $f'(x)=-\dfrac{3}{x^4}<0$. Ainsi le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$ donne :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		0	$0 \parallel -3$	$-$	
$f(x)$	0	$\longrightarrow$	$0 \mid 1$	$\searrow$	0

Ce qui donne la représentation graphique suivante :

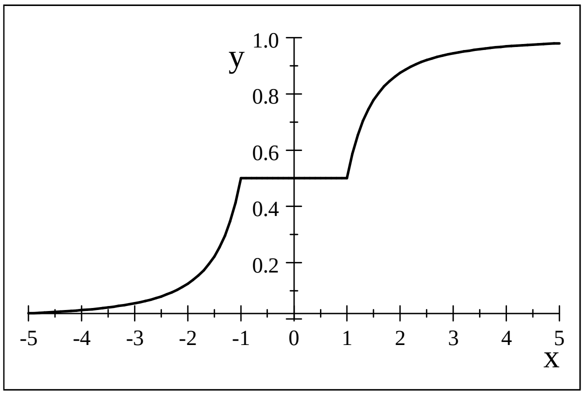


(b) Nous avons :

$$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x}-\frac{dt}{t^3} & \text{si}\quad x<-1\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{-1}-\frac{dt}{t^3}+\int_{-1}^{x}0dt & \text{si}\quad -1\le x\le 1\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{-1}-\frac{dt}{t^3}+\int_{-1}^{1}0dt+\int_{1}^{x}\frac{dt}{t^3} & \text{si}\quad x>1\end{cases}$$

Conclusion :

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}}$$



(c) Nous avons :

– Pour $|x| > 1$, $xf(x) = \dfrac{1}{x^2}$, fonction admettant une intégrale convergente au voisinage de l'infini en tant qu'**intégrale de Riemann** de paramètre $2 > 1$.
En conclusion l'espérance de X existe et on a alors sans calcul par imparité de l'intégrande :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = 0}$$

– En revanche, pour $|x| > 1$, $x^2 f(x) = \dfrac{1}{x}$, donc l'intégrale de définition du moment d'ordre deux de X diverge en tant qu'**intégrale de Riemann** de paramètre 1, ainsi :

$$\boxed{\text{La variable } X \text{ n'a pas de moment d'ordre deux et } \textit{a fortiori} \text{ pas de moment d'ordre supérieur}}$$

3. (a) Intégrons φ par parties en posant $u(t) = t$ alors $\dfrac{du}{dt} = 1$ et $\dfrac{dv}{dt} = f(t)$ si $v(t) = F(t) - 1$ avec $(u, v) \in \mathcal{C}^1([0, x])^2$. Soit $x \in \mathbb{R}$ ainsi :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= [t(F(t) - 1)]_0^x - \int_0^x (F(t) - 1)\, dt \\ &= x(F(x) - 1) + \int_0^x (1 - F(t))\, dt \\ &= x(\mathbf{P}([X \leq x]) - 1) + \int_0^x (1 - F(t))\, dt \\ &= x(1 - \mathbf{P}([X > x]) - 1) + \int_0^x (1 - F(t))\, dt \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = \int_0^x (1 - F(t))\, dt - x\mathbf{P}([X > x])}$$

(b) i. Tout d'abord φ représente l'unique primitive de $t \longmapsto tf(t)$ sur $\mathbb{R}_+$ s'annulant en 0, et à ce titre φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec :

$$\forall x \geq 0, \quad \varphi'(x) = xf(x) \geq 0$$

ce qui équivaut à dire que :

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+}$$

D'autre part comme :

$$\forall x \geq 0, \quad x\mathbf{P}\left([X > x]\right) \geq 0$$

alors :

$$\forall x \geq 0, \quad \varphi(x) \leq \int_0^x (1 - F(t))\, dt \leq \int_0^{+\infty} (1 - F(t))\, dt$$

puisque cette dernière intégrale converge. Par transitivité de la relation d'ordre $\leq$:

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad \varphi(x) \leq \int_0^{+\infty} (1 - F(t))\, dt}$$

Enfin comme φ est une fonction à valeurs positives croissante et majorée, elle admet une limite finie en $+\infty$ ce qui assure la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x tf(t)\, dt$. Comme enfin $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ (du seul fait que $f_{\boldsymbol{X}} \neq 0$ sur $\mathbb{R}_+$) alors nous pouvons conclure que :

$$\boxed{\text{La variable } X \text{ admet une espérance}}$$

ii. Nous avons pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq x\mathbf{P}([X > x])$ trivialement et :

$$\begin{aligned} x\mathbf{P}([X > x]) &= x\int_x^{+\infty} f(t)\, dt \\ &= \int_x^{+\infty} xf(t)\, dt \\ &\leq \int_x^{+\infty} tf(t)\, dt \end{aligned}$$

car en observant les bornes d'intégration nous pouvons dire que $t \geq x$. En conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq x\mathbf{P}([X > x]) \leq \int_x^{+\infty} tf(t)\, dt}$$

iii. D'après les inégalités précédentes :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq x\mathbf{P}([X > x]) \leq \int_x^{+\infty} tf(t)\, dt$$

avec par **Chasles** :

$$\int_x^{+\infty} tf(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\, dt - \int_{-\infty}^{x} tf(t)\, dt$$

Comme :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} tf(t)\, dt = \mathbf{E}(X)$$

la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} tf(t)\, dt$ existe et vaut par somme des limites

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} tf(t)\, dt = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X) = 0$$

Ainsi par le **théorème d'encadrement** :

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathbf{P}([X > x]) = 0$$

et par un passage à la limite quand x tend vers $+\infty$ nous obtenons que :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) &= \mathbf{E}(X) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \int_0^x (1 - F(t))\, dt - \lim_{x\to+\infty} x\mathbf{P}([X > x]) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \int_0^x (1 - F(t))\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - F(t))\, dt \end{aligned}$$

puisque cette dernière intégrale converge.

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t))\, dt = \int_0^{+\infty} (1 - 1 + \mathbf{P}([X > t]))\, dt$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}([X > t])\, dt}$$

4. (a) Notons φ l'application définie sur $[-1, 2]$ par $\varphi(t) = t^2$. Pour déterminer la nature de $Y = \varphi(X)$ introduisons F_Y la fonction de répartition de Y (en supposant que ce soit une variable aléatoire) définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

Nous avons $Y(\Omega) \subset [0, 4]$ et donc :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \mathbf{P}([-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}]) & \text{si} \quad x \in [0,4] \\ 1 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) & \text{si} \quad x \in [0,4] \\ 1 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

en notant F_X la fonction de répartition de X. A ce niveau-là rappelons que :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{x+1}{3} & \text{si} \quad x \in [-1,2] \\ 1 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

avec $\sqrt{x} \in [0, 2]$ quand $x \in [0, 4]$ et $-\sqrt{x} \in [-2, 0]$ quand $x \in [0, 4]$. Donc :

– $F_X(\sqrt{x}) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{3}$ quand $x \in [0, 4]$ donc $\sqrt{x} \in [0, 2]$;
– $F_X(-\sqrt{x}) = \dfrac{-\sqrt{x}+1}{3}$ quand $x \in [0, 1]$ car $-\sqrt{x} \in [-1, 0]$;
– $F_X(-\sqrt{x}) = 0$ quand $x \in [1, 4]$ car $-\sqrt{x} \in [-2, -1]$.
Ainsi :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}+1}{3} - \dfrac{1-\sqrt{x}}{3} & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ \dfrac{\sqrt{x}+1}{3} - 0 & \text{si} \quad x \in [1,4] \\ 1 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{2\sqrt{x}}{3} & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ \dfrac{\sqrt{x}+1}{3} & \text{si} \quad x \in \,]1,4] \\ 1 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

Vérifions que :
– F_Y est continue sur $]-\infty, 0[$ (F_Y y coïncide avec la fonction nulle), sur $[0, 1]$ (fonction racine carrée) sur $]1, 4]$ (somme et quotient à dénominateur non nul) et enfin sur $]4, +\infty[$. Enfin :

$$\lim_{0^-} F_Y = \lim_{0^+} F_Y = F_Y(0) = 0, \lim_{1^-} F_Y = \lim_{1^+} F_Y = F_Y(1) = 2/3$$

et :

$$\lim_{4^-} F_Y = \lim_{4^+} F_Y = F_Y(4) = 1$$

Finalement F_Y est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$;
– La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur au moins $\mathbb{R}^* - \{1, 4\}$ (à détailler selon les théorème généraux, sachant que la fonction racine carrée est de classe $\mathcal{C}^1$ uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$).
Conclusion **:** les deux vérifications permettent de dire que F_Y a les propriétés recquises pour dire que Y reste une variable à densité dont une densité f_Y sera obtenue par dérivation de F_Y là où elle existe sans oublier de poser :

$$f_Y(0) = f_Y(1) = f_Y(4) = 0$$

(c'est purement arbitraire comme vous le savez !) et nous pouvons donc écrire que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ \dfrac{1}{6\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in]1,4[\\ 0 & \text{si} \quad x \notin]0,1[\cup]1,4[\end{cases} = \frac{1}{3\sqrt{x}}\mathbf{1}_{]0,1[}(x) + \frac{1}{6\sqrt{x}}\mathbf{1}_{]1,4[}(x)}$$

(b) Comme X suit une loi uniforme elle admet un moment d'ordre deux ce qui nous permet de dire très rapidement que :

$$\boxed{\text{La variable } Y \text{ admet une espérance}}$$

puisque $Y = X^2$ avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y) &= \mathbf{E}\left(X^2\right) \\ &= \mathbf{V}(X) + (\mathbf{E}(X))^2 \\ &\quad \text{selon la formule de Koenig inversée} \\ &= \frac{9}{12} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = 1}$$

5. Rappelons qu'en notant f_X une densité de X, celle-ci est définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [1,2] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [1,2] \end{cases}$$

Déterminons une densité de probabilité et la fonction de répartition de la variable $Y = \exp\left(X^2 - 1\right)$. Notons φ l'application définie sur $[1,2]$ par $\varphi(t) = \exp\left(t^2 - 1\right)$. Au passage notez que La fonction φ n'étant pas monotone sur le segment $[1,2]$ **nous ne pouvons pas conclure** que Y reste une variable à densité (constat pas franchement au programme mais utile !). Pour cela déterminons F_Y la fonction de répartition associée à Y, celle-ci est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}(Y \leq x)$$

Nous avons :

$$\varphi([1,2]) = \left[1, e^3\right] \supset Y(\Omega)$$

et :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \mathbf{P}\left(\left[\exp\left(X^2-1\right) \leq x\right]\right) & \text{si} \quad x \in \left[1, e^3\right] \\ 1 & \text{si} \quad x > e^3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \mathbf{P}\left(\left[X^2 \leq 1 + \ln x\right]\right) & \text{si} \quad x \in \left[1, e^3\right] \\ 1 & \text{si} \quad x > e^3 \end{cases} \\ &\quad \text{car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \mathbf{P}\left(\left[-\sqrt{1+\ln x} \leq X \leq \sqrt{1+\ln x}\right]\right) & \text{si} \quad x \in \left[1, e^3\right] \\ 1 & \text{si} \quad x > e^3 \end{cases} \\ &\quad \text{car } \sqrt{\ } \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ F_X\left(\sqrt{1+\ln x}\right) - F_X\left(-\sqrt{1+\ln x}\right) & \text{si} \quad x \in \left[1, e^3\right] \\ 1 & \text{si} \quad x > e^3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{où } F_X \text{ la fonction de répartition de } X$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \sqrt{1+\ln x} - 1 & \text{si} \quad x \in \left[1, e^3\right] \\ 1 & \text{si} \quad x > e^3 \end{cases}$$

A ce niveau vous devez vérifier les fameux deux points prioritaires (classes $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$) permettant de dire que F_Y a les propriétés recquises pour affirmer que Y reste une variable à densité. Je pense que cela ne vous posera aucun problème à démontrer, en prenant la rédaction type de l'**exercice 4**.

Par dérivation de F_Y qui est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{1, e^3\right\}$[23] nous obtenons une densité de Y que nous noterons f_Y sans oublier de poser, par exemple, que :

$$f_Y(1) = f_Y\left(e^3\right) = 0$$

Nous avons donc pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= \begin{cases} \dfrac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}(\underbrace{f_X\left(\sqrt{1+\ln x}\right)}_{=1} - \underbrace{f_X\left(-\sqrt{1+\ln x}\right)}_{=0} & \text{si} \quad x \in \left]1, e^3\right[\\ 0 & \text{si} \quad x \notin \left]1, e^3\right[\end{cases} \\ &= \frac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}} \mathbf{1}_{]1,e^3[}(x) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln ex}} & \text{si} \quad x \in \left]1, e^3\right[\\ 0 & \text{si} \quad x \notin \left]1, e^3\right[\end{cases}}$$

6. (a) Rappelons qu'en notant f_X une densité de X, celle-ci est définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Notons F_Z la fonction de répartition associée à Z, celle-ci est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \mathbf{P}(Z \leq x)$$

Nous avons :

$$\varphi\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R} \supset Y(\Omega)$$

et pour chaque réel x :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}([-\ln X \leq x]) \\ &= \mathbf{P}([\ln X > -x]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([\ln X \leq -x]) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\left[X \leq e^{-x}\right]\right) \\ &= 1 - F_X\left(e^{-x}\right) \\ &= 1 - \left(1 - \exp\left(-e^{-x}\right)\right) \\ &= \exp\left(-e^{-x}\right) \end{aligned}$$

A ce niveau vous devez vérifier les fameux deux points (classes $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$) ici c'est extrêmement facile à voir, permettant de dire que F_Y a les propriétés recquises pour affirmer que Z reste une variable à densité. Je pense que cela ne vous posera aucun problème, en prenant la rédaction type de l'**exercice 4**.

Par dérivation de F_Z qui est dérivable sur $\mathbb{R}$[24] nous obtenons une densité de Z que nous noterons f_Z. Nous avons donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = e^{-x} \exp\left(-e^{-x}\right)$$

[23] Sans aucun problème, mais c'est à détailler le jour J.
[24] Sans aucun problème, mais c'est à détailler le jour J.

(b) i. Nous avons $Y_n(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$ et en notant F_{Y_n} sa fonction de répartition nous avons :

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \mathbf{P}([Y_n > x]) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k > x]\right) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X_k > x]) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \\
& \quad \text{car les v.a. } X_k \text{ sont indépendantes} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - F_{X_k}(x)) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - (1 - e^{-x})) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \prod_{k=1}^{n} (e^{-x}) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-nx} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Votre culture vous permet de constater que :

$$\boxed{\text{La variable } Y_n \text{ est une variable à densité suivant la } \varepsilon(n)\text{, d'espérance } 1/n \text{ et de variance } 1/n^2}$$

Il est donc inutine de se "taper" les deux points essentiels!!!

ii. Nous avons $Z_n(\Omega) \subset [-\ln n, +\infty[$ et en notant F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n nous avons :

$$\begin{aligned}
F_{Z_n}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \mathbf{P}([Z_n \leq x]) & \text{si} \quad x \geq -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \mathbf{P}\left(\left[\max_{1 \leq k \leq n}(X_k) - \ln n \leq x\right]\right) & \text{si} \quad x \geq -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \mathbf{P}\left(\left[\max_{1 \leq k \leq n}(X_k) \leq x + \ln n\right]\right) & \text{si} \quad x \geq -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leq x + \ln n]\right) & \text{si} \quad x \geq -\ln n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X_k \leq x + \ln n]) & \text{si} \quad x \geq -\ln n \end{cases} \\
& \quad \text{car les v.a. } X_k \text{ sont indépendantes} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x + \ln n) & \text{si} \quad x \geq -\ln n \end{cases}
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \prod_{k=1}^{n} \left(1 - e^{-(x+\ln n)}\right) & \text{si} \quad x \geq -\ln n \end{cases}$$

$$\boxed{F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln n \\ \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si} \quad x \geq -\ln n \end{cases}}$$

7. (a) Tout d'abord $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, ce qui fait que :

$$\boxed{Y \text{ est une variable discrète}}$$

Déterminons alors, pour tout entier k, $\mathbf{P}([Y = k])$ comme dans le "bon vieux temps du discret". Pour cela revenons à la définition de la partie entière d'un réel[25] qui permet d'écrire que pour chaque entier naturel n :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y = k]) &= \mathbf{P}([\lfloor X \rfloor = k]) \\ &= \mathbf{P}([k \leq X < k+1]) \\ &= \int_k^{k+1} f_X(t)\, dt \\ &\quad \text{où } f_X \text{ est une densité de } X \\ &= \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \left[-e^{-\lambda t}\right]_k^{k+1} \\ &= e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} \\ &= e^{-k\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right) \\ &= \left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(\frac{1}{e^{\lambda}}\right)^k \end{aligned}$$

Comme :

$$\left(1 - e^{-\lambda}\right) + \left(\frac{1}{e^{\lambda}}\right) = \frac{1}{e^{\lambda}} - e^{-\lambda} + 1 = 1$$

nous pouvons conclure que :

$$\boxed{\lfloor X \rfloor + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(e^{-\lambda}\right)}$$

et d'après le cours :

$$\boxed{\mathbf{E}(\lfloor X \rfloor) = \frac{1}{e^{-\lambda}} - 1 = \frac{1 - e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}}}$$

(b) Déterminons la loi de $Z = X - \lfloor X \rfloor$ et calculons $\mathbf{E}(Z)$.

– Il est à noter pour votre culture générale que Z représente la partie décimale de X, mais nous ne pouvons pas encore dire que c'est une variable à densité. Tout d'abord selon la définition de X et $\lfloor X \rfloor$ nous avons pour tout $\omega \in \Omega$, $(X - \lfloor X \rfloor)(\omega) \in [0, 1[$, donc $Z(\Omega) \subset [0, 1[$.
  Le seul moyen de vous en sortir est de vous servir de la **formule des probabilités totales** en introduisant le système complet d'événements $([\lfloor X \rfloor = k])_{k \in \mathbb{N}}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \mathbf{P}([Z \leq x]) & \text{si} \quad x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \mathbf{P}\left(\biguplus_{k=0}^{+\infty} ([Z \leq x] \cap [\lfloor X \rfloor = k])\right) & \text{si} \quad x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

[25] $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

$$= \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left([Z \leq x] \cap [\lfloor X \rfloor = k]\right) & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{array}\right.$$

par $\sigma-$ additivité de $\mathbf{P}$

$$= \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left([X - \lfloor X \rfloor \leq x] \cap [\lfloor X \rfloor = k]\right) & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left([X \leq x+k] \cap [k \leq X < k+1]\right) & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left([k \leq X \leq x+k]\right) & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{array}\right.$$

car $x+k < x+1$

$$= \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \int_k^{x+k} \lambda e^{-\lambda t} dt & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left[-e^{-\lambda t}\right]_k^{x+k} & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-k\lambda} - e^{-\lambda(x+k)}\right) & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{-k\lambda} \left(1 - e^{-\lambda x}\right) & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{-k\lambda} & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{array}\right.$$

(somme d'une série géo. de raison $e^{-\lambda x}$, $\left|e^{-\lambda x}\right| < 1$)

$$= \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{array}\right.$$

Il est très facile de vérifier[26] que F_Z possède toutes les propriétés d'une fonction de répartiton d'une variable à densité. Par dérivation de F_Z qui est dérivable sur $\mathbb{R}^* - \{1\}$[27] nous obtenons une densité de Z que nous noterons f_Z sans oublier de poser, par exemple, que :

$$f_Z(0) = f_Z(1) = 0$$

Nous avons donc :

$$\boxed{f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-x\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ 0 & \text{si} \quad x \notin]0,1[\end{cases}}$$

– **Espérance de Z.**
Comme Z est à support fini (du fait que f_Z est nulle sur $]-\infty, 0]$ et sur $[1, +\infty[$) la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\lambda x e^{-x\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} dx$ ne pose aucun problème et en intégrant par parties avec la règle "$\overrightarrow{LPET}$", nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z) &= \int_0^1 \frac{\lambda x e^{-x\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} dx \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \int_0^1 \lambda x e^{-x\lambda} dx \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \left(\left[-x e^{-x\lambda} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x\lambda} dx \right) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \left(-e^{-\lambda} + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-x\lambda} \right]_0^1 \right) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \left(-e^{-\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(Z) = \frac{1 - \lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda}}{\lambda (1 - e^{-\lambda})}}$$

8. Tout d'abord notons (hors programme) que l'application $t \longmapsto e^{-\alpha X^2}$ ne réalisant pas une bijection sur $\mathbb{R}$, **nous ne pouvons pas conclure** que Y reste une variable à densité. Bien que le texte dise bien que Y est une variable aléatoire effectuons la démonstration tout de même pour nous entraîner en faisant l'étude classique :

   – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\varphi(X) \leq x\} \in \mathcal{A}$, car $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ et :
     – si $x \leq 0$, $\{\varphi(X) \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{A}$;
     – si $x \in \mathbb{R}_+^*$, la condition $\varphi(X) \leq x$ équivaut à la condition $X \geq \sqrt{-\dfrac{\ln x}{\alpha}}$ ou $X \leq -\sqrt{-\dfrac{\ln x}{\alpha}}$ donc :

   $$(\varphi(X))^{-1}(]-\infty, x]) = \underbrace{X^{-1}\left(\left[\sqrt{-\frac{\ln x}{\alpha}}, +\infty \right[\right)}_{\in \mathcal{A} \text{ (admis)}} \cup \underbrace{X^{-1}\left(\left] -\infty, -\sqrt{-\frac{\ln x}{\alpha}} \right] \right)}_{\in \mathcal{A} \text{ (admis)}} \in \mathcal{A}$$

   car X est une variable aléatoire. Tout cela nous montre que $\varphi(X)$ est une variable aléatoire.

   Au passage notez bien que le programme stipule que pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, l'image-réciproque de ce dernier par toute application X (variable aléatoire) est un événement de $\mathcal{A}$.

   – Introduisons F_Y la fonction de répartition de $Y = \varphi(X)$ avec $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$ définie par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

[26] Ce que je vous laisse faire !
[27] Sans aucun problème, mais c'est à détailler le jour J.

Si $x \geq 1$,

$$\mathbf{P}\left(\left[-\alpha X^2 \leq \ln x\right]\right) = 1$$

car $\ln x \geq 0$ et $-\alpha X^2 < 0$, donc :

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \mathbf{P}\left(\left[X^2 \geq -\dfrac{\ln x}{\alpha}\right]\right) & \text{si} \quad x \in \left]0,1\right[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \mathbf{P}\left(\left[X^2 < -\dfrac{\ln x}{\alpha}\right]\right) & \text{si} \quad x \in \left]0,1\right[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \mathbf{P}\left(\left[-\sqrt{-\dfrac{\ln x}{\alpha}} < X < \sqrt{-\dfrac{\ln x}{\alpha}}\right]\right) & \text{si} \quad x \in \left]0,1\right[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \left(F_X\left(\sqrt{-\dfrac{\ln x}{\alpha}}\right) - F_X\left(-\sqrt{-\dfrac{\ln x}{\alpha}}\right)\right) & \text{si} \quad x \in \left]0,1\right[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Il est facile de constater que F_Y est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ puisque :

- La fonction F_Y est nulle sur $\mathbb{R}_-$, constante égale à 1 sur $[1,+\infty[$ donc continue à chaque fois et sur $]0,1[$ en tant que fonction composée de fonctions continue ($x \longmapsto -\dfrac{\ln x}{\alpha}$ est continue sur $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \longmapsto \pm\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$; enfin F_X est continue sur $\mathbb{R}$). Enfin $\lim\limits_{0^-} F_Y = \lim\limits_{0^+} F_Y = F_Y(0) = 0$ ($\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$) et $\lim\limits_{1^-} F_Y = \lim\limits_{1^+} F_Y = F_Y(1) = 1$ ($\lim\limits_{0} F_X = 1/2$).
- La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$ sauf éventuellement en 0, l'explication est du même type qu'auparavant sans oublier que $x \longmapsto \pm\sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

  Par conséquent ces deux propriétés caractéristiques de F_Y nous amènent à conclure que Y est une variable à densité dont une densité f_Y est obtenue par dérivation de F_Y sur $\mathbb{R}^* - \{1\}$[28] et nous complèterons la définition de f_Y en posant que :

  $$f_Y(0) = f_Y(1) = 0$$

  Nous avons donc :

  $$\begin{aligned}
  f_Y(x) &= \frac{1}{2x\alpha\sqrt{-\frac{1}{\alpha}\ln x}}\left(f_X\left(\sqrt{-\frac{\ln x}{\alpha}}\right) + f_X\left(-\sqrt{-\frac{\ln x}{\alpha}}\right)\right)\mathbf{1}_{]0,1[}(x) \\
  &\quad \text{où } f_X \text{ densité de } X \\
  &= \frac{1}{2x\alpha\sqrt{-\frac{1}{\alpha}\ln x}}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{-\frac{\ln x}{\alpha}}/\sqrt{2}\right)^2\right) + \exp\left(-\frac{1}{2}\left(-\sqrt{-\frac{\ln x}{\alpha}}/\sqrt{2}\right)^2\right)\right]\right)\mathbf{1}_{]0,1[}(x) \\
  &= \frac{1}{2x\alpha\sqrt{-\frac{1}{\alpha}\ln x}}\frac{2x^{\alpha/4}}{\sqrt{4\pi}}\mathbf{1}_{]0,1[}(x) \\
  &= \frac{x^{\alpha/4-1}}{\sqrt{-\alpha\ln x}\sqrt{4\pi}}\mathbf{1}_{]0,1[}(x) \\
  &= \frac{x^{\alpha/4-1}}{2\sqrt{-\alpha\pi\ln x}}\mathbf{1}_{]0,1[}(x)
  \end{aligned}$$

[28] Sans aucun problème, mais c'est à détailler le jour J.

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \frac{x^{\alpha/4-1}}{2\sqrt{-\alpha\pi\ln x}}\mathbf{1}_{]0,1[}(x)}$$

– **Espérance de** $\boldsymbol{Y}$.

La variable Y admet une espérance lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha/4}}{2\sqrt{-\alpha\pi\ln x}}dx$ est convergente car $f = 0$ en dehors de $]0,1[$. Déterminons une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha/4}}{2\sqrt{-\alpha\pi\ln x}}$ par le changement de variable $u = \sqrt{-\alpha\ln x}$ de bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée non nulle sur $]0,1[$ vers $u(]0,1[) =]1,+\infty[$. Comme $u = \sqrt{-\alpha\ln x}$ équivaut à $x = e^{-\frac{u^2}{\alpha}}$ alors :

$$du = -\frac{1}{2x}\frac{\alpha dx}{\sqrt{-\alpha\ln x}} = -\frac{\alpha e^{u^2/\alpha}}{2u}dx$$

soit :

$$dx = -\frac{2u}{\alpha}e^{-u^2/\alpha}du$$

et :

$$\begin{aligned}
\int^t \frac{x^{\alpha/4}}{2\sqrt{-\alpha\pi\ln x}}dx &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int^t \frac{x^{\alpha/4}}{\sqrt{-\alpha\ln x}}dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int^t \frac{1}{u}\left(e^{-\frac{u^2}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{4\alpha}}\left(-\frac{2u}{\alpha}e^{-\frac{u^2}{\alpha}}du\right) \\
&= -\frac{2}{\alpha\sqrt{4\pi}}\int^t e^{-\frac{u^2}{4\alpha^2}-\frac{u^2}{\alpha}}du \\
&= -\frac{2}{\alpha\sqrt{4\pi}}\int^t e^{-u^2\left(\frac{1}{4\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\right)}du \\
&= -\frac{2}{\alpha\sqrt{4\pi}}\int^t e^{-u^2\left(\frac{4\alpha+1}{4\alpha^2}\right)}du \\
&= -\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\int^t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{4\alpha+1}u}{\alpha\sqrt{2}}\right)^2}du
\end{aligned}$$

A ce niveau posons un nouveau changement de variable affine donc valable car bijectif et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$: $w = \dfrac{\sqrt{4\alpha+1}}{\alpha\sqrt{2}}u$ ce qui implique que $dw = \dfrac{\sqrt{4\alpha+1}}{\alpha\sqrt{2}}du$ ou encore $du = \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{4\alpha+1}}dw$ et :

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\int^t \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{4\alpha+1}u}{\alpha\sqrt{2}}\right)^2\right)du &= -\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{4\alpha+1}}\int^{\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{4\alpha+1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}w^2}dw \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(4\alpha+1)}}\int^{\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{4\alpha+1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}w^2}dw \\
&= -\frac{2}{\sqrt{4\alpha+1}}\int^{\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{4\alpha+1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}w^2}dw
\end{aligned}$$

Enfin lorsque $\lim\limits_{x\to 0^+} u = \sqrt{-\alpha\ln x} = +\infty$ alors $w = \dfrac{\sqrt{4\alpha+1}}{\alpha\sqrt{2}}u$ tend vers $+\infty$ et lorsque $\lim\limits_{x\to 1} u = \sqrt{-\alpha\ln x} = 0$ il s'ensuit que $w = \dfrac{\sqrt{4\alpha+1}}{\alpha\sqrt{2}}u$ tend vers 0. D'autre part l'application $w \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}w^2}$ admet une intégrale convergente sur $\mathbb{R}_+$ et égale à $\dfrac{1}{2}$.

Moralité, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha/4}}{2\sqrt{-\alpha\pi\ln x}}dx$ converge et est égale à :

$$\frac{2}{\sqrt{4\alpha+1}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4\alpha+1}}$$

et donc :

$$\boxed{\text{La variable } Y \text{ admet une espérance égale à } \mathbf{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{4\alpha+1}}}$$

9. Tout d'abord notons que l'application $t \longmapsto e^t$ étant continue sur $\mathbb{R}$, alors par le **théorème de transfert** :

$$\begin{aligned}
& (Y \text{ admet une espérance}) \\
\iff & \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) dx \text{ est convergente}\right) \\
\iff & \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(x-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) dx \text{ est convergente}\right)
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
x-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2 &= \frac{1}{2\sigma^2}\left((x-m)^2-2\sigma^2x\right) \\
&= \frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2-2\left(\sigma^2+m\right)x+m^2\right) \\
&= \frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(x-\left(\sigma^2+m\right)\right)^2-2m\sigma^2-\sigma^4\right) \\
& \text{ après mise sous forme canonique}
\end{aligned}$$

Par conséquent Y admet une espérance lorsque l'intégrale :

$$\exp\left(m+\frac{\sigma^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\left(\frac{x-\left(\sigma^2+m\right)}{\sigma}\right)^2\right) dx$$

est convergente. L'intégrale converge car, à $\exp\left(m+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)$ près, elle représente l'intégrale d'une densité d'une variable N suivant la loi normale de paramètres σ^2+m et σ^2. Ainsi cette intégrale vaut $\exp\left(m+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)$ qui est la valeur de l'espérance de Y. En conclusion Y admet une espérance égale à :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y) = \exp\left(m+\frac{\sigma^2}{2}\right)}$$

De même :

$$\begin{aligned}
& (Y \text{ admet une variance}) \\
\iff & (Y \text{ admet un moment d'ordre deux}) \\
\iff & \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^x\right)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) dx \text{ est convergente}\right) \\
\iff & \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) dx \text{ est convergente}\right) \\
\iff & \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(2x-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) dx \text{ est convergente}\right)
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
2x-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2 &= \frac{1}{2\sigma^2}\left((x-m)^2-4\sigma^2x\right) \\
&= \frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2-2\left(2\sigma^2+m\right)x+m^2\right) \\
&= \frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(x-\left(2\sigma^2+m\right)\right)^2-4m\sigma^2-4\sigma^4\right) \\
& \text{ après mise sous forme canonique}
\end{aligned}$$

Par conséquent Y admet un moment d'ordre deux si, et seulement si :

$$\exp\left(2m+2\sigma^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\left(2\sigma^2+m\right)}{\sigma}\right)^2\right)dx \text{ est convergente}$$

Cette dernière intégrale converge car, à $\exp\left(2m+2\sigma^2\right)$ près, elle représente l'intégrale d'une densité d'une variable N suivant la loi normale de paramètres $2\sigma^2+m$ et σ^2. Ainsi cette intégrale vaut $\exp\left(2m+2\sigma^2\right)$ qui est la valeur du moment d'ordre deux de Y. En conclusion Y admet une variance égale, selon le **théorème de Huygens-Koenig**, à :

$$\mathbf{V}(Y)=\mathbf{E}\left(Y^2\right)-(\mathbf{E}(Y))^2=\exp\left(2m+2\sigma^2\right)-\exp\left(2m+\sigma^2\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\mathbf{V}(Y)=\left(e^{\sigma^2}-1\right)\exp\left(2m+\sigma^2\right)}$$

10. (a) Nous savons d'après le cours :

$$\boxed{\mathbf{E}(X)=b\nu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X)=b^2\nu}$$

(b) i. Notons $\varphi : t \longmapsto t^2$. Comme cette application n'est monotone sur $X(\Omega)\subset\mathbb{R}$ **nous ne pouvons pas conclure** (hors programme !) directement que $Y=\varphi\circ X$ reste une variable à densité. Alors faisons l'étude classique :

– Tout d'abord pour tout réel x, $\{\varphi(X)\leq x\}\in\mathcal{A}$, car $\varphi(\mathbb{R})=\mathbb{R}_+$ et :

– si $x<0$, $\{Y\leq x\}=\emptyset\in\mathcal{A}$;

– si $x\geq 0$, la condition $Y(\omega)\leq x$ équivaut à $-\sqrt{x}\leq X(\omega)\leq\sqrt{x}$ où $\omega\in\Omega$. On en déduit que :

$$\{\omega\in\Omega \mid Y(\omega)\leq x\}=\left\{\omega\in\Omega \mid -\sqrt{x}\leq X(\omega)\leq\sqrt{x}\right\}$$

La condition $Y\leq x$ définit donc un événement lié à l'expérience aléatoire considérée : $\{\omega\in\Omega \mid Y(\omega)\leq x\}\in\mathcal{A}$ car X est une variable aléatoire.
Tout cela nous montre que $Y=\varphi(X)$ est une variable aléatoire définie sur Ω.

– Introduisons F_Y la fonction de répartition de $Y=\varphi(X)$ définie par :

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \mathbf{P}([Y\leq x])=\mathbf{P}([-\sqrt{x}\leq X\leq\sqrt{x}]) & \text{si } x\geq 0\end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \Phi(\sqrt{x})-\Phi(-\sqrt{x}) & \text{si } x\geq 0\end{cases} \\
& \quad \text{en notant } \Phi \text{ la fonction de répartition de } X \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 2\Phi(\sqrt{x})-1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}
\end{aligned}$$

Les propriétés de classe ne posent aucun problème à vérifier puisque :
♠ F_Y étant nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_-^*$;
♠ F_Y est continue sur $\mathbb{R}_+$ par somme et composition (à détailler) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (le problème en 0 provient de la fonction racine carrée).
L'application $Y:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ est donc une variable à densité dont une densité f_Y est obtenue par dérivation de F_Y sur $\mathbb{R}^*$ sans oublier de poser que :

$$f_Y(0)=0$$

pour compléter la définition. Nous avons donc :

$$f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}f_X(\sqrt{x}) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x\leq 0\end{cases}$$

en notant f_X une densité de X, or :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Donc :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

En écrivant l'expression sur $\mathbb{R}_+^*$ sous la forme $\dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$, on voit que :

$$\boxed{\text{La variable } X_1^2 \text{ est à densité suivant la loi } \Gamma\left(2, \frac{1}{2}\right)}$$

ii. Les variables X_1^2 et X_2^2 étant **indépendantes**, la **stabilité de la loi grand gamma pour la somme** assure que :

$$\boxed{\text{La variable } X_1^2 + X_2^2 \text{ suit la loi } \Gamma(2,1) \text{, il s'agit de la loi exponentielle de paramètre } \frac{1}{2}}$$

(c) i. Toujours par **stabilité de la loi grand gamma pour la somme** :

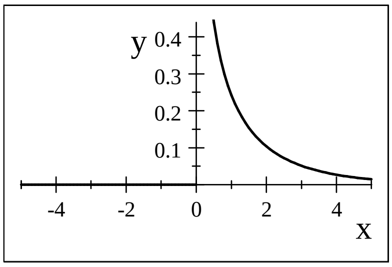
$$\boxed{Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)}$$

et d'après le cours :

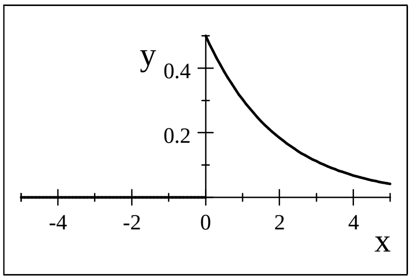
$$\boxed{\mathbf{E}(Y_n) = \frac{n}{4} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y_n) = \frac{n}{8}}$$

ii. Nous avons :

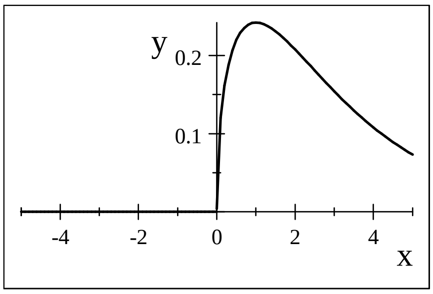
$$\boxed{f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}}$$



$$\boxed{f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}}$$



$$\boxed{f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}}$$



11. (a) Comme les deux variables Z et T sont deux variables à densité sont **indépendantes** de densités bornées (une seule suffit), on sait d'après le cours que $Z+T$ **reste** une variable à densité dont une densité f_{Z+T} sera donnée par le **produit de convolution** des lois de Z et T, soit pour chaque réel x :

$$f_{Z+T}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t) f_T(x-t)\,dt$$

Nous avons $(Z+T)(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ et :

$$\begin{aligned} & (f_Z(t) f_T(x-t) \neq 0) \\ \Longleftrightarrow \quad & \left(\begin{cases} f_Z(t) \neq 0 \\ f_T(x-t) \neq 0 \end{cases} \right) \\ \Longleftrightarrow \quad & \left(\begin{cases} x-t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \right) \\ \Longleftrightarrow \quad & (0 \leq t \leq x) \end{aligned}$$

et dans ce cas pour chaque réel x :

$$\begin{aligned} f_{Z+T}(x) &= \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} \beta e^{-\beta(x-t)}\,dt \\ &= \alpha\beta e^{-\beta x} \int_0^x e^{-(\alpha-\beta)t}\,dt \\ &= \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\left(e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}\right) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{f_{Z+T}(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\left(e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

(b) i. Comme $\varphi : t \longmapsto -t$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée non nulle sur $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, nous pouvons conclure que $\varphi \circ Y = -Y$ reste une variable à densité (hors programme !). Notons F_{-Y} la fonction de répartition de $-Y$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{-Y}(x) = \mathbf{P}([-Y \leq x])$$

Comme $-Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_-$:

$$\begin{aligned} F_{-Y}(x) &= \begin{cases} \mathbf{P}([Y \geq -x]) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \mathbf{P}([Y \leq -x]) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - F_Y(-x) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Par dérivation de F_{-Y} qui est dérivable sur $\mathbb{R}^*$[29] nous obtenons une densité de $-Y$ que nous noterons f_{-Y} sans oublier de poser que :

$$f_{-Y}(0) = 0$$

[29] Sans aucun problème, mais c'est à détailler le jour J.

par exemple bien sûr ! Nous avons donc :

$$f_{-Y}(x) = \begin{cases} f_Y(-x) & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

où f_Y est une densité de Y d'où :

$$\boxed{f_{-Y}(x) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}}$$

ii. Comme les deux variables X et Y sont deux variables à densité **indépendantes** à densités bornées (une seule suffit) alors les variables X et $-Y$ **restent indépendantes** et on sait d'après le cours que $X - Y$ reste une variable à densité dont une densité $f_{X-Y} = h$ sera donnée par le **produit de convolution** des lois de X et $-Y$, soit pour chaque réel x :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x-t)\, dt$$

Nous avons $(X - Y)(\Omega) \subset \mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} & (f_X(t) f_{-Y}(x-t) \neq 0) \\ \Longleftrightarrow \quad & \left(\begin{cases} f_X(t) \neq 0 \\ f_{-Y}(x-t) \neq 0 \end{cases} \right) \\ \Longleftrightarrow \quad & \left(\begin{cases} t \geq 0 \\ x - t < 0 \end{cases} \right) \\ \Longleftrightarrow \quad & (t > \min(0, x)) \end{aligned}$$

et dans ce cas :

– Si $x \geq 0$, alors $t > 0$ et :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \lambda e^{\lambda(x-t)} dt \\ &= \lim_{\gamma \to +\infty} \left[-\frac{1}{2} \lambda e^{x\lambda} e^{-2t\lambda} \right]_0^\gamma \\ & \quad \text{par définition de la convergence} \\ &= \lim_{\gamma \to +\infty} \left(-\frac{1}{2} \lambda e^{x\lambda} e^{-2\gamma\lambda} + \frac{1}{2} \lambda e^{x\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lambda e^{\lambda x} \end{aligned} \tag{19}$$

– Si $x < 0$, alors $t > x$ et :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \lambda e^{\lambda(x-t)} dt \\ &= \lim_{\gamma \to +\infty} \left[-\frac{1}{2} \lambda e^{x\lambda} e^{-2t\lambda} \right]_x^\gamma \\ & \quad \text{par définition de la convergence} \\ &= \lim_{\gamma \to +\infty} \left(-\frac{1}{2} \lambda e^{x\lambda} e^{-2\gamma\lambda} + \frac{1}{2} \lambda e^{-x\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda x} \end{aligned} \tag{20}$$

Selon (19) et (20) :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}}$$

On dit que $X - Y$ suit la **loi exponentielle symétrique** ou **loi de Laplace**.

iii. La variable $|X-Y|$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc si $x<0$, $\mathbf{P}([|X-Y|\leq x])=0$ et pour chaque réel x :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([|X-Y|\leq x]) &= \mathbf{P}([-x\leq X-Y\leq x])\\
&= \int_{-x}^{x} h(t)\,dt\\
&= 2\int_0^x h(t)\,dt\\
&\quad \text{car } h \text{ est paire}\\
&= 2\int_0^x \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda t}dt\\
&= \left[e^{-\lambda t}\right]_0^x\\
&= 1-e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La variable } |X-Y| \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \lambda}$$

12. (a) C'est immédiat… L'intégrale en jeu étant une **intégrale de Riemann** de paramètre $2>1$, elle est donc convergente.

(b) Notons que Y et $-Y$ sont obtenues des changements de variables dont les propriétés nous permettent de dire qu'**elles restent des variables à densité.**

– **Loi de Y**

Nous avons $Y(\Omega)\subset\mathbb{R}_+^*$. Notons F_Y la fonction de répartition de Y définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_Y(x)=\mathbf{P}([Y\leq x])$$

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0\\ \mathbf{P}([\ln X\leq x]) & \text{si } x>0\end{cases}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0\\ \mathbf{P}([X\leq e^x]) & \text{si } x>0\end{cases}\\
&\quad \text{car } \exp \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0\\ F_X(e^x) & \text{si } x>0\end{cases}
\end{aligned}$$

Par dérivation de F_Y sur $\mathbb{R}^*$[30] on obtient une densité de Y notée f_Y, sans oublier de poser, par exemple, que $f_Y(0)=1$:

$$\begin{aligned}
f_Y(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0\\ e^x f(e^x) & \text{si } x>0\end{cases}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0\\ \dfrac{e^x}{e^{2x}} & \text{si } x>0\end{cases}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0\\ e^{-x} & \text{si } x>0\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{Y\hookrightarrow\varepsilon(1)} \qquad (21)$$

– **Loi de $-Y$**

Nous avons $(-Y)(\Omega)\subset\mathbb{R}_-^*$. Notons F_{-Y} la fonction de répartition de Y définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_{-Y}(x)=\mathbf{P}([-Y\leq x])$$

[30] Je vous laisse vérifier la dérivabilité de F_Y sur $\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} F_{-Y}(x) &= \begin{cases} \mathbf{P}([Y \geq -x]) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \mathbf{P}([Y < -x]) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - F_Y(-x) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - F_X(e^{-x}) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Par dérivation de F_{-Y} sur $\mathbb{R}^*$ on obtient une densité de $-Y$ notée f_{-Y}, sans oublier de poser que $f_{-Y}(0) = 1$:

$$f_Z(x) = \begin{cases} e^{-x} f(e^{-x}) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{e^{-2x}} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Conclusion **:**

$$\boxed{f_Z(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}}$$

(c) i. **Loi de Y**

Nous avons les équivalences successives :

$$(U = X_1 X_2) \iff \left(U = e^{Y_1 + Y_2}\right) \iff (Y_1 + Y_2 = \ln U)$$

avec Y_1 et Y_2 indépendantes (du fait de celle de X_1 et X_2) et de même loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi selon (21) :

$$\ln U = \ln X_1 + \ln X_2 = Y_1 + Y_2 \hookrightarrow \Gamma(1, 2)$$

et une densité de $Y_1 + Y_2$ notée $f_{Y_1+Y_2}$ sera donnée par :

$$f_{Y_1+Y_2}(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Soit F_U la fonction de répartition de U définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_U(x) = \mathbf{P}([U \leq x])$$

et comme :

$$U(\Omega) \subset \left]1, +\infty\right[$$

$$\begin{aligned} F_U(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \mathbf{P}\left(\left[e^{Y_1+Y_2} \leq x\right]\right) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \mathbf{P}([Y_1 + Y_2 \leq \ln x]) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ F_{Y_1+Y_2}(\ln x) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Par dérivation de F_U sur $\mathbb{R} - \{1\}$ on obtient une densité de U notée f_U, sans oublier de poser, par exemple, que $f_U(1) = 0$:

$$f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{x} f_{Y_1+Y_2}(\ln x) & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{x} e^{-\ln x} \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{\ln x}{x^2} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}}$$

Loi de V
Nous avons :

$$V = \frac{X_1}{X_2} = \frac{e^{Y_1}}{e^{Y_2}} = e^{Y_1 - Y_2}$$

et $V(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$. Cherchons une densité $f_{Y_1-Y_2}$ de $Y_1 - Y_2$ avec Y_1 et $-Y_2$ indépendantes du fait de celle de Y_1 et Y_2 et de densités bornées (une seule suffit). Cela fait que nous allons utiliser le produit de convolution pour l'obtenir. La densité $f_{Y_1-Y_2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{Y_1-Y_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(x-t)\, f_{-Y_2}(t)\, dt$$

Nous avons les équivalences logiques :

$$\begin{array}{cl} & (f_{Y_1}(x-t)\, f_{-Y_2}(t) \neq 0) \\ \Longleftrightarrow & (f_{Y_1}(x-t) \neq 0 \text{ et } f_{-Y_2}(t) \neq 0) \\ \Longleftrightarrow & (x - t \geq 0 \text{ et } t < 0) \\ \Longleftrightarrow & (t < \min(0, x)) \end{array}$$

ainsi :

$$f_{Y_1-Y_2}(x) = \int_{-\infty}^{\min(0,x)} f_{Y_1}(x-t)\, f_{-Y_2}(t)\, dt$$

– Si $x \leq 0$, alors $t < x$ et :

$$\begin{aligned} f_{Y_1-Y_2}(x) &= \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-t)} e^t dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} e^{2t-x} dt \\ &= e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e^{2t} dt \\ &= \lim_{A \to -\infty} e^{-x} \left[\frac{1}{2} e^{2t}\right]_A^x \\ &= e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{2x}\right) \\ &= \frac{e^x}{2} \qquad (22) \end{aligned}$$

– Si $x > 0$, alors $t < 0$ et :

$$\begin{aligned} f_{Y_1-Y_2}(x) &= e^{-x} \int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt \\ &= \lim_{A \to -\infty} e^{-x} \left[\frac{1}{2} e^{2t}\right]_A^0 \\ &= \frac{e^{-x}}{2} \qquad (23) \end{aligned}$$

Conclusion selon (22) et (23) :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{Y_1-Y_2}(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}}$$

On parle de **loi de Laplace ou exponentielle symétrique** (hors programme!).
Soit F_V la fonction de répartition de V définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_V(x) = \mathbf{P}([V \leq x])$$

et comme :

$$V(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$$

$$\begin{aligned}
F_V(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \mathbf{P}\left(\left[e^{Y_1-Y_2} \leq x\right]\right) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \mathbf{P}\left([Y_1 - Y_2 \leq \ln x]\right) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ F_{Y_1-Y_2}(\ln x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Par dérivation de F_V sur $\mathbb{R}^*$ on obtient une densité de V notée f_V, sans oublier de poser, par exemple, que $f_V(0) = 0$:

$$\begin{aligned}
f_V(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} f_{Y_1-Y_2}(\ln x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} \dfrac{e^{-|\ln x|}}{2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2x} e^{\ln x} & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ \dfrac{1}{2x} e^{-\ln x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{f_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}}$$

ii. ▶ **Calcul de E** $\left(\sqrt[3]{U}\right)$

Selon le **théorème de transfert** $\sqrt[3]{U}$ admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt[3]{x} f_U(x)\, dx$ est convergente (c'est suffisant, réflechissez !). En cas de convergence :

$$\mathbf{E}\left(\sqrt[3]{U}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt[3]{x} f_U(x)\, dx$$

Or :

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt[3]{x} f_U(x)\, dx \text{ converge}\right) \\
\iff &\left(\int_{1}^{+\infty} \sqrt[3]{x} \frac{\ln x}{x^2} dx \text{ converge car } f = 0 \text{ sur }]-\infty, 1]\right) \\
\iff &\left(\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{5/3}} dx \text{ converge}\right)
\end{aligned}$$

Or comme :

$$\lim_{x \to +\infty} x^{1,1} \frac{\ln x}{x^{5/3}} = 0$$

par croissances comparées (log-puissance) la démonstration archi-classique qui suit, et que je vous laisse faire, montre clairement que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{5/3}} dx$ converge, et $\sqrt[3]{U}$ admet une espérance. Voyons rapidement le calcul. Soit $\alpha > 1$ en intégrant par parties en par parties en dérivant ln :

$$\int_1^{\alpha} \frac{\ln x}{x^{5/3}} dx = -\frac{3}{2} \frac{\ln \alpha}{\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^2} - \int_1^{\alpha} \left(-\frac{3}{2\left(\sqrt[3]{x}\right)^5}\right) dx = -\frac{3}{2}\left(\frac{\ln \alpha}{\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^2}\right) + \frac{9}{4}\left(\frac{-1 + \left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^2}\right)$$

et par passage à la limite quand α tend vers l'infini, nous obtenons que :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\sqrt[3]{U}\right)=\frac{9}{4}}$$

▶ **Calcul de $\mathbf{E}\left(\sqrt[3]{V}\right)$**

Selon le **théorème de transfert** $\sqrt[3]{V}$ admet une espérance si, et seulement si l'intégrale, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt[3]{x}f_V(x)\,dx$ est absolument convergente. En cas de convergence :

$$\mathbf{E}\left(\sqrt[3]{V}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt[3]{x}f_V(x)\,dx$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt[3]{x}f_V(x)\,dx$ converge lorsque $\displaystyle\int_0^1\sqrt[3]{x}\frac{1}{2}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sqrt[3]{x}\frac{1}{2x^2}dx$ converge car $f=0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ soit lorsque $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2x^{-1/3}}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2\left(\sqrt[3]{x}\right)^5}dx$ sont convergentes et même lorsque :

$$\int_0^1\frac{1}{2x^{-\frac{1}{3}}}dx \text{ et } \int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^{\frac{5}{3}}}dx \text{ sont convergentes}$$

Ces deux intégrales sont convergentes en tant qu'**intégrales de Riemann** de paramètres respectifs $-1/3<1$ et $5/3>1$. Donc $\sqrt[3]{V}$ admet une espérance.
Voyons rapidement le calcul :

$$\left(\forall\alpha\in\left]0,1\right[,\ \int_\alpha^1\frac{1}{2x^{-\frac{1}{3}}}dx=\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^4\right)\implies\left(\lim_{\alpha\to0^+}\int_\alpha^1\frac{1}{2x^{-\frac{1}{3}}}dx=\frac{3}{8}\right)\tag{24}$$

et :

$$\left(\forall\beta>1,\ \int_1^\beta\frac{1}{2\left(\sqrt[3]{x}\right)^5}dx=\frac{3}{4}\frac{-1+\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^2}\right)\implies\left(\lim_{\beta\to+\infty}\int_1^\beta\frac{1}{2\left(\sqrt[3]{x}\right)^5}dx=\frac{3}{4}\right)\tag{25}$$

Ainsi selon (24) et (25) :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\sqrt[3]{V}\right)=\int_0^1\frac{1}{2x^{-\frac{1}{3}}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{2\left(\sqrt[3]{x}\right)^5}dx=\frac{9}{8}}$$

▶ **Calcul de $\mathbf{E}\left(\sqrt[3]{UV}\right)$**

Nous avons :

$$\sqrt[3]{UV}=\sqrt[3]{X_1X_2\times\frac{X_1}{X_2}}=\sqrt[3]{X_1^2}$$

Selon le **théorème de transfert** $\sqrt[3]{X_1^2}$ admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt[3]{x^2}f(x)\,dx$ est convergente. En cas de convergence :

$$\mathbf{E}\left(\sqrt[3]{UV}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt[3]{x^2}f(x)\,dx$$

Or nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}&\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt[3]{x}f(x)\,dx\text{ converge}\right)\\ \iff&\left(\int_1^{+\infty}\sqrt[3]{x^2}\frac{1}{x^2}dx\text{ converge car }f=0\text{ sur }\left]-\infty,1\right]\right)\\ \iff&\left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^4}dx\text{ converge}\right)\\ \iff&\left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}dx\text{ converge}\right)\end{aligned}$$

Cette intégrale est convergente en tant qu'**intégrale de Riemann** de paramètre $4/3 > 1$. Donc $\sqrt[3]{UV}$ admet une espérance. Voyons rapidement le calcul :

$$\left(\forall \alpha > 1,\ \int_1^{\alpha} \frac{1}{x^{4/3}} dx = 3\left(\frac{-1+\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\alpha}}\right)\right) \implies \left(\lim_{\alpha\to+\infty} \int_1^{\alpha} \frac{1}{x^{4/3}} dx = 3\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\sqrt[3]{UV}\right) = 3}$$

Comme

$$\mathbf{E}\left(\sqrt[3]{U}\right) \times \mathbf{E}\left(\sqrt[3]{V}\right) \neq \mathbf{E}\left(\sqrt[3]{UV}\right)$$

les variables $\sqrt[3]{U}$ et $\sqrt[3]{V}$ ne sont pas indépendantes donc :

$$\boxed{\text{Les variables } U \text{ et } V \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

Rappelons que pour toutes fonctions φ et ψ telles que $\varphi(X)$ et $\psi(Y)$ soient définies :

$(X \text{ et } Y \text{ indépendantes}) \implies (\varphi(X) \text{ et } \psi(Y) \text{ indépendantes})$
mais la **réciproque est fausse** !

13. (a) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Notons F_X la fonction de répartition de X et $\mathcal{P}(n)$ la proposition :

$$\text{“}F_X(n) = \frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx\text{”}$$

Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

– Initialisation pour $n = 0$. Pour $\alpha > \lambda$:

$$\int_{\lambda}^{\alpha} e^{-x} dx = \int_{\lambda}^{\alpha} e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_{\lambda}^{\alpha} = e^{-\lambda} - e^{-\alpha}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{\alpha\to+\infty} \int_{\lambda}^{\alpha} e^{-x} dx \\ &= e^{-\lambda} \\ &= \mathbf{P}([X=0]) \\ &= \mathbf{P}([X \leq 0]) \\ &= F_X(0)\end{aligned}$$

et $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

– Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}$, la proposition soit vérifiée, à savoir que $F_X(n) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx$.

Intégrons par parties $\frac{1}{(n+1)!}\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^{n+1} dx$ (avec $\overrightarrow{LPET}$). Soit $\beta \geq \lambda$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)!}\int_{\lambda}^{\beta} e^{-x} x^{n+1} dx &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_{\lambda}^{\beta} + (n+1)\int_{\lambda}^{\beta} e^{-x} x^n dx\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\lambda^{n+1}e^{-\lambda} - \beta^{n+1}e^{-\beta} + (n+1)\int_{\lambda}^{\beta} e^{-x} x^n dx\right)\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\lim_{\beta\to+\infty} \frac{\lambda^{n+1}e^{-\lambda} - \beta^{n+1}e^{-\beta}}{(n+1)!} = \frac{\lambda^{n+1}e^{-\lambda}}{(n+1)!} = \mathbf{P}([X = n+1]) \quad \text{et} \quad \lim_{\beta\to+\infty} \frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{\beta} e^{-x} x^n dx = F_X(n)$$

selon l'hypothèse de,récurrence.
Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta\to+\infty} \frac{1}{(n+1)!}\int_{\lambda}^{\beta} e^{-x}x^{n+1}dx &= \mathbf{P}([X=n+1]) + F_X(n) \\
&= \mathbf{P}([X=n+1]) + \mathbf{P}([X\leq n]) \\
&= \mathbf{P}([X\leq n+1]) \\
&= F_X(n+1)
\end{aligned}$$

Conclusion l'intégrale $\frac{1}{(n+1)!}\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x}x^{n+1}dx$ converge et vaut $F_X(n+1)$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$. Ce raisonnement par récurrence prouve $\mathcal{P}(n)$ pour tout entier n.

(b) Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, Y_n une variable aléatoire absolument continue dont une densité f_n est donnée par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \frac{1}{n!}e^{-x}x^n & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Vérifions que f_n est bien une densité de probabilité et que l'on a $F_X(n) = \mathbf{P}([Y_n>\lambda])$.
– Nous reconnaissons en f_n une densité de la loi $\gamma(n+1)$.
– D'après la question précédente :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([Y_n>\lambda]) = \int_{\lambda}^{+\infty}\frac{1}{n!}e^{-x}x^n dx = F_X(n)}$$

14. Nous avons pour commencer $Z(\Omega)\subset\mathbb{R}_+$. Déterminons la fonction de répartition F_Z de Z.
L'ensemble $\{[Y=k]\,,\ k\in[\![0,n]\!]\}$ constitue un **système complet d'événements**, alors selon la première version de la **formule des probabilités totales** pour chaque réel x :

$$\begin{aligned}
F_Z(x) &= \mathbf{P}([Z\leq x]) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}([Z\leq x]\cap[Y=k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}\left(\left[\frac{X}{Y+1}\leq x\right]\cap[Y=k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}\left(\left[\frac{X}{k+1}\leq x\right]\cap[Y=k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}([X\leq(k+1)x]\cap[Y=k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}([X\leq(k+1)x])\,\mathbf{P}([Y=k]) \\
&\quad \text{car les deux variables sont indépendantes} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\int_0^{(k+1)x} e^{-t}dt\times\frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\int_0^{(k+1)x} e^{-t}dt \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\left[-e^{-t}\right]_0^{(k+1)x} \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1-e^{-(k+1)x}\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \frac{e^{-x}}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{-kx} \\
&\quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{2^n}\left[2^n - e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)^n\right]
\end{aligned}$$

selon la **formule du binôme de Newton**

$$= 1 - \frac{e^{-x}}{2^n}\left(1+e^{-x}\right)^n$$

Finalement :

$$\boxed{F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - \dfrac{e^{-x}}{2^n}\left(1+e^{-x}\right)^n & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}}$$

Vérifions que F_Z vérifie les deux propriétés caractéristiques que doit posséder toute fonction de répartition, à savoir qu'ici :

- F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ (aucun problème sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+$ F_Z est continue en tant que somme et composée et produit de fonctions continues $x \longmapsto 1+e^{-x}$, $x \longmapsto x^n$ et $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{2^n}$) et :

$$\begin{aligned} F_Z(0) &= 1 - \frac{e^{-x}}{2^n}\left(1+e^{-x}\right)^n \\ &= 1 - \frac{2^n}{2^n} \\ &= 0 \\ &= \lim_{x \to 0^-} F_Z(x) \end{aligned}$$

- F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur au moins $\mathbb{R}^*$ selon les théorèmes généraux (à détailler)
  Conclusion F_Z peut donc être considérée comme la fonction de répartition d'une variable à densité, ainsi Z est une variable à densité de densité associée notée f_Z définie par :

$$\boxed{f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2^n}e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)^{n-1}\left(1+(n+1)e^{-x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}}$$

✠✠✠✠✠

17 Convergences et approximations

1. Faisons un retour dans le temps au XIX$^{\text{ème}}$ siècle à l'Université d'Etat de Saint-Pétresbourg (anciennement Leningrad) ville abritant l'un des plus mythiques orchestres au monde, pour y rencontrer notre ami Andreï Andreïevitch Markov nous affirmant que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\left([|X_n - 0| \geq \varepsilon]\right) \leq \frac{\mathbf{E}\left(|X_n|\right)}{\varepsilon}$$

L'emploi du théorème d'encadrement permet de conclure, selon l'hypothèse $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(|X_n|\right) = 0$, que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left([|X_n| \geq \varepsilon]\right) = 0$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (X_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ converge en probabilité vers } 0}$$

2. (a) RAS ...

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Dès que $n > 1/\varepsilon$ on a :

$$\mathbf{P}\left([|X_n| \geq \varepsilon]\right) = 2\left(\sqrt{n}\left(n + \frac{1}{n} - n\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{La suite de variables } (X_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ converge en probabilité vers } 0.}$$

3. Nous avons :

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} X_i \\
&= \frac{1}{n^\alpha}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} X_i \\
& \text{par inversion des sommations} \\
&= \frac{1}{n^\alpha}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\,X_i \\
&= \frac{1}{n^\alpha}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\,X_{i+1}
\end{aligned}$$

alors par linéarité de l'espérance, toutes les variables en jeu étant d'ordre un, à savoir admettant une espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(T_n\right) &= \frac{1}{n^\alpha}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\,\mathbf{E}\left(X_{i+1}\right) \\
&= \frac{1}{n^\alpha}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\times 0 \\
& \text{puisque les variables sont centrées} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\left(T_n\right) &= \mathbf{E}\left(T_n^2\right) \\
&= \frac{1}{n^{2\alpha}}\mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\,X_{i+1}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^{2\alpha}}\mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)^2\,X_{i+1}^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(n-i)(n-j)\,X_{i+1}X_{j+1}\right) \\
&= \frac{1}{n^{2\alpha}}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)^2\,\mathbf{E}\left(X_{i+1}^2\right) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(n-i)(n-j)\,\mathbf{E}\left(X_{i+1}X_{j+1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n^{2\alpha}}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)^2\,\mathbf{E}\left(X_{i+1}^2\right) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(n-i)(n-j)\,\mathbf{E}\left(X_{i+1}\right)\mathbf{E}\left(X_{j+1}\right)\right) \\
& \text{par indépendance des variables } X_k \\
&= \frac{1}{n^{2\alpha}}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)^2\,\mathbf{E}\left(X_{i+1}^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{puisque les variables } X_k \text{ sont centrées} \\
= \; & \frac{1}{n^{2\alpha}} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2 \sigma^2 \\
= \; & \frac{\sigma^2}{n^{2\alpha}} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2 \\
= \; & \frac{\sigma^2}{n^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
= \; & \frac{\sigma^2}{n^{2\alpha}} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Comme :

$$\frac{\sigma^2}{n^{2\alpha}} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sim \frac{\sigma^2}{3n^{2\alpha-3}}$$

avec :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma^2}{3n^{2\alpha-3}} = 0$$

puisque $\alpha > 3/2$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{V}(T_n) = 0$$

La **condition suffisante** de convergence en probabilité s'applique, puisque :

$$\mathbf{E}(T_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{V}(T_n) = 0$$

et :

$$\boxed{\text{La suite } (T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en probabilité vers } 0}$$

4. Montrons que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([|S_n| > \varepsilon]) = 0$$

Par l'**inégalité de Markov**, il vient :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([|S_n| > \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{E}(S_n^2)}{\varepsilon^2}$$

Or pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n^2 = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right)^2$$

et par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(S_n^2) &= \frac{1}{n^2} \mathbf{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \mathbf{E}\left(\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} X_i X_j \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \mathbf{E}(X_i X_j) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \operatorname{Cov}(X_i X_j) \\
& \quad \text{puisque les variables sont centrées} \\
&\leq \frac{1}{n^2} \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |\operatorname{Cov}(X_i X_j)| \\
&\leq \frac{1}{n^2} \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \frac{C}{1+|i-j|^\alpha} \\
&\leq \frac{C}{n^2} \left(n + 2\frac{n-1}{1+1} + 2\frac{n-2}{1+2^\alpha} + 2\frac{n-3}{1+3^\alpha} + \cdots + \frac{2}{1+(n-1)^\alpha} \right)
\end{aligned}$$

$$\leq \quad \frac{2C}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{1+k^\alpha}$$
$$\leq \quad \frac{2C}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+k^\alpha}$$

– Si $\alpha = 1$ comme :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1+k}\sim\frac{\ln n}{n}$$

alors :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1+k}=0$$

et par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left(S_n^2\right)=0$$

– Si $\alpha > 1$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1+k^\alpha}=0$$

puisque nous savons que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+n^\alpha}$ converge car :

$$\frac{1}{1+n^\alpha}\sim\frac{1}{n^\alpha}$$

et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ convergente en tant que série de Riemann de paramètre $\alpha > 1$. Là encore le théorème d'encadrement permet de conclure que $\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left(S_n^2\right)=0$ et comme dans chacun des cas :

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left([|S_n|>\varepsilon]\right)=0$$

finalement :

$$\boxed{\text{La suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en probabilité vers } 0}$$

5. (a) Nous avons $Y_n(\Omega)=\{-1,1\}$ en effet $(\lfloor X_n\rfloor)(\Omega)=\mathbb{N}$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \cos(n\pi)=\pm 1$$

selon la parité de n. Nous voilà donc face à une variable binaire avec :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y_n=1]) &= \mathbf{P}([\lfloor X_n\rfloor\in 2\mathbb{N}])\\
&= \mathbf{P}\left(\biguplus_{k=1}^{+\infty}[\lfloor X_n\rfloor = 2k]\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}([\lfloor X_n\rfloor=2k])\\
&\ \text{par } \sigma-\text{additivité de } \mathbf{P}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}([2k\leq X_n<2k+1])\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(F_{X_n}(2k+1)-F_{X_n}(2k)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(1-e^{-(2k+1)n}-\left(1-e^{-2kn}\right)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(e^{-2kn}-e^{-(2k+1)n}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kn}\left(1-e^{-n}\right) \\ &= \left(1-e^{-n}\right)\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kn} \\ &= \left(1-e^{-n}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(e^{-2n}\right)^k \\ &= \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-2n}} \end{aligned}$$

Si vous avez envie de vous taper le calcul live de $\mathbf{P}\left([Y_n=-1]\right)$ je vous laisse faire seuls, moi je n'en ai plus la force après des kilomètres de poly tapés ce week-end entre deux matchs de l'open d'Australie. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left([Y_n=-1]\right) &= 1-\mathbf{P}\left([Y_n=1]\right) \\ &= 1-\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-2n}} \\ &= \frac{e^{-n}}{e^{-n}+1} \end{aligned}$$

Bilan :

$$\boxed{\mathbf{P}\left([Y_n=1]\right)=\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-2n}} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\left([Y_n=-1]\right)=\frac{e^{-n}}{e^{-n}+1}}$$

La finitude de Y_n est fatale pour l'absence de ses moments, alors par définition :

$$\mathbf{E}\left(Y_n\right)=\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-2n}}-\frac{e^{-n}}{e^{-n}+1}$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(Y_n\right)=\frac{1-e^{-n}}{e^{-n}+1}} \tag{26}$$

(b) Il serait bon de calculer la variance de Y_n avant de poursuivre :

$$\mathbf{E}\left(Y_n^2\right)=\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-2n}}+\frac{e^{-n}}{e^{-n}+1}=1$$

alors :

$$\mathbf{V}\left(Y_n\right)=1-\left(\frac{1-e^{-n}}{e^{-n}+1}\right)^2=\frac{4e^{-n}}{\left(e^{-n}+1\right)^2} \tag{27}$$

Malheureusement si vous révez comme moi d'utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vous êtes mal "barrés" puisque 1 n'est pas la valeur de l'espérance de Y_n mais sa **limite**. Mais comme dit la chanson d'Henri Salvador dont mon père était le tailleur entre autres (authentique) "eh eh ... Markov est arrivé" (je plains les voies écos qui ne connaissent pas ce génie). Le natif de Niazan nous fait donc écrire que :

$$\forall \varepsilon>0, \quad \mathbf{P}\left([|Y_n-1|\geq\varepsilon]\right)\leq\frac{\mathbf{E}\left(\left(Y_n-1\right)^2\right)}{\varepsilon^2}$$

puisque vous savez bien que :

$$[|Y_n-1|\geq\varepsilon]=\left[\left(Y_n-1\right)^2\geq\varepsilon^2\right]$$

bijectivité de $x\longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ oblige ... avec selon la formule de Koenig inversée :

$$\forall \varepsilon>0, \quad \mathbf{P}\left([|Y_n-1|\geq\varepsilon]\right)\leq\frac{\mathbf{V}\left(Y_n-1\right)+\left(\mathbf{E}\left(Y_n-1\right)\right)^2}{\varepsilon^2}\leq\frac{\mathbf{V}\left(Y_n\right)+\left(\mathbf{E}\left(Y_n\right)-1\right)^2}{\varepsilon^2}$$

par propiété élémentaire de $\mathbf{E}$ et de $\mathbf{V}$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\mathbf{V}\left(Y_n\right)=0$ selon (27) et $\lim_{n\to+\infty}\mathbf{E}\left(Y_n\right)=1$ selon (26) nous sommes sauvés puisque :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathbf{V}\left(Y_n\right)+\left(\mathbf{E}\left(Y_n\right)-1\right)^2}{\varepsilon^2}=0$$

et ainsi par théorème d'encadrement :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left([|Y_n - 1| \geq \varepsilon]\right) = 0}$$

Autrement dit :

$$\boxed{(Y_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1}$$

6. (a) La fonction g_n est définie sur $\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ (à détailler), positive, et d'intégrale convergente de valeur égale à 1 car :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{n^2 x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{n^2x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \lim_{A\to+\infty} \left[-\exp\left(-\frac{n^2x^2}{2\sigma^2}\right)\right]_0^A = \lim_{A\to+\infty} \left(1 - \exp\left(-\frac{n^2A^2}{2\sigma^2}\right)\right) = 1$$

$$\boxed{g_n \text{ est une densité de probabilité}}$$

(b) Nous avons pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left([|X_n| \geq \varepsilon]\right) &= \mathbf{P}\left([X_n \geq \varepsilon]\right) \\
&\quad \text{car } X_n \text{ est une variable positive ps} \\
&= \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{n^2x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{n^2x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \lim_{A\to+\infty} \left[-\exp\left(-\frac{n^2x^2}{2\sigma^2}\right)\right]_\varepsilon^A \\
&\quad \text{par définiton de la convergence} \\
&= \lim_{A\to+\infty} \left(\exp\left(-\frac{n^2\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{n^2A^2}{2\sigma^2}\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{n^2\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$

Comme :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(-\frac{n^2\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right) = 0$$

alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left([|X_n| \geq \varepsilon]\right) = 0$$

et par définition :

$$\boxed{(X_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0}$$

7. (a) Comme pour tout entier naturel n non nul $X_n(\Omega) = \{0,1\}$ alors :

$$X_nX_{n+1}(\Omega) = \{0,1\}$$

et :

$$2X_n(\Omega) = \{0,2\}$$

et ainsi :

$$Y_n(\Omega) = \{0,1,2\}$$

Disons-le "tout de go" la finitude de Y_n assure l'existence de tous ses moments. Comme les variables définissant Y_n sont indépendantes :

- $\mathbf{P}([Y_n = 0]) = \mathbf{P}([X_n = 0] \cap [X_{n+1} = 0]) = \mathbf{P}([X_n = 0])\,\mathbf{P}([X_{n+1} = 0]) = (1-p)^2$;
- $\mathbf{P}([Y_n = 1]) = \mathbf{P}([X_n = 0] \cap [X_{n+1} = 1]) = \mathbf{P}([X_n = 0])\,\mathbf{P}([X_{n+1} = 1]) = p(1-p)$;
- $\mathbf{P}([Y_n = 2]) = \mathbf{P}([X_n = 1] \cap [X_{n+1} \in \{0,1\}]) = \mathbf{P}([X_n = 1]) = p$

Bilan :

$$\boxed{\mathbf{P}([Y_n=0]) = (1-p)^2 \quad \mathbf{P}([Y_n=1]) = p(1-p) \quad \mathbf{P}([Y_n=2]) = p}$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_n) &= 2\mathbf{E}(X_n) + \mathbf{E}(X_{n+1}) - \mathbf{E}(X_n X_{n+1}) \\
&= 2\mathbf{E}(X_n) + \mathbf{E}(X_{n+1}) - \mathbf{E}(X_n)\mathbf{E}(X_{n+1}) \\
&\quad \text{par indépendance des variables} \\
&= 2p + p - p^2 \\
&= 3p - p^2
\end{aligned}$$

Pour le calcul de la variance **on ne peut pas parler** d'indépendance des variables en jeu dans la somme définissant Y_n. On fera donc "à l'ancienne" ...

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(Y_n^2\right) &= \mathbf{P}([Y_n=1]) + 4\mathbf{P}([Y_n=2]) \\
&= p(1-p) + 4p \\
&= 5p - p^2
\end{aligned}$$

et selon Huygens-Koenig :

$$\mathbf{V}(Y_n) = \mathbf{E}\left(Y_n^2\right) - (\mathbf{E}(Y_n))^2 = 5p - p^2 - \left(3p-p^2\right)^2$$

ainsi :

$$\boxed{\mathbf{V}(Y_n) = p\left(-p^3 + 6p^2 - 10p + 5\right)}$$

(b) i. La variable Z_n admet une espérance en tant que combinaison linéaire de telles variables avec par linéarité de l'opérateur :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z_n) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(Y_k) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(3p-p^2\right) \\
&= \frac{n}{n}\left(3p-p^2\right)
\end{aligned}$$

Moralité :

$$\boxed{\mathbf{E}(Z_n) = 3p - p^2}$$

ii. La définition des variables Y_i et Y_j nous incite à la méfiance, car des variables X_k peuvent apparaître en commun dans les deux premières. C'est pour cela qu'une discussion s'impose. Deux cas seront à distinguer selon que $j = i+1$ ou bien que $j > i+1$.

– Si $j > i+1$, il n'y a pas d'enchêtrement des variables X_k et l'indépendance de celles-ci entraîne celle de Y_i et Y_j. Dans ce cas :

$$\boxed{\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = 0}$$

– Si $j = i+1$, les deux variables Y_i et Y_j présentent des variables X_k en commun, alors le seul moyen de s'en sortir est de revenir à la formule :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) &= \mathbf{E}(Y_i Y_{i+1}) - \mathbf{E}(Y_i)\mathbf{E}(Y_{i+1}) \\
&= \mathbf{E}\left((2X_i + X_{i+1} - X_i X_{i+1})(2X_{i+1} + X_{i+2} - X_{i+1}X_{i+2})\right) \\
&\qquad - \mathbf{E}(Y_i)\mathbf{E}(Y_{i+1}) \\
&= \mathbf{E}\left(2X_iX_{i+1} + 2X_iX_{i+2} - 2X_iX_{i+1}X_{i+2} + 2X_{i+1}\right) \\
&\qquad - \mathbf{E}(Y_i)\mathbf{E}(Y_{i+1})
\end{aligned}$$

car tout meilleur probabiliste de France que vous allez être sait que pour toute variable de Bernoulli X, $X = X^2$

$$\begin{aligned} &= 2\mathbf{E}(X_iX_{i+1}) + 2\mathbf{E}(X_iX_{i+2}) - 2\mathbf{E}(X_iX_{i+1}X_{i+2}) \\ &\qquad + 2\mathbf{E}(X_{i+1}) - \mathbf{E}(Y_i)\mathbf{E}(Y_{i+1}) \\ &\quad \text{par linéarité de } \mathbf{E} \\ &= 2\mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(X_{i+1}) + 2\mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(X_{i+2}) \\ &\qquad - 2\mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(X_{i+1})\mathbf{E}(X_{i+2}) + 2\mathbf{E}(X_{i+1}) - \mathbf{E}(Y_i)\mathbf{E}(Y_{i+1}) \\ &\quad \text{par indépendance des variables} \\ &= 2p^2 + 2p^2 - 2p^3 + 2p - \left(3p - p^2\right)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = p(p-1)^2(2-p)}$$

Bilan :

$$\boxed{\operatorname{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \begin{cases} p(p-1)^2(2-p) & \text{si} \quad j = i+1 \\ 0 & \text{si} \quad j > i+1 \end{cases}}$$

iii. C'est le moment d'utliser la formule la plus détestée du cours ... La variable Z_n admet une variance en tant que combinaison linéaire de telles variables avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(Z_n) &= \mathbf{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}(Y_k) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} p\left(-p^3 + 6p^2 - 10p + 5\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{Cov}(Y_i, Y_{i+1})\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(np\left(-p^3 + 6p^2 - 10p + 5\right) + 2(n-1)p(p-1)^2(2-p)\right) \end{aligned}$$

Et enfin :

$$\boxed{\mathbf{V}(Z_n) = \frac{p(1-p)\left(9n + 6p + 3np^2 - 2p^2 - 11np - 4\right)}{n^2}}$$

(c) Comme l'espérance de Z_n vaut $3p - p^2$ et que :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{V}(Z_n) = 0$$

puisque :

$$\mathbf{V}(Z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{p(1-p)\left(9 + 3p^2 - 11p\right)}{n}$$

ceci est une **condition suffisante** pour conclure que :

$$\boxed{\text{La suite } (Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ converge en probabilité vers la variable certaine égale à } 3p - p^2}$$

8. (a) Le changement logarithmique, vous connaissez, vous l'avez pratiqué des tonnes de fois, alors je serai bref ...
Comme X est à valeurs dans $[1, +\infty[$ alors $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Par suite si $x < 0$,

$$F_Y(x) = 0$$

et si $x \geq 0$ alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y \leq x]) &= \mathbf{P}([\ln X \leq x]) \\ &= \mathbf{P}([X \leq e^x]) \\ &\quad \text{puisque } \exp \text{ est une bijection} \\ &\quad \text{croissante sur } [0, +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= F_X(e^x) \\ &= 1 - \mathbf{P}([X \geq e^x]) \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

et :

$$\boxed{X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)}$$

(b) La question précédente nous engage à travailler sur la convergence en loi de la suite :

$$(\ln T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln X_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

Les variables Y_k sont **indépendantes** et suivent toutes la même loi $\varepsilon(\lambda)$. Par la **loi faible des grands nombres** la suite $(\ln T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $1/\lambda$ et par bijectivité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{(T_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} e^{1/\lambda}}$$

9. (a) C'est du vu et revu, mais il ne faut pas craquer. f est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf en a (en le justifiant dans un certains nombre de dodos), positive sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}$ égale à 1 puisque :

$$\begin{aligned} \lim_{A\to+\infty}\int_a^A \frac{1}{b}e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)}dx &= \lim_{A\to+\infty}\left[-e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)}\right]_a^A \\ &= \lim_{A\to+\infty}\left(1 - e^{-\left(\frac{A-a}{b}\right)}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Par conséquent selon toutes ces vérifications :

$$\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité}}$$

(b) Les impropretés de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{x^2}{b}e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)}dx$ ne se présentent qu'en a et $+\infty$ par continuité de l'intégrande sur $]a, +\infty[$.

– L'intégrale est **faussement impropre en a** du fait que :

$$\lim_{x\to a^+}\frac{x^2}{b}e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)} = \frac{a^2}{b}$$

ce qui rend possible le prolongement par continuité possible en a de l'intégrande.

– Comme :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{b}e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{a/b}}{b}x^4e^{-\frac{1}{b}x} = 0$$

par croissance comparée (exponentielle-puissance),

$$\frac{x^2}{b}e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

avec $\displaystyle\int_{\alpha>a}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ convergente en tant qu'**intégrale de Riemann** de paramètre $2 > 1$. Le **critère de négligeabilité** appliqué aux fonctions positives nous assure que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{x^2}{b}e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)}dx$ converge.

Ainsi X admet un moment d'ordre deux et donc d'ordre un aussi, avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \int_a^{+\infty}\frac{x}{b}e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)}dx \\ &= b\int_a^{+\infty}\left(\frac{bu+a}{b}\right)e^{-u}du \\ &\quad \text{en posant le changement affine } u = \tfrac{x-a}{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} (bu+a)\, e^{-u} du \\
&= b\int_0^{+\infty} ue^{-u} du + a\int_0^{+\infty} e^{-u} du \\
&= b\Gamma(2) + a\Gamma(1)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = a+b}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X^2\right) &= \int_a^{+\infty} \frac{x^2}{b} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)} dx \\
&= \int_a^{+\infty} (bu+a)^2\, e^{-u} du \\
&\quad \text{en posant le changement affine } u = \tfrac{x-a}{b} \\
&= \int_0^{+\infty} \left(a^2 + 2abu + b^2u^2\right) e^{-u} du \\
&= b^2\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du + 2ab\int_0^{+\infty} ue^{-u} du + a^2\int_0^{+\infty} e^{-u} du \\
&= b^2\Gamma(3) + 2ab\Gamma(2) + a^2\Gamma(1) \\
&= 2b^2 + 2ab + a^2
\end{aligned}$$

Finalement par Huygens-Koenig :

$$\boxed{\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - (\mathbf{E}(X))^2 = b^2}$$

(c) C'est reparti ... Nous avons $Y_n(\Omega) \subset [a, +\infty[$ et le célèbrissime résultat :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [Y_n \geq x] = \bigcap_{k=1}^{n} [X_k \geq x]$$

Par **indépendance** des variables X_k en jeu, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y_n \geq x]) &= 1 - F_{Y_n}(x) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X_k \geq x]) \\
&= (\mathbf{P}([X \geq x]))^n \\
&= (1 - F_X(x))^n \\
&\quad \text{puisque les variables sont iid}
\end{aligned}$$

Par dérivation de la fonction F_{Y_n} sur $\mathbb{R} - \{a\}$ nous obtenons f_{Y_n} une densité de Y_n sans oublier de compléter la définition en posant $f_{Y_n}(a) = \dfrac{n}{b}$. Cela donne pour tout réel x où F_{Y_n} est dérivable,

$$f_{Y_n}(x) = n(1 - F_X(x))^{n-1} f(x)$$

et comme :

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ \displaystyle\int_a^x \frac{1}{b} e^{-\left(\frac{t-a}{b}\right)} dt & \text{si} \quad x > a \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ \left[-e^{-\left(\frac{t-a}{b}\right)}\right]_a^x & \text{si} \quad x > a \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)} & \text{si} \quad x > a \end{cases}
\end{aligned}$$

alors :

$$(1-F_X(x))^{n-1}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\leq a\\ e^{-(n-1)\left(\frac{x-a}{b}\right)} & \text{si} \quad x>a\end{cases}$$

et :

$$f_{Y_n}(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{b}e^{-(n-1)\left(\frac{x-a}{b}\right)}e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)} & \text{si} \quad x\geq a\\ 0 & \text{si} \quad x<a\end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{f_{Y_n}(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{b}e^{-n\left(\frac{x-a}{b}\right)} & \text{si} \quad x\geq a\\ 0 & \text{si} \quad x<a\end{cases}}$$

Les impropretés de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{nx^2}{b}e^{-n\left(\frac{x-a}{b}\right)}dx$ ne se présentent qu'en $+\infty$ par continuité de l'intégrande sur $]a,+\infty[$. Comme :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^4}{b}e^{-n\left(\frac{x-a}{b}\right)}=\lim_{x\to+\infty}bne^{\frac{na}{b}}\left(\frac{x}{\sqrt{b}}\right)^4e^{-\frac{n}{\sqrt{b}}\left(\frac{x}{\sqrt{b}}\right)}=0$$

par croissance comparée (exponentielle-puissance),

$$\frac{nx^2}{b}e^{-n\left(\frac{x-a}{b}\right)}=o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

avec $\displaystyle\int_{\beta>a}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ convergente en tant qu'**intégrale de Riemann** de paramètre $2>1$. Le **critère de négligeabilité** appliqué aux fonctions positives nous assure que l'intégrale $\displaystyle\int_{\beta>a}^{+\infty}\frac{x^2}{b}e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)}dx$ converge. Ainsi X admet un moment d'ordre deux et donc d'ordre un aussi, avec :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y_n)&=\int_a^{+\infty}\frac{nx}{b}e^{-n\left(\frac{x-a}{b}\right)}dx\\&=\frac{n}{b}\frac{b}{n}\int_a^{+\infty}\left(\frac{bu+na}{n}\right)e^{-u}du\\&\qquad\text{en posant le changement affine } u=n\left(\tfrac{x-a}{b}\right)\\&=\int_0^{+\infty}\left(\frac{b}{n}u+a\right)e^{-u}du\\&=\frac{b}{n}\int_0^{+\infty}ue^{-u}du+a\int_0^{+\infty}e^{-u}du\\&=\frac{b}{n}\Gamma(2)+a\Gamma(1)\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y_n)=a+\frac{b}{n}}\tag{28}$$

De même :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(Y_n^2\right)&=\int_a^{+\infty}\frac{nx^2}{b}e^{-n\left(\frac{x-a}{b}\right)}dx\\&=\frac{n}{b}\frac{b}{n}\int_a^{+\infty}\left(\frac{bu+na}{n}\right)^2e^{-u}du\\&\qquad\text{en posant le changement affine } u=n\left(\tfrac{x-a}{b}\right)\\&=\frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty}\left(n^2a^2+2nabu+b^2u^2\right)e^{-u}du\\&=\frac{b^2}{n^2}\int_0^{+\infty}u^2e^{-u}du+\frac{2ab}{n}\int_0^{+\infty}ue^{-u}du+a^2\int_0^{+\infty}e^{-u}du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{b^2}{n^2}\Gamma(3) + \frac{2ab}{n}\Gamma(2) + a^2\Gamma(1) \\ &= \frac{2b^2}{n^2} + \frac{2ab}{n} + a^2 \end{aligned}$$

Finalement par Huygens-Koenig :

$$\boxed{\mathbf{V}(Y_n) = \mathbf{E}\left(Y_n^2\right) - \left(\mathbf{E}(Y_n)\right)^2 = \frac{b^2}{n^2}} \tag{29}$$

(d) Par définition, nous devons montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([|Y_n - a| \geq \varepsilon]) = 0$$

Là encore au lieu de "galérer" avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, nous avons un "plan discret et rapide" en téléphonant au 61014 comme le disait une pub qui passant sur M6 pendant 100% foot, je veux parler de l'utilisation de l'inégalité de Markov. L'académicien des Sciences de Saint-Pétersbourg nous fait donc écrire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}([|Y_n - a| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{E}\left((Y_n - a)^2\right)}{\varepsilon^2}$$

puisque vous savez bien que :

$$[|Y_n - a| \geq \varepsilon] = \left[(Y_n - a)^2 \geq \varepsilon^2\right]$$

bijectivité de $x \longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ oblige ... avec selon la formule de Koenig inversée :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}([|Y_n - a| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{V}((Y_n - a)) + (\mathbf{E}(Y_n - a))^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{\mathbf{V}(Y_n) + (\mathbf{E}(Y_n) - a)^2}{\varepsilon^2}$$

par propiété élémentaire de $\mathbf{E}$ et de $\mathbf{V}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{V}(Y_n) = 0$ selon (29) et $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(Y_n) = a$ selon (28) nous sommes sauvés puisque :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{V}(Y_n) + (\mathbf{E}(Y_n) - a)^2}{\varepsilon^2} = 0$$

et ainsi par théorème d'encadrement :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([|Y_n - a| \geq \varepsilon]) = 0}$$

Autrement dit :

$$\boxed{(Y_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} a}$$

(e) Au pays de $\mathcal{L}_d^2$ (espace vectoriel des variables discrètes admettant un moment d'ordre deux) les variables admettant une espérance et une variance sont reines. Ainsi Z_n admet une espérance et une variance en tant que combinaison linéaire finie de telles variables avec par théorème (linéarité de l'espérance) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z_n) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{E}(X_i) - \mathbf{E}(Y_n)) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_i) - \mathbf{E}(Y_n) \\ &= \frac{1}{n} n\mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(Y_n) \\ &\quad \text{car les variables } X_i \text{ suivent la même} \\ &\quad \text{loi que } X \\ &= \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(Y_n) \\ &= a + b - \left(a + \frac{b}{n}\right) \end{aligned}$$

et :

$$\boxed{\mathbf{E}(Z_n) = b\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(Z_n) &= \mathbf{V}\left(\frac{U_n}{n} - Y_n\right) \\
&= \mathbf{V}\left(\frac{U_n}{n}\right) + \mathbf{V}(Y_n) - 2\,\mathrm{Cov}\left(\frac{U_n}{n}, Y_n\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbf{V}(U_n) + \mathbf{V}(Y_n) - \frac{2}{n}\,\mathrm{Cov}(U_n, Y_n) \\
&= \frac{1}{n^2} n\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y_n) - \frac{2}{n}\,\mathrm{Cov}(U_n, Y_n)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\mathbf{V}(Z_n) = \frac{b^2}{n} + \frac{b^2}{n^2} - \frac{2}{n}\,\mathrm{Cov}(U_n, Y_n)}$$

Le baron Augustin Louis Cauchy prof à l'X au XIX$^{\text{ème}}$ siècle et Hermann Amandus Schwarz viennent à notre secours par l'intermédiaire de leur célèbre inégalité pour nous asséner imparablement que :

$$|\mathrm{Cov}(U_n, Y_n)| \leq \sigma(U_n)\,\sigma(Y_n)$$

donc :

$$|\mathrm{Cov}(U_n, Y_n)| \leq \sqrt{nb^2}\left(\frac{b}{n}\right) = \frac{b^2}{\sqrt{n}}$$

Le théorème d'encadrement nous donne $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Cov}(U_n, Y_n) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{V}(Z_n) = 0$. La suite est du même acabit que ce qui a été fait précédemment à savoir :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}([|Z_n - b| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbf{V}((Z_n - b)) + (\mathbf{E}(Z_n - b))^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{\mathbf{V}(Z_n) + (\mathbf{E}(Z_n) - b)^2}{\varepsilon^2}$$

par propiété élémentaire des opérateurs $\mathbf{E}$ et de $\mathbf{V}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{V}(Z_n) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(Z_n) = b$ selon (30) nous sommes sauvés puisque :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{V}(Z_n) + (\mathbf{E}(Z_n) - b)^2}{\varepsilon^2} = 0$$

et ainsi par théorème d'encadrement :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([|Z_n - b| \geq \varepsilon]) = 0}$$

Autrement dit :

$$\boxed{(Z_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} b}$$

10. (a) **Par stabilité de la loi de Poisson pour la somme de variables indépendantes** il vient que :

$$\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)}$$

(b) La fonction exponentielle étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, **la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre $p \geq 0$** appliquée à la fonction exp sur $[0, n]$ où $n \geq 1$ nous donne :

$$e^n = \sum_{k=0}^{p} \frac{n^k}{k!} + \int_0^n \frac{(n-t)^p}{p!} e^t dt$$

ou encore par le changement de variable affine donc licite $u = n - t$, $du = -dt$:

$$e^n = \sum_{k=0}^{p} \frac{n^k}{k!} + \int_0^n \frac{u^p}{p!} e^{n-u} du$$

Il vient donc :

$$\mathbf{P}([S_n > n]) = 1 - \mathbf{P}([S_n \leq n]) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n}$$

En posant $p = n$ et en multipliant les deux membres par e^{-n} dans (1) on obtient :

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k e^{-n}}{k!} + \int_0^n \frac{u^n}{n!} e^{-u} du$$

soit donc :

$$\boxed{\mathbf{P}([S_n > n]) = \frac{1}{n!} \int_0^n t^n e^{-t} dt}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([S_n < n]) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} e^{-n} \\
&= 1 - \int_0^n \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} dt - \int_0^n \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} dt \\
& \text{par Chasles} \\
&= \int_n^{+\infty} \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P}([S_n < n]) = \frac{1}{(n-1)!} \int_n^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt}$$

(c) Soit $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([S_{n+1} > n+1]) - \mathbf{P}([S_n > n]) &= \int_0^{n+1} \frac{t^{n+1} e^{-t}}{(n+1)!} dt - \int_0^n \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt \\
&= \int_0^n \frac{t^{n+1} e^{-t}}{(n+1)!} dt + \int_n^{n+1} \frac{t^{n+1} e^{-t}}{(n+1)!} dt - \int_0^n \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt \\
& \text{par Chasles} \\
&= \int_n^{n+1} \frac{t^{n+1} e^{-t}}{(n+1)!} dt + \int_0^n \frac{t^{n+1} e^{-t}}{(n+1)!} dt - \int_0^n \frac{(n+1)\, t^n e^{-t}}{(n+1)!} dt \\
&= \int_n^{n+1} \frac{t^{n+1} e^{-t}}{(n+1)!} dt + \frac{1}{(n+1)!} \int_0^n \left(t^{n+1} - (n+1)\, t^n\right) e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \left(\int_n^{n+1} t^{n+1} e^{-t} dt - \left[t^{n+1} e^{-t}\right]_0^n \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \left(\int_n^{n+1} t^{n+1} e^{-t} dt - n^{n+1} e^{-n} \right)
\end{aligned}$$

Une petite étude de $t \mapsto t^{n+1} e^{-t}$ sur $[n, n+1]$ montre qu'elle est continue et strictement croissante sur cet intervalle, ainsi :

$$\int_n^{n+1} t^{n+1} e^{-t} dt \geq n^{n+1} e^{-n} \int_n^{n+1} dt \geq n^{n+1} e^{-n}$$

et :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\mathbf{P}([S_n > n])\right)_n \text{ est strictement croissante}}$$

Je vous laisse raisonner de même pour la suite $\left(\mathbf{P}([S_n < n])\right)_n$. Comme les deux suites sont bornées en tant que suites de probabilités, le **théorème de la convergence monotone** nous indique qu'elles sont **convergente**s.

(d) La suite (X_n) vérifie les propriétés "i.i.d.-iènnes" du théorème de la limite centrée. On peut affirmer que la suite de terme général $T_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une **variable normale centrée et réduite**. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([S_n > n]) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([T_n > 0]) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([S_n < n]) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([T_n < 0]) = \frac{1}{2}}$$

(e) Pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbf{P}([S_n = n]) = 1 - \mathbf{P}([S_n > n]) - \mathbf{P}([S_n < n])$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([S_n = n]) = 0$$

il s'ensuit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([S_n \leq n]) = \frac{1}{2}}$$

11. (a) i. Comme X et Y sont deux variables à densité indépendantes, nous savons que $X + Y$ reste une variable à densité dont une densité g est obtenue par le **théorème de convolution** :

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) f(z-u)\, du$$

Nous savons que $f_X(u) f(z-u) \neq 0$ si et seulement si $u \in]0, t]$ et $z - u \geq 0$ soit si et seulement si $0 < u \leq \min(z, t)$, ainsi :

$$g(z) = \int_0^{\min(z,t)} \frac{1}{t} f(z-u)\, du$$

Comme z est compris entre 0 et t :

$$g(z) = \int_0^z \frac{1}{t} f(z-u)\, du = \int_0^z \frac{1}{t} f(v)\, dv$$

en posant le changement affine $v = z - u$.

$$\boxed{\forall z \in [0, t], \quad g(z) = \frac{F(z)}{t}}$$

ii. Sans difficulté, pour $t \geq 0$:

$$\mathbf{P}([X + Y \leq t]) = \int_0^t g(z)\, dz = \frac{1}{t} \int_0^t F(z)\, dz$$

En intégrant par parties, puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ de même pour $z \mapsto z$, il vient :

$$\mathbf{P}([X + Y \leq t]) = \frac{1}{t} \left([zF(z)]_0^t - \int_0^t z f(z)\, dz \right)$$

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad \mathbf{P}([X + Y \leq t]) = F(t) - \frac{1}{t} \int_0^t z f(z)\, dz}$$

iii. Nous avons :

$$0 \leq t\mathbf{P}([Y > t]) = t \underbrace{\int_t^{+\infty} f(z)\, dz}_{\substack{\text{dans cet intégrale} \\ z \geq t}} \leq \int_t^{+\infty} z f(z)\, dz$$

et ce majorant tend vers **0** quand t tend vers $+\infty$ par convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} z f(z)\, dz$ (analogie avec le reste d'ordre n d'une série convergente).

iv. Nous avons que $tp_t = t\mathbf{P}([X+Y>t])$ et d'après le **b**. que :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{P}([X+Y \leq t]) = F(t) - \frac{1}{t}\int_0^t zf(z)\,dz$$

donc en réécrivant un peu :

$$\forall t \geq 0, \quad 1-\mathbf{P}([X+Y>t]) = 1-\mathbf{P}([Y>t]) - \frac{1}{t}\int_0^t zf(z)\,dz$$

soit encore en multipliant membre à membre par t :

$$\forall t \geq 0, \quad t - t\mathbf{P}([X+Y>t]) = t - t\mathbf{P}([Y>t]) - \int_0^t zf(z)\,dz$$

et en arrangeant encore :

$$\forall t \geq 0, \quad -tp_t = -t\mathbf{P}([Y>t]) - \int_0^t zf(z)\,dz$$

Finalement :

$$tp_t = t\mathbf{P}([Y>t]) + \int_0^t zf(z)\,dz$$

Lorsque t tend vers l'infini :

– La quantité $t\mathbf{P}([Y>t])$ tend vers 0 selon **a.iii** ;

– L'intégrale $\int_0^t zf(z)\,dz$ tend vers $\mathbf{E}(Y)$.

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} tp_t = \mathbf{E}(Y)}$$

(b) i. Voici un **problème classique de relativisation** (nombre de personnes encore en train d'utiliser un automate à l'instant t par rapport à celui des personnes se présentant à l'un des automates entre les instants 0 et t). Vous savez que dans ce cas-là la **formule des probabilités totales** régne en maître associée au système complet d'événements $([C_t = n])_{n\geq 0}$, cela donne pour tout entier k :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([D_t = k]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{[C_t=n]}([D_t=k])\,\mathbf{P}([C_t=n]) \\
&= 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}_{[C_t=n]}([D_t=k])\,\mathbf{P}([C_t=n]) \\
&\quad \text{car le nombre de personnes encore en train d'utiliser un automate} \\
&\quad \text{est inférieur ou égal à celui personnes se présentant à l'un des} \\
&\quad \text{automates} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}_{[C_t=n]}([D_t=k])\,\mathbf{P}([C_t=n]) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p_t^k (1-p_t)^{n-k} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&\quad \text{car loi conditionnelle de } D_t \text{ sachant que } [C_t=n] \text{ est la loi} \\
&\quad \text{binomiale de paramètres } n \text{ et } p_t \\
&= e^{-\lambda t}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p_t^k (1-p_t)^{n-k} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda t} p_t^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(1-p_t)^{n-k}}{(n-k)!} (\lambda t)^n \\
&= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t p_t)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(1-p_t)^{n-k}}{(n-k)!} (\lambda t)^{n-k} \\
&= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t p_t)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda t(1-p_t))^{n-k}}{(n-k)!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{-\lambda t}\left(\lambda t p_t\right)^k}{k!}\exp\left(\lambda t\left(1-p_t\right)\right) \\
&= \frac{e^{-\lambda t p_t}\left(\lambda t p_t\right)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

En conclusion :

$$\boxed{D_t \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\lambda t p_t\right)}$$

ii. Pour tout entier k :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-\lambda n p_n}\left(\lambda n p_n\right)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda \mathbf{E}(Y)}\left(\lambda \mathbf{E}\left(Y\right)\right)^k}{k!}$$

donc :

$$\forall k\in\mathbf{N},\quad \lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(\left[D_n=k\right]\right) = \frac{e^{-\lambda \mathbf{E}(Y)}\left(\lambda \mathbf{E}\left(Y\right)\right)^k}{k!}$$

et d'après le cours :

$$\boxed{\left(D_n\right)\xrightarrow{\mathcal{L}} L \quad \text{où} \quad L\hookrightarrow\mathcal{P}\left(\lambda\mathbf{E}\left(Y\right)\right) \quad \text{avec} \quad \mathbf{E}\left(L\right)=\lambda\mathbf{E}\left(Y\right)}$$

12. (a) La fonction f_n est positive, continue sauf en 0 (à détailler) et d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}$ puisque par définition f_n est nulle en dehors du segment $[0,1]$ et $\int_0^1 (n+1)(1-x)^n\,dx$ converge en tant qu'intégrale de fonction polynomiale avec :

$$\int_0^1 (n+1)(1-x)^n\,dx = \left[-(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = 1$$

Toutes les conditions sont réunies pour affirmer que f_n est bien une **densité de probabilité**. La variable aléatoire Y_n est à valeurs dans $[0,n]$. Notons F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n avec :

$$
\begin{aligned}
F_{Y_n}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \mathbf{P}\left(\left[X_n\leq \dfrac{x}{n}\right]\right) & \text{si} \quad x\in[0,n] \\ 1 & \text{si} \quad x>n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ (n+1)\displaystyle\int_0^{x/n}(1-t)^n\,dt & \text{si} \quad x\in[0,n] \\ 1 & \text{si} \quad x>n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ 1-\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{n+1} & \text{si} \quad x\in[0,n] \\ 1 & \text{si} \quad x>n \end{cases}
\end{aligned}
$$

Nous avons :
- Si $x<0$: $\lim_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x)=0$;
- Si $x\geq 0$ alors pour n assez grand, on a $0\leq x\leq n$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x) = 1-e^{-x}$$

puisque :

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1} = \exp\left((n+1)\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right) = e^{-x}$$

et :

$$(n+1)\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim} -n\frac{x}{n}\sim -x \quad \text{et} \quad \lim_{t\to -x}e^t = e^{-x}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\text{La suite } \left(Y_n\right)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge en loi vers une variable suivant la loi exponentielle } \varepsilon\left(1\right)}$$

(b) La fonction f_n est positive, continue sauf en 0 (à détailler) et d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}$ puisque par définition f_n est nulle en dehors du segment $[0,1]$ et $\int_0^1 (n+1)(n+2)\, x\,(1-x)^n\, dx$ converge en tant qu'intégrale de fonction polynomiale avec :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (n+1)(n+2)\, x\,(1-x)^n\, dx &= (n+1)(n+2)\int_0^1 (1-u)\, u^n du \\
&\quad \text{en posant le changement de variable} \\
&\quad \text{affine donc licite } u = 1-x \ \ (du = -dx) \\
&= (n+1)(n+2)\left(\int_0^1 u^n du - \int_0^1 u^{n+1} du\right) \\
&\quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= (n+1)(n+2)\left[\frac{u^{n+1}}{n+1} - \frac{u^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Toutes les conditions sont réunies pour affirmer que f_n est bien une **densité de probabilité**. La variable aléatoire Y_n est encore à valeurs dans $[0,n]$. Notons F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n avec :

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \mathbf{P}\left(\left[X_n \leq \frac{x}{n}\right]\right) & \text{si } x \in [0,n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ (n+1)(n+2)\displaystyle\int_0^{x/n} t\,(1-t)^n\, dx & \text{si } x \in [0,n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ (n+2)\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}\right) - (n+1)\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+2}\right) & \text{si } x \in [0,n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-\left(\frac{n+1}{n}x+1\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1} & \text{si } x \in [0,n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}
\end{aligned}$$

Nous avons :

- Si $x<0$: $\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = 0$;
- i $x \geq 0$ alors pour n assez grand, on a $0 \leq x \leq n$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = 1-(x+1)\,e^{-x}$$

puisque :

$$\left(\frac{n+1}{n}x+1\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}x+1\right)\exp\left((n+1)\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)$$

et

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)x+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} x+1, \quad (n+1)\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\frac{x}{n} \sim -x \quad \text{et} \quad \lim_{t\to-x} e^t = e^{-x}$$

Par conséquent la "fonction limite" est définie par :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-(x+1)\,e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

A ce niveau-là on vérifie qu'elle est de classe $\mathcal{C}^0$ partout et de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout,croissante au sens large de limite nulle en $-\infty$ et égale à 1 en $+\infty$ ce qui signifie que F_Y est la fonction de répartition d'une variable à densité Y dont une densité f_Y est obtenue par dérivation de F_Y sur $\mathbb{R}^*$ et en posant $f_Y(0) = 0$ ce qui donne :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La suite } (Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge en loi vers une variable suivant la loi } \Gamma(1,2)}$$

13. (a) L'énoncé nous anonce de suite la "couleur" en affirmant que M_n est une variable à densité ce que l'on confirme en montrant que pour tout réel x, $M_n^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$ (condition nécessaire et suffisante) avec $M_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$ en tant que maximum de variables exponentielles.
   - $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $M_n^{-1}(]-\infty, x]) = \emptyset \in \mathcal{A}$;
   - $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $M_n^{-1}(]-\infty, x]) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} X_k^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$ par stabilité de $\mathcal{A}$ pour l'intersection puisque $\forall k \in [\![1, n]\!]$, les X_k sont des variables aléatoires.

   Par conséquent M_n est une variable aléatoire.
   - Déterminons F_{M_n} la fonction de répartition de M_n définie sur $\mathbb{R}$ par $F_{M_n}(x) = \mathbf{P}([M_n \leq x])$.
     - Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, $F_{M_n}(x) = 0$ d'après le résultat précédent.
     - Si $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leq x]\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X_k \leq x]) \\ &= (\mathbf{P}([X_1 \leq x]))^n \text{ puisque les variables } X_k \text{ sont iid} \\ &= \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^n \end{aligned} \tag{31}$$

   Faisons le bilan :

$$F_{M_n}(x) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^n & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Il n'est pas difficile de constater à ce niveau-là que F_{M_n} est continue sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{R}_-^*$ coïncidence avec la fonction nulle et sur $\mathbb{R}_+$ composée de $x \longmapsto 1 - e^{-\lambda x}$ continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $[0, 1]$ et de $x \longmapsto x^n$ continue sur $[0, 1]$ avec en plus $\lim\limits_{x\to 0^-} F_{M_n}(x) = 0 = F_{M_n}(0)$) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur au moins $\mathbb{R}^*$ par le même type de raisonnement. Ces deux propriétés nous permettent donc de dire que M_n est une variable à densité dont une densité f_{M_n} sera obtenue par dérivation de F_{M_n} sur $\mathbb{R}^*$ et en donnant une valeur arbitraire positive à $f_{M_n}(0)$, par exemple 0. Après calculs nous obtenons :

$$\boxed{f_{M_n}(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{n-1} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

(b) i. Par définition de l'espérance et de f_{M_n}, la variable M_n admet une espérance si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} n\lambda x e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{n-1} dx$ est convergente. En cas de convergence

$$\mathbf{E}(M_n) = \int_0^{+\infty} n\lambda x e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{n-1} dx$$

La continuité de l'intégrande sur $\mathbb{R}_+$ entraîne que l'intégrale présente une impropreté en $+\infty$. Or

$$n\lambda x^3 e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{n-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} n\lambda x^3 e^{-\lambda x}$$

car

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{n-1} = 1 \neq 0$$

donc
$$\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{n-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$$
Par croissance comparée (exponentielle-puissance)
$$\lim_{x\to+\infty} n\lambda x^3 e^{-\lambda x} = 0$$
alors
$$n\lambda x e^{-\lambda x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
et c'est à ce moment-là qu'intervient Riemann dont les travaux conclurent à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ car de paramètre $2>1$. Le critère de négligeabilité appliqué aux fonctions positives assure la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} n\lambda x e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{n-1} dx$ donc aussi celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} n\lambda x e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{n-1} dx$ (par continuité de l'intégrande sur $\mathbb{R}_+$).

$$\boxed{\text{La variable } M_n \text{ admet une espérance égale à } \int_0^{+\infty} n\lambda x e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{n-1} dx}$$

En posant dans l'intégrale le changement de variable bijectif et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ $u(x) = 1-e^{-\lambda x}$ nous obtenons une intégrale convergente aussi égale à $\mathbf{E}(M_n)$ (par théorème du changement de variable appliqué à une intégrale convergente). Comme $du = \lambda e^{-\lambda x} dx$, $x = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-u)$, $u(0)=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x) = 1$:
$$\int_0^{+\infty} n\lambda x e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{n-1} dx = -\frac{n}{\lambda}\int_0^1 u^{n-1}\ln(1-u)\,du$$
soit encore :
$$\boxed{\mathbf{E}(M_n) = -\frac{n}{\lambda}\int_0^1 u^{n-1}\ln(1-u)\,du}$$

ii. La relation de récurrence liant I_k à I_{k-1} s'obtiendra par une intégration par parties. Posons pour $A\in\,]0,1]$, $I_k(A) = \displaystyle\int_0^A u^k\ln(1-u)\,du$ (nous savons que $\displaystyle\lim_{A\to1} I_k(A) = I_k$ par définition de la convergence). Les fonctions $u\longmapsto u^k$ et $u\longmapsto(1-u)(1-\ln(1-u))$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,A]$ (on intègre $u\longmapsto\ln(1-u)$ et on dérive $u\longmapsto u^k$), on obtient :
$$\begin{aligned}
\int_0^A u^k\ln(1-u)\,du &= \left[u^k(1-u)(1-\ln(1-u))\right]_0^A \\
&\qquad - \int_0^A ku^{k-1}(1-u)(1-\ln(1-u))\,du \\
&= A^k(1-A)(1-\ln(1-A)) \\
&\qquad - \int_0^A ku^{k-1}(1-u)(1-\ln(1-u))\,du \\
&= A^k(1-A)(1-\ln(1-A)) \\
&\qquad - k\int_0^A u^{k-1}(1-u)\,du \\
&\qquad\qquad + \int_0^A ku^{k-1}(1-u)\ln(1-u)\,du \\
&= A^k(1-A) - A^k(1-A)\ln(1-A) \\
&\qquad - k\left[\frac{u^k}{k} - \frac{u^{k+1}}{k+1}\right]_0^A + k\int_0^A u^{k-1}\ln(1-u)\,du \\
&\qquad - k\int_0^A u^k\ln(1-u)\,du
\end{aligned}$$

Et oui ... contrairement aux habitudes il fallait primitiver le logarithme sinon sa dérivation l'aurait fait disparaître ce qui aurait été très génant pour avoir une chance de retrouver I_{k-1}. En faisant tendre A vers 1 nous obtenons facilement :

$$I_k = -k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + kI_{k-1} - kI_k$$

En regroupant les termes en I_k il vient :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (1+k)\, I_k = -\frac{1}{k+1} + kI_{k-1}}$$

iii. La déduction est simple puisque $\mathbf{E}\,(M_n) = -\dfrac{n}{\lambda} I_{n-1}$ et en sommant l'égalité précédente sur k allant de 1 à $n-1$ avec $n \geq 2$, nous obtenons :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \left((1+k)\, I_k - kI_{k-1}\right)}_{\text{somme téléscopique}} = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

soit encore :

$$nI_{n-1} - I_0 = -\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

Or :

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^1 \ln(1-u)\, du \\
&= \lim_{A\to 1} \left[(1-u)\,(1-\ln(1-u))\right]_0^A \\
&= \lim_{A\to 1} \left((1-A)\,(1-\ln(1-A)) - 1\right) \\
&= -1
\end{aligned}$$

D'où

$$nI_{n-1} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

et :

$$\boxed{\mathbf{E}\,(M_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

iv. Il est de notoriété publique que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$$

donc :

$$\boxed{\mathbf{E}\,(M_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{\lambda}}$$

(c) i. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ continue (en tant que produit et composée) et positive sur $\mathbb{R}$. Il ne nous reste plus qu'à étudier la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$. Cette intégrale converge si $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f$ convergent. Profitons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx} \exp\left(-e^{-x}\right) = e^{-x} \exp\left(-e^{-x}\right)$$

pour partialiser.

$$\begin{aligned}\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-x}\exp\left(-e^{-x}\right)dx &= \lim_{A\to+\infty}\left[\exp\left(-e^{-x}\right)\right]_0^A\\ &= \lim_{A\to+\infty}\left(\exp\left(-e^{-A}\right)-e^{-1}\right)\\ &= 1-e^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{B\to-\infty}\int_B^0 e^{-x}\exp\left(-e^{-x}\right)dx &= \lim_{B\to-\infty}\left[\exp\left(-e^{-x}\right)\right]_B^0\\ &= \lim_{B\to-\infty}\left(e^{-1}-\exp\left(-e^{-B}\right)\right)\\ &= e^{-1}\end{aligned}$$

Comme les deux limites existent et sont finies les intégrales $\int_{-\infty}^0 f$ et $\int_0^{+\infty} f$ convergent ce qui entraîne de $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ qui vaut par Chasles :

$$\int_{-\infty}^0 f+\int_0^{+\infty} f = 1-e^{-1}+e^{-1}=1$$

Tous ces constats nous assurent que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien une densité de probabilité}}$$

ii. Toute étude de convergence en loi passe, au préalable, par la recherche d'une fonction de répartition, en l'occurrence par celle de la variable $\lambda M_n-\ln n$ notée $F_{\lambda M_n-\ln n}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_{\lambda M_n-\ln n}(x)=\mathbf{P}\left([\lambda M_n-\ln n\leq x]\right)$$

Comme $(\lambda M_n-\ln n)(\Omega)\subset[-\ln n,+\infty[$, si $x<-\ln n$, $F_{\lambda M_n-\ln n}(x)=0$ et si $x\geq-\ln n$:

$$\begin{aligned}F_{\lambda M_n-\ln n}(x) &= \mathbf{P}\left(\left[M_n\leq\frac{x+\ln n}{\lambda}\right]\right)\\ &= F_{M_n}\left(\frac{x+\ln n}{\lambda}\right)\\ &= \left(1-e^{-(x+\ln n)}\right)^n \text{ selon (31)}\\ &= \left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)^n\end{aligned}$$

Faisons le bilan :

$$F_{\lambda M_n-\ln n}(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si}\quad x\geq-\ln n\\ 0 & \text{si}\quad x<-\ln n\end{cases}$$

Passons à la limite de $F_{\lambda M_n-\ln n}$ quand n tend vers $+\infty$ pour $x\in\mathbb{R}$ (signalons que F_X est dérivable[31] sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$). La condition $x<-\ln n$ est impossible à réaliser lorsque n tend vers l'infini et dans le cas contraire x couvre tout $\mathbb{R}$, ainsi pour x fixé dans $\mathbb{R}$:

$$F_{\lambda M_n-\ln n}(x)=\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)\right)$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)=-e^{-x}$$

[31] Car f est continue sur $\mathbb{R}$.

car :

$$n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)\sim-\frac{ne^{-x}}{n}\sim-e^{-x}$$

la continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ assure que pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}F_{\lambda M_n-\ln n}(x) &= \exp\left(-e^{-x}\right)\\ &= \int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt\\ &= F_X(x)\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite de variables aléatoires de terme général } \lambda M_n-\ln n \text{ converge en loi vers } X}$$

18 Estimations

1. (a) On commence par une question de cours. *La loi de Poisson étant stable pour la somme de variables indépendantes* nous pouvons conclure que :

$$\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)}$$

(b) ► Pour juger du choix proposé commençons par déterminer l'espérance, en cas d'existence bien sûr, de Z_n.

Pour commencer notez bien que $Z_n = e^{-\frac{Y_n}{n}}$. Par le *théorème de transfert* :

$$Z_n \text{ admet une espérance} \iff \sum_k e^{-\frac{k}{n}}\mathbf{P}([Y_n = k]) \quad \text{converge}$$

Or pour tout entier k :

$$e^{-\frac{k}{n}}\mathbf{P}([Y_n = k]) = \frac{e^{-\frac{k}{n}}e^{-n\lambda}(n\lambda)^k}{k!} = \frac{e^{-n\lambda}\left(n\lambda e^{-\frac{1}{n}}\right)^k}{k!}$$

Ainsi le terme général de la série étudiée est proportionnel à celui d'une exponentielle (donc convergente). La variable Z_n admet une espérance égale à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z_n) &= \sum_{k\geq 0}\frac{e^{-n\lambda}\left(n\lambda e^{-\frac{1}{n}}\right)^k}{k!}\\
&= \exp\left(-n\lambda + n\lambda e^{-\frac{1}{n}}\right)\\
&= \exp\left(n\lambda\left(e^{-\frac{1}{n}} - 1\right)\right)
\end{aligned}$$

Il est clair que l'espérance de Z_n est différente de $e^{-\lambda}$, mais :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{E}(Z_n) = e^{-\lambda}$$

car :

$$n\lambda\left(e^{-\frac{1}{n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n\lambda}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\lambda$$

et la continuité de la fonction exponentielle permet de conclure.

Conclusion :

$$\boxed{Z_n \text{ est un estimateur asymptotiquement sans biais de } e^{-\lambda}}$$

► Examinons si la suite $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est-elle convergente en probabilité vers $e^{-\lambda}$? Pour cela voyons si $\lim_{n\to+\infty}\mathbf{V}(Z_n) = 0$ car je rappelle le théorème :

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to+\infty} B\left(Z_n, e^{-\lambda}\right) = 0\\ \lim_{n\to+\infty}\mathbf{V}(Z_n) = 0\end{array}\right\} \implies (Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ converge en probabilité vers } e^{-\lambda}$$

Commençons par le moment d'ordre deux de Z_n : par le *théorème de transfert* :

$$(Z_n^2 \text{ admet une espérance}) \iff \left(\sum_{k\geq 0}\left(e^{-\frac{k}{n}}\right)^2\mathbf{P}([Y_n = k]) \text{ converge}\right)$$

Or pour tout entier k :

$$\begin{aligned}
\left(e^{-\frac{k}{n}}\right)^2\mathbf{P}([Y_n = k]) &= e^{-\frac{2k}{n}}\mathbf{P}([Y_n = k])\\
&= \frac{e^{-\frac{2k}{n}}e^{-n\lambda}(n\lambda)^k}{k!}\\
&= \frac{e^{-n\lambda}\left(n\lambda e^{-\frac{2}{n}}\right)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Ainsi le terme général de la série étudiée est proportionnel à celui d'une exponentielle (donc convergente). La variable Z_n admet un moment d'ordre deux égal à :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(Z_n^2\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} e^{-n\lambda} \left(n\lambda e^{-\frac{2}{n}}\right)^k \\ &= \exp\left(-n\lambda + n\lambda e^{-\frac{2}{n}}\right) \\ &= \exp\left(n\lambda\left(e^{-\frac{2}{n}} - 1\right)\right)\end{aligned}$$

Par conséquent Z_n admet une variance égale, selon le *théorème de Huygens-Koenig* à :

$$\mathbf{V}\left(Z_n\right) = \mathbf{E}\left(Z_n^2\right) - \left(\mathbf{E}\left(Z_n\right)\right)^2 = \exp\left(n\lambda\left(e^{-\frac{2}{n}} - 1\right)\right) - \exp\left(2n\lambda\left(e^{-\frac{1}{n}} - 1\right)\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(Z_n^2\right) = e^{-2\lambda}$$

car :

$$n\lambda\left(e^{-\frac{2}{n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2n\lambda}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -2\lambda$$

N'oublions pas que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\mathbf{E}\left(Z_n\right)\right)^2 = e^{-2\lambda}$$

et la continuité de la fonction exponentielle permet de conclure.
Conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{V}\left(Z_n\right) = 0$$

$$\boxed{\text{La suite } \left(Z_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ converge en probabilité vers } e^{-\lambda}}$$

(c) Pour tout entier i compris entre 1 et n, on pose $Y_i = 1$ si $X_i = 0$ et $Y_i = 0$ sinon. Alors il est clair que $K_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ et :

$$K_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, e^{-\lambda}\right)$$

On peut déduire beaucoup de résultats concernant la suite, par exemple, selon le *théorème de la limite centrée*, la suite $\left(Z_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable suivant une loi normale, mais ce n'est pas le contexte de l'exercice qui a pour but de proposer différents estimateurs potentiels de $\theta = e^{-\lambda}$. La variable K_n admet une espérance et une variance en tant que variable binomiale avec :

$$\mathbf{E}\left(Z_n\right) = e^{-\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}\left(Z_n\right) = \frac{e^{-\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ces deux résultats permettent de dire facilement que :

$$\boxed{\text{la suite } \left(Z_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ converge en probabilité vers } e^{-\lambda}}$$

Quant au choix du meilleur des deux estimateurs vous préférerez le deuxième (celui de la troisième question) car il est sans biais, mais pour effectuer définitivement ce choix vous devrez comparer les *risques quadratiques* (carré de la distance entre Z_n et $e^{-\lambda}$) sachant que le meilleur de deux estimateurs sera celui correspondant au risque le plus petit, même s'il est biaisé, à condition que le problème de taille d'échantillon pose problème.

2. On considère une suite $\left(X_i\right)_{i\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi normale de moyenne m et d'écart-type σ. Soit, pour n entier non nul,

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad T_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X_n}\right)^2$$

(a) C'est une question de cours. Nous savons d'après le cours que la *stabilité de la loi normale pour la somme de variables indépendantes* nous amène à dire que :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(nm, n\sigma^2\right)$$

D'autre part, d'après le cours (*théorème fondamental des lois normales*[32]) un *changement affine* ne modifie pas la nature de la loi après transformation, donc :

$$\boxed{\overline{X_n} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$$

(b) La variable $\overline{X_n}$ est un estimateur de m en tant que fonction d'un vecteur aléatire i.i.d. indépendante de m. D'après la question précédente $\overline{X_n}$ admet une espérance et une variance avec :

$$\mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right) = m$$

Ainsi :

$$\boxed{\overline{X_n} \text{ est un estimateur sans biais de } m} \tag{32}$$

Rappelons ensuite le théorème suivant, qui se démontre par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\left.\begin{array}{r} B\left(\overline{X_n}, m\right) = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{V}\left(\overline{X_n}\right) = 0 \end{array}\right\} \implies \overline{X_n} \text{ est convergent}$$

Comme :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{V}\left(\overline{X_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0 \tag{33}$$

Selon (32) et (33)

$$\boxed{\overline{X_n} \text{ est un estimateur convergent de } m}$$

(c) La variable Z_n est un estimateur de m en tant que fonction d'un vecteur aléatire i.i.d. indépendante de m, elle admet une espérance et une variance en tant combinaison linéaire de deux variables aléatoires admettant chacune une espérance et une variance. Ce qui donne :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{E}\left(Z_n\right) = \dfrac{1}{2}\left(m+m\right) = m \\ \mathbf{V}\left(Z_n\right) = \dfrac{1}{4}\left(m+m\right) = \dfrac{m}{2} \end{array}}$$

En revanche vu que l'espérance de Z_n ne tend pas vers 0 cela sent le bug dans l'énoncé où alors je suis passé au travers une astuce que je n'ai pas vu pour le moment !

$$\begin{aligned} & \left(\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ \iff & \left(n\overline{X_n} = \sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ \iff & \left(n\overline{X_n} = 2Z_n + \sum_{i=2}^{n-1} X_i\right) \\ \iff & \left(Z_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=2}^{n-1} X_i\right)\right) \end{aligned}$$

donc :

$$\mathbf{V}\left(Z_n\right) = \frac{1}{4}\left(\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \mathbf{V}\left(\sum_{i=2}^{n-1} X_i\right) - 2\,\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=2}^{n-1} X_j\right)\right)$$

soit encore :

$$\boxed{\mathbf{V}\left(Z_n\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}\left(X_i\right) + \sum_{i=2}^{n-1} \mathbf{V}\left(X_i\right) - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n-1} \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)\right)}$$

[32] $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \iff Y = \dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0,1\right)$

(d) La variable T_n^2 admet une espérance en tant que somme de variables admettant chacune une espérance, en effet pour chaque entier i de $\{1,\dots,n\}$:

$$\begin{aligned}
\left(X_i-\overline{X_n}\right)^2 &= X_i^2-2X_i\overline{X_n}+\left(\overline{X_n}\right)^2\\
&= X_i^2-2X_i\overline{X_n}+\left(\overline{X_n}\right)^2\\
&= X_i^2-\frac{2}{n}X_i\sum_{j=1}^{n}X_j+\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\\
&= X_i^2-\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}X_iX_j+\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}X_iX_j\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(T_n^2\right) &= \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X_n}\right)^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left(\left(X_i-\overline{X_n}\right)^2\right)\\
&\quad \text{par linéarité de l'espérance}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{V}\left(X_i-\overline{X_n}\right)+\left(\mathbf{E}\left(X_i-\overline{X_n}\right)\right)^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{V}\left(X_i-\overline{X_n}\right)+\left(\mathbf{E}\left(X_i\right)-\mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right)\right)^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}\left(X_i-\overline{X_n}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{E}\left(X_i\right)-\mathbf{E}\left(\overline{X_n}\right)\right)^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}\left(X_i-\overline{X_n}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(m-m\right)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{E}\left(T_n^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}\left(X_i-\overline{X_n}\right)}$$

(e) En déduire la valeur du réel a tel que $S_n^2=aT_n^2$ soit un estimateur sans biais de σ^2.
Cherchons le réel a tel que l'espérance de S_n^2 soit égale à σ^2. Signalons que l'existence de l'espérance de S_n^2 ne pose aucun problème puisque la variable est obtenue par transformation affine à partir de T_n^2 qui admet une espérance.
Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(T_n^2\right) &= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}\left(X_i-\overline{X_n}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{V}\left(X_i\right)+\mathbf{V}\left(\overline{X_n}\right)-2\,\mathrm{Cov}\left(X_i,\overline{X_n}\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}\left(X_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}\left(\overline{X_n}\right)-2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}\left(X_i,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}\left(X_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}\left(\overline{X_n}\right)-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}cov\left(X_i,X_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}\left(X_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}\left(\overline{X_n}\right)-\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}\left(X_i,X_i\right)+2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}\left(X_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}\left(\overline{X_n}\right)-\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}\left(X_i\right)+2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sigma^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma^2}{n}-\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2+2\sum_{1\le i<j\le n}0\right)\\
&\quad \text{par indépendance des variables } X_i\\
&= n\sigma^2+\sigma^2-2\sigma^2\\
&= (n-1)\,\sigma^2
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{array}{rl} & \left(\mathbf{E}\left(S_n^2\right)=\sigma^2\right) \\ \Longleftrightarrow & \left(a\mathbf{E}\left(T_n^2\right)=\sigma^2\right) \\ \Longleftrightarrow & \left(a\left(n-1\right)\sigma^2=\sigma^2\right) \\ \Longleftrightarrow & \boxed{a=\dfrac{1}{n-1}} \end{array}$$

3. (a) i. La variable S_n est à valeurs dans $[a,b]$. Si $x \in [a,b]$ alors :

$$[S_n \leq x] = [X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x] \cap \ldots \cap [X_n \leq x]$$

On en déduit que

$$F_{S_n}(x) = \mathbf{P}([S_n \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^n & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

Je vous laisse voir rapidement que les propriétés de F_{S_n} nous permettant de dire que S_n reste une variable à densité de densité associée f_{S_n} telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{S_n}(x) = n\frac{(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$$

sur et nulle ailleurs.
Comme S_n est à support fini elle admet une espérance égale à :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt \\ &= \int_a^b n\frac{x(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}dx \\ &= \int_a^b n\frac{(x-a+a)(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}dx \\ &= \int_a^b n\frac{(x-a)^n}{(b-a)^n}dx + \int_a^b n\frac{a(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}dx \\ &= \frac{n}{(b-a)^n}\left(\left[\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b + a\left[\frac{(x-a)^n}{n}\right]_a^b\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(S_n) = \frac{1}{n+1}a + \frac{n}{n+1}b}$$

ii. En calculant de même $\mathbf{E}\left(S_n^2\right)$ en supposant que $[a,b]=[0,1]$ on obtient facilement :

$$\mathbf{V}(S_n) = \mathbf{E}\left(S_n^2\right) - (\mathbf{E}(S_n))^2 = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}$$

La transformation affine $x \longmapsto a+(b-a)x$ permet d'achever le calcul et donne :

$$\boxed{\mathbf{V}(S_n) = \frac{n(b-a)^2}{(n+2)(n+1)^2}}$$

iii. La variable S_n est un estimateur de b en tant que fonction d'un vecteur aléatire i.i.d. indépendante de b. En revanche comme $\mathbf{E}(S_n) \neq b$,

$$\boxed{S_n \text{ n'est pas un estimateur sans biais de } b}$$

iv. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(S_n) = b$:

$$\boxed{S_n \text{ est asymptotiquement sans biais de } b}$$

v. Comme $\mathbf{E}(S_n) < b$ on risque souvent de $\boxed{\text{sous-estimer } b \text{ en moyenne}}$ en ne corrigeant par S_n.

(a) Les mêmes calculs conduisent à :

$$\boxed{\mathbf{E}(I_n) = \frac{n}{n+1}a + \frac{1}{n+1}b}$$

On fait les $\boxed{\text{mêmes remarques}}$ qu'aux questions précédentes sur les qualités de I_n.

(b) On déduit :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(S_n) = \dfrac{1}{n+1}a + \dfrac{n}{n+1}b \\ \mathbf{E}(I_n) = \dfrac{n}{n+1}a + \dfrac{1}{n+1}b \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} a = \dfrac{n\mathbf{E}(I_n) - \mathbf{E}(S_n)}{n-1} \\ b = \dfrac{n\mathbf{E}(S_n) - \mathbf{E}(I_n)}{n-1} \end{cases}}$$

$$\boxed{A_n = \frac{nI_n - S_n}{n-1} \text{ et } B_n = \frac{nS_n - I_n}{n-1} \text{ sont des estimateurs sans biais de } a \text{ et } b}$$

4. (a) D'après le cours, *la stabilité de la loi de Poisson pour la somme de variables indépendantes* nous permet d'écrire que :

$$\boxed{X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)}$$

Pour les mêmes raisons on montre très faciliement par récurrence que :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)}$$

(b) La variable S_n est un estimateur de b en tant que fonction d'un vecteur aléatire i.i.d. indépendante de λ. Comme S_n admet une espérance, M_n en admet une aussi égale à :

$$\mathbf{E}(M_n) = \frac{1}{n}\mathbf{E}(S_n) = \frac{n\lambda}{n} = \lambda$$

Ainsi $B(M_n, \lambda) = 0$ et :

$$\boxed{M_n \text{ est un estimateur sans biais de } \lambda}$$

Comme S_n admet une variance, M_n en admet une aussi égale à :

$$\boxed{\mathbf{V}(M_n) = \frac{1}{n^2}\mathbf{V}(S_n) = \frac{n\lambda}{n^2} = \frac{\lambda}{n}}$$

(c) ► La variable T_n est un estimateur de $e^{-q\lambda}$ en tant que fonction d'un vecteur aléatire i.i.d. indépendante de $e^{-q\lambda}$.
► Par le *théorème de transfert :*

$$\begin{aligned} & (T_n \text{ admet une espérance}) \\ \iff & \left(\sum_{k\geq 0} \exp\left(-q\frac{k}{n}\right) \mathbf{P}([S_n = k]) \text{ est convergente}\right) \\ \iff & \left(\sum_{k\geq 0} \exp\left(-q\frac{k}{n}\right) \frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^k}{k!} \text{ est convergente}\right) \\ \iff & \left(e^{-n\lambda} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\left(n\lambda e^{-\frac{q}{n}}\right)^k \text{ est convergente}\right) \end{aligned}$$

A ce niveau nous constatons que nous sommes en présence d'*une série convergente en tant que série exponentielle* avec $n\lambda e^{-\frac{q}{n}} \in \mathbb{R}$. Dans ce cas $\mathbf{E}(T_n)$ existe et est égale à :

$$\mathbf{E}(T_n) = e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(n\lambda e^{-\frac{q}{n}}\right)^k = e^{-n\lambda} \exp\left(n\lambda e^{-\frac{q}{n}}\right)$$

$$\boxed{\mathbf{E}(T_n) = \exp\left(n\lambda\left(e^{-\frac{q}{n}} - 1\right)\right)}$$

▶ Comme $\mathbf{E}(T_n) \neq e^{-q\lambda}$:

$$\boxed{T_n \text{ n'est pas un estimateur sans biais de } e^{-q\lambda}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(T_n) = e^{-q\lambda}}$$

car :

$$n\lambda\left(e^{-\frac{q}{n}} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{n\lambda q}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\lambda q$$

et la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$.

▶ Par le *théorème de transfert :*

$$\begin{aligned}
& (T_n \text{ admet une variance}) \\
\iff & \left(T_n^2 \text{ admet une espérance}\right) \\
\iff & \left(\sum_k \exp\left(-q\frac{2k}{n}\right) \mathbf{P}([S_n = k]),\ k \geq 0 \text{ est convergente}\right) \\
\iff & \left(\sum_k \exp\left(-q\frac{2k}{n}\right) \frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^k}{k!},\ k \geq 0 \text{ est convergente}\right) \\
\iff & \left(e^{-n\lambda} \sum_k \frac{1}{k!}\left(n\lambda e^{-\frac{2q}{n}}\right)^k,\ k \geq 0 \text{ est convergente}\right)
\end{aligned}$$

A ce niveau nous constatons que nous sommes en présence d'*une série convergente en tant que série exponentielle* avec $n\lambda e^{-\frac{2q}{n}} \in \mathbb{R}$. Dans ce cas $\mathbf{E}\left(T_n^2\right)$ existe et est égale à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(T_n^2\right) &= e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(n\lambda e^{-\frac{2q}{n}}\right)^k \\
&= e^{-n\lambda} \exp\left(n\lambda e^{-\frac{2q}{n}}\right) \\
&= \exp\left(n\lambda\left(e^{-\frac{2q}{n}} - 1\right)\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbf{V}(T_n)$ existe et vaut par le théorème de Hyugens-Koenig :

$$\boxed{\mathbf{V}(T_n) = \exp\left(n\lambda\left(e^{-\frac{2q}{n}} - 1\right)\right) - \exp\left(2n\lambda\left(e^{-\frac{q}{n}} - 1\right)\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(T_n^2\right) = e^{-2q\lambda}$$

car :

$$n\lambda\left(e^{-\frac{2q}{n}} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2n\lambda q}{n} \underset{+\infty}{\sim} -2\lambda q$$

et la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$. On a aussi :

$$\lim_{n\to+\infty} (\mathbf{E}(T_n))^2 = e^{-2q\lambda}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{V}(T_n) = 0$$

Conclusion : T_n étant un estimateur asymptotique sans biais de $e^{-q\lambda}$ de variance tendant vers 0, ceci est une condition suffisante pour dire que :

$$\boxed{T_n \text{ est un estimateur convergent}}$$

(d) i. Comme $g(S_n)$ un estimateur sans biais de $e^{-q\lambda}$, $\mathbf{E}(g(S_n))$ exite et vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} g(k)\,\mathbf{P}([S_n = k]) = e^{-q\lambda}$$

Soit $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} g(k)\dfrac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^k}{k!} = e^{-q\lambda}$, soit encore :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k g(k)}{k!}\lambda^k = e^{(n-q)\lambda}}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k g(k)}{k!}\lambda^k = e^{(n-q)\lambda}\right) \\
\iff & \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n\lambda)^k g(k)}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{((n-q)\lambda)^k}{k!}\right) \\
\iff & \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{(n\lambda)^k g(k)}{k!} - \frac{((n-q)\lambda)^k}{k!}\right) = 0\right) \\
\iff & \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{n^k g(k)}{k!} - \frac{(n-q)^k}{k!}\right)\lambda^k = 0\right) \\
\iff & \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{n^k g(k) - (n-q)^k}{k!}\right)\lambda^k = 0\right) \\
\iff & \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!}\left(g(k) - \left(\frac{n-q}{n}\right)^k\right)\right)(n\lambda)^k = 0\right)
\end{aligned}$$

et grâce au résultat admis :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(k) = \left(\frac{n-q}{n}\right)^k$$

Ainsi le seul estimateur sans biais, fonction de S_n de $e^{-q\lambda}$ est :

$$\boxed{Z_n = \left(1 - \frac{q}{n}\right)^{S_n}}$$

ii. Lorsque $q > n$ on risque d'estimer une probabilité par un nombre négatif si S_n est impaire !

iii.

$$Z_n = \left(1 - \frac{q}{n}\right)^{S_n} = \exp\left(S_n \ln\left(1 - \frac{q}{n}\right)\right) \simeq \exp\left(-\frac{S_n q}{n}\right)$$

et :

$$\boxed{Z_n \text{ est très peu différent de } T_n}$$

5. (a) Je vous renvoie à votre cours.

(b) Compter les objets de la catégorie A parmi les n revient à effectuer une succession de n épreuves de Bernoulli indépenantes et de même paramètre p. Ainsi :

$$\boxed{N_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)}$$

Commençons par réécrire la probabilité :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\left[np - \sqrt{np\,(1-p)} \leq N_n \leq np + \sqrt{np\,(1-p)}\right]\right) \\ = \ & \mathbf{P}\left(\left[-\sqrt{np\,(1-p)} \leq N_n - np \leq \sqrt{np\,(1-p)}\right]\right) \\ = \ & \mathbf{P}\left(\left[-1 \leq \tfrac{N_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq 1\right]\right) \end{aligned}$$

Dès lors par le **théorème de la limite centrée**, la loi de N_n peut être **approximée** par la loi normale de paramètre np et $np\,(1-p)$, par suite celle de $\frac{N_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ peut l'être par la loi normale centrée et réduite. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left[np - \sqrt{np\,(1-p)} \leq N_n \leq np + \sqrt{np\,(1-p)}\right]\right) = \Phi\,(1) - \Phi\,(-1) = 0.68}$$

Au passage rappelons que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi\,(-x) = 1 - \Phi\,(x)$$

(c) Dans cette question l'univers est réduit à l'ensemble des objets de la catégorie B, donc la proportion p correspond maintenant à 100%. Notons p_1 (respectivement p_2) la proportiton des objets de la sous-catégorie B_1 (respectivement B_2), avec $p_1 + p_2 = p$. Ce sont des proportions absolues et si nous nous ramenons **uniquement** à la catégorie B, alors il y a une proportion p_1/p d'objet de la sous-catégorie B_1 et p_2/p d'objet de la sous-catégorie B_2. Ainsi la loi conditionnelle de M_n sachant $[N_n = k]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\,(k, p_2/p)$. La loi de M_n s'en déduit par la **formule des probabilités totales** associée au système complet d'événements $([N_n = k])_{k\in[\![0,n]\!]}$ ce qui donne pour chaque entier de i de $[\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\,([M_n = i]) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}_{[N_n=k]}\,([M_n = i])\,\mathbf{P}\,([N_n = k]) \\ &= 0 + \sum_{k=i}^{n} \mathbf{P}_{[N_n=k]}\,([M_n = i])\,\mathbf{P}\,([N_n = k]) \\ &= \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} (p_2/p)^i\,(1 - p_2/p)^{k-i} \tbinom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=i}^{n} \frac{k!}{i!\,(k-i)!}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,(p_2/p)^i\,(1-p_2/p)^{k-i}\,p^k\,(1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=i}^{n} \frac{(n-i)!}{(n-k)!\,(k-i)!}\frac{n!}{(n-i)!i!}\,(p_2/p)^i\,(1-p_2/p)^{k-i}\,p^k\,(1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{i}\sum_{k=i}^{n}\binom{n-i}{k-i}(p_2/p)^i\,(1-p_2/p)^{k-i}\,p^{k-i}p^i\,(1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{i}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}(p_2)^i\,(p-p_2)^{k-i}\,(1-p)^{(n-i)-j} \\ &= \binom{n}{i}(p_2)^i\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}(p-p_2)^j\,(1-p)^{(n-i)-j} \\ & \quad \text{en posant } j = k - i \\ &= \binom{n}{i}(p_2)^i\,(1-p_2)^{n-i} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{M_n \hookrightarrow \mathcal{B}\,(n, p_2)}$$

Ce résultat n'est pas surprenant car nous sommes en présence d'une urne à trois catégories à partir de laquelle les tirages sont effectués sans remise. On sait très bien que le nombre aléatoire de boules obtenues dans chaque catégorie suit la loi binomiale de paramètres le nombre total de tirages effectués et la proportion d'objets de la catégorie en question. Nous l'avons déjà vu en cours lorsque nous avons étudié la loi multinomiale.

(d) i. La variable T_k suit la **loi de Pascal** de paramètres k et p, que vous ne devez surtout pas citer en concours car elle hors programme, déjà étudiée lors des fiches précédentes. Autrement dit :

$$\boxed{T_k(\Omega) = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq k\}, \quad \forall n \geq k, \quad \mathbf{P}([T_k = n]) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}}$$

ii. Soit i un entier naturel compris entre 1 et k, la variable U_i représente le nombre d'objets à prélever pour obtenir le $i^{\text{ème}}$ objet de la catégorie B sachant que $i-1$ on déjà été obtenues lors de tirages effectués avec remise. Ainsi donc :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, k]\!], \quad U_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$$

Nous avons de plus

$$T_1 = U_1, \quad T_2 = U_2 + T_1 = U_2 + U_1 \quad \text{etc ...}$$

et :

$$\boxed{T_k = \sum_{i=1}^{k} U_i} \tag{34}$$

Montrons maintenant que la suite $\left(\dfrac{T_k}{k}\right)_{k\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable constante égale à $1/p$. Pour cela montrons que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\left|\frac{T_k}{k} - \frac{1}{p}\right| \geq \varepsilon\right]\right) = 0$$

Selon (34) la variable T_k admet une espérance et une variance en tant que combinaison linéaire de telles variables avec par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}\left(\frac{T_k}{k}\right) = \frac{k}{kp} = \frac{1}{p}$$

et par indépendance des variables U_i,

$$\mathbf{V}\left(\frac{T_k}{k}\right) = \frac{k(1-p)}{k^2p^2} = \frac{1-p}{kp^2} \tag{35}$$

qui tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini. Par l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev,**

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\left(\left[\left|\frac{T_k}{k} - \frac{1}{p}\right| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \frac{\mathbf{V}(T_k/k)}{\varepsilon^2}$$

et le théorème d'encadrement nous assure le résultat selon (35).

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{T_k}{k}\right)_{k\geq 1} \text{ converge en probabilité vers la variable constante égale à } 1/p}$$

iii. C'est une question de cours. La question précédente nous a montré que la suite $\left(\dfrac{T_k}{k}\right)_{k\geq 1}$ est une suite d'estimateurs (car T_k est une fonction de variables i.i.d.) sans biais et convergent de $1/p$. Donc les variables T_k peuvent servir à estimer $1/p$.

Index