Chapitre 1: Révisions et compléments sur les suites réelles

Afin d'étudier efficacement le cours : refaites les schémas (ou dessins) et études qui l'accompagnent et vérifiez dans un second temps en consultant vos notes manuscrites

Table des matières

Première partie
Plusieurs façons de définir une suite

1 Suite définie explicitement

On exprime explicitement u_n en fonction de n.
Exemples :

Exemple 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$

Exemple 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \int_0^1 \frac{t}{1+t^n} dt$$

Exemple 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = x^n$ où x est un réel fixé.

Dans l'exemple 2 la suite (u_n) est définie à l'aide d'une intégrale qu'on ne sait pas calculer. On peut tout de même obtenir des informations sur la suite (u_n), c'est l'objet de très nombreux sujets de concours.

Étude 1. ***CSR Colles-DS***
On étudie la suite de l'exemple de 2.

1. *Calculer u_0, u_1 et u_2.*
2. *Montrer que la suite (u_n) est décroissante.*
3. *Montrer que la suite (u_n) converge.*

Dans l'exemple 3 la suite (u_n) dépend d'un 'paramètre' x. On rencontre souvent des suites dépendant d'un paramètre .
Par exemple si on place une somme S sur un compte rémunéré à un taux de r pourcent . Le montant du compte u_n à l'issue de n années est donnée par
$$u_n = S * \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$
Nous reparlerons de cela dans la première séance d'informatique.
On finit par un rappel :

Étude 2. *Rappeler la limite éventuelle de la suite de terme général x^n, en fonction de x.*

2 Suites définies implicitement

Principe : Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on définit u_n comme l'unique solution d'une certaine équation (E_n) .
Remarque : si on sait résoudre (E_n) on se retrouve avec une suite définie explicitement .
Par exemple :

Étude 3. ***CSR Colle-DS***
'Etant donné $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la solution positive de l'équation $x^2 + x = n$'.
Calculer u_n donner des propriété de la suite (u_n)

Dans de nombreuses situations on ne sait pas résoudre (E_n) on réussit tout de même à prouver l'existence d'une unique solution u_n puis à démontrer des propriétés de (u_n).
C'est aussi l'objets de nombreux exercices de concours !
Donnons un exemple simple :

Étude 4. *'Etant donné $n \in \mathbb{N}$, on note (E_n) l'équation sur $\mathbb{R}$:*
$$x^3 + x = n$$

1. ***CSR : Colles-DS***
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$.
   On fera des dessins pour expliquer l'importance des différentes hypothèses du ou des théorèmes utilisés.
2. *Calculer u_0, u_2, u_{10}*
3. *Montrer , en raisonnant par l'absurde , que la suite (u_n) est croissante .*
4. *Montrer que $u_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.*

3 Suite récurrente

3.1 Définition d'une suite récurrente

On considère une fonction réelle d'une variable réelle f ainsi qu'un réel a en lequel f est définie. On pose :

$$u_0 = a$$

Si f est définie en u_0 on peut alors envisager de poser :

$$u_1 = f(u_0)$$

Si f est définie en u_1 on peut poser :

$$u_2 = f(u_1)$$

Si f est définie en u_2 on peut poser :

$$u_3 = f(u_2)$$

À ce stade on a construit une suite finie de 3 termes .

$$\begin{array}{rcl} u_0 & = & a \\ u_1 & = & f(a) \\ u_2 & = & f(f(a)) \\ u_3 & = & f(f(f(a))) \end{array}$$

Il est clair que si f est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on peut réitérer indéfiniment le procédé et construire LA suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{rrr} & u_0 = & a \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = & f(u_n) \end{array} \right.$$

C'est aussi possible lorsque :

- La fonction f est définie en tout point d'un intervalle I de $\mathbb{R}$
- L'intervalle I est stable par f, c'est à dire que pour tout x de I, $f(x)$ appartient encore à I.
- Le réel a appartient à I.

Dans ce cas pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel u_n appartient à l'intervalle I

Étude 5 (Exemple)**.** *On considère la fonction f définie par*

$$f(x) = 1 + \ln(x)$$

1. *Donner le domaine de définition de f.*
   On pose :
   $$I =]1, +\infty[$$
2. *Montrer que I est stable par f*
   Ainsi, lorsque a est un réel strictement plus grand que 1 *on peut considérer la suite (u_n) définie par :*
   $$u_0 = a \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$$
   Lorsque $a = e$, calculer u_2.
3. Pour les élèves en avance *: En faisant un dessin on pourra remarquer que lorsque $a \in [0, 1[$ les itérés de a sont en nombre fini.*
   Par exemple si $a = 1/e^2$ alors $f(a) = -1$ et f n'est pas définie en -1.

3.2 Monotonie de (u_n) lorsque f est croissante

On se place dans le contexte de la section précédente et on suppose que f est croissante .

Étude 6. ** Montrer que si $u_0 \leq u_1$ alors (u_n) est croissante
et que si $u_0 \geq u_1$ alors (u_n) est décroissante.
Illustrer à l'aide d'un dessin.*

3.3 Limite éventuelle d'une suite récurrente

Définition 1. *On appelle point fixe d'une fonction f tout élément x de son espace de départ qui vérifie :*

$$f(x) = x$$

Étude 7. *Quel(s) sont les éventuels points fixes de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x+1$?*

Théorème 1. *On considère : un intervalle I de $\mathbb{R}$, deux points : $a, l \in I$, une fonction $f : I \to I$, et enfin la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers l et f est continue en l alors l est un point fixe de f.*

Démonstration. On suppose que (u_n) converge vers l , donc :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l.$$

On suppose aussi que f est continue en l, c'est à dire que :

$$f(t) \underset{t\to l}{\to} f(l).$$

Par théorème (composition de limites)

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f(l).$$

Donc, comme : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, on a :

$$u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} f(l).$$

Comme $u_n \to l$, par théorème (de ECG1) $u_{n+1} \to l$
Par théorème (unicité de la limite) :

$$l = f(l)$$

□

Étude 8 (Application du théorème). *Soit (u_n) la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$$

On admet que (u_n) converge. Calculer sa limite.

Deuxième partie
Comparaison des suites réels

Comme le mot "limite", les mots "négligeable" et "équivalent" sont utilisés dans le langage commun. On pourra par exemple dire que la masse d'une souris est négligeable devant celle d'un éléphant ; la somme des masses de l'éléphant et de la souris est équivalente à la masse de l'éléphant.
Nous allons définir rigoureusement deux nouvelles relations sur les suites.
Nous verrons que cela nous permet de rendre rigoureuses certaines intuitions et donne des outils efficaces pour le calcul de limite ainsi que l'étude de la nature de séries numériques.

4 Suite négligeable devant une autre suite

Def difficile à comprendre pour ECG mais utile en prévision de DS

4.1 Définition et premiers exemples

Définition 2. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.*

On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) au voisinage de l'infini si :

il existe une suite (ε_n) telle que :

1. *À partir d'un certain rang : $u_n = \varepsilon_n v_n$*
2. $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

Donnons un premier exemple :

Étude 9 (Exemple)**.** *Lorsque*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad v_n = \frac{1}{n+1}$$

1. *Trouver (ε_n) tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \varepsilon_n v_n$*
2. *Montrer alors que (u_n) est négligeable devant (v_n)*
3. *Donner une suite (w_n) telle que (u_n) soit négligeable devant (w_n) et (w_n) négligeable devant (v_n)*

Théorème 2 (à connaitre par coeur)**.** *:*
Etants données deux suites réelles (u_n), (v_n) telles que , à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$

La suite (u_n) est négligeable devant (v_n) au voisinage de l'infini si et seulement si :

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Démonstration. Il s'agit de vérifier deux implications :

$\Rightarrow$: Supposons (u_n) négligeable devant (v_n).
On peut donc choisir une suite (ε_n) telle que :

1. À partir d'un certain rang : $u_n = \varepsilon_n v_n$
2. $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

La propriété 1 assure que à partir d'un certain rang :

$$\frac{u_n}{v_n} = \varepsilon_n$$

Donc , selon la seconde propriété :

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

$\Leftarrow$: On suppose que

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

On définit une suite (ε_n) vérifiant les propriétés 1et 2 en posant :
À partir d'un certain rang N où $v_n \neq 0$:

$$\varepsilon_n = \frac{u_n}{v_n}$$

et pour $n \leq N, \varepsilon_n = 0$

□

Nous pouvons maintenant 'oublier' la démonstration et appliquer la proposition1 :

Étude 10 (Exemples)**.** *Dans les cas suivants , la suite (u_n) est-elle négligeable devant (v_n) au voisinage de l'infini ?*

1. $u_n = \dfrac{1}{n^2}, \quad v_n = n$
2. $u_n = 1 \quad v_n = n$
3. $u_n = \sqrt{n} \quad v_n = n$
4. $u_n = n+1 \quad v_n = n-1$

Notation 1. *L'assertion : "la suite (u_n) est négligeable devant (v_n) au voisinage de l'infini" se note*

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$$

ou simplement

$$u_n = o(v_n)$$

On lit : "u_n est un petit o de v_n lorsque $n \to +\infty$"

Remarquons que :

$$n-1 = o(n^3) \quad \text{et} \quad n^2 = o(n^3)$$

mais

$$\forall n \in \mathbb{N}, n-1 \neq n^2$$

$$\boxed{\text{On pourra retenir que UN : "}o(v_n)\text{" est UNE quantité du type : } \varepsilon_n v_n, \text{ où : } \varepsilon_n \to 0}$$

4.2 Règles de calcul

Les théorèmes suivants ne sont pas à apprendre "par coeur", il faut les comprendre et savoir les retrouver rapidement

Théorème 3. *Soient$(u_n), (v_n), (w_n)$ des suites de réels non nuls à partir d'un certain rang.*

- *Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$ (on parle de* ***transitivité*** *de la relation "être négligeable devant")*
- *Il est impossible que l'on ait : $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(u_n)$*

Démonstration. :
• On suppose que $u_n = o(v_n)$ et aussi $v_n = o(w_n)$
On a , à partir d'un certain rang :

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n}\frac{v_n}{w_n}$$

Comme $u_n = o(v_n)$ on a $\frac{u_n}{v_n} \to 0$, de même $\frac{v_n}{w_n} \to 0$
Ainsi, par théorème (produit de suites convergentes)

$$\frac{u_n}{w_n} \to 0$$

Ainsi, par la proposition2 :

$$u_n = o(w_n)$$

• On suppose par l'absurde $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(u_n)$
d'après ce qui précède $u_n = o(u_n)$
ainsi $\frac{u_n}{u_n} \to 0$
donc $1 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc $1 = 0$, ce qui est faux.

□

Ainsi la relation " être négligeable devant" permet d'ordonner certaines suites :

Étude 11 (Exercice)**.** *Classer par ordre de négligeabilité les suites de termes généraux :*

$$n, \quad n^n, \quad 2^n, \quad \sqrt{n}, \quad \frac{1}{n}, \quad n!, \quad n^2, \ln(n)$$

On pourra présenter le résultat sous forme de graphe orienté

Théorème 4. *Si les suites $(u_n), (v_n)$ sont négligeables devant la suite (w_n) alors pour tous a, b réels la suite $(au_n + bv_n)$ est négligeable devant (w_n)*

Étude 12 (Preuve)**.** *Prouver le théorème 3*

Étude 13 (application du théorème 3)**.** *Montrer que $2n - n^2 = o(n^3)$*

4.3 Résultats à parfaitement connaitre

Théorème 5 (Croissances comparées)**.** *Pour tout a, b, q réels*

$$a > 0 \Rightarrow (ln\, n)^b = o(n^a)$$

$$|q| > 1 \Rightarrow n^a = o(q^n)$$

Étude 14 (preuve)**.** *Justifier ce théorème 4 en utilisant le cours de ECS1. Donner ensuite des exemples.*

Étude 15 (application des théorèmes 3 et 4)**.** *Montrer que : $n\sqrt{n} + (ln(n))^3 + \frac{1}{n} = o((1.01)^n)$*

5 Suite équivalente à une autre suite

5.1 Définition et premiers exemples

Définition 3. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.*

On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) au voisinage de l'infini si :

il existe une suite (β_n) telle que :

1. *À partir d'un certain rang : $u_n = \beta_n v_n$*
2. $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$

Donnons un premier exemple :

Étude 16 (Exemple)**.** *:*
Lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(n-1)}{n(n+1)}, \quad v_n = \frac{1}{n}$$

1. *Trouver* (β_n) *tel que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \beta_n v_n$
2. *Montrer alors que* (u_n) *est équivalente à* (v_n)

Théorème 6 (à connaitre par coeur)**.** *:*
Etant données deux suites réelles (u_n) *,*(v_n) *telles que , à partir d'un certain rang* $v_n \neq 0$

La suite (u_n) *est équivalente à* (v_n) *au voisinage de l'infini si et seulement si :*

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n \to +\infty}{\to} 1$$

Démonstration. Il suffit de reprendre le schéma de la démonstration de la proposition 1 en remplaçant $' \to 0'$ par $' \to 1'$.

□

Étude 17. *Dans les cas suivants , la suite* (u_n) *est-elle équivalente à la suite* (v_n) *au voisinage de l'infini ?*

1. $u_n = \frac{1}{n^2}, \quad v_n = \frac{2}{n^2}$
2. $u_n = n-2 \quad v_n = n$
3. $u_n = \sqrt{n} \quad v_n = \sqrt{n+2}$
4. $u_n = n+1 \quad v_n = n-1$

Notation 2. *L'assertion : "la suite* (u_n) *est équivalente à* (v_n) *au voisinage de l'infini" se note*

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$$

ou simplement

$$u_n \sim v_n$$

5.2 Résultats remarquables

Le théorème suivant est déjà suggéré par le choix du mot : "équivalent" et de la notation $\sim$.

Théorème 7. *Soient*$(u_n), (v_n), (w_n)$ *des suites de réels*

- *On a :* $u_n \sim u_n$
- *Si* $u_n \sim v_n$ *alors* $v_n \sim u_n$
- *Si* $u_n \sim v_n$ *et* $v_n \sim w_n$ *alors* $u_n \sim w_n$

Étude 18 (Preuve)**.** *Justifier ces trois assertions lorsque les termes des suites diffèrent de* 0 *à partir d'un certain rang.*

Nous pouvons regrouper entre elles les suites équivalentes, on découpe ainsi l'ensemble des suites en classes tout comme on peut découper la population en classes d'age (via la relation : "a le même âge que ")

Étude 19 (Exercice)**.** *Regrouper entre elles les suites de termes généraux suivants :*

$$\frac{n^3}{n+1}, \quad n+2, \quad \frac{n}{n+2}, \quad 1, \quad ,n, \quad n^2$$

On pourra présenter le résultat sous forme de graphe non orienté

Le résultat suivant sera très utilisé pour déterminer la limite de certaines suites

Théorème 8. *Deux suites équivalentes admettent une même limites ou bien n'admettent pas de limite*

Étude 20. *On donne le début de la démonstration :*
Soient $(u_n),(v_n)$ des suites équivalentes.
On suppose que (v_n) admet une limite l en $+\infty$.
Remarquons que l peut être un réel (comme 0 ou 2) mais aussi $+\infty$ ou $-\infty$
On veut montrer que

$$u_n \to l$$

Comme (u_n) est équivalent à (v_n), à partir d'un certain rang :

$$u_n = \beta_n v_n$$

où (β_n) est une suite réelle qui admet 1 pour limite .
Les propositions du cours de ECG1 sur les limites et les opérations nous assurent alors :

$$u_n \to l$$

Terminer la preuve

Étude 21. *On admet que* $\frac{n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$
Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1}$

5.3 Calculs d'équivalents

5.3.1 Lien avec la négligeabilité

Le résultat suivant est conforme à l'intuition et aussi à l'image de la souris et l'éléphant exprimée dans les premières lignes de ce chapitre .

Théorème 9. *Etant donnée une suite réelle*

$$u_n \sim v_n \quad \Longleftrightarrow \quad u_n - v_n = o(v_n)$$

Étude 22 (Preuve (facultatif))**.** ** Montrer ce théorème*

On peut ainsi affirmer que pour n'importe qu'elle suite (u_n) on a :

$$u_n + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

Étude 23 (Application du théorème 8)**.** *Dans les cas suivants, donner une suite (u_n) simple telle que :*

$$v_n \sim u_n$$

en déduire alors la limite de la suite (v_n)

1. $v_n = 2+n+n^2$

2. $v_n = -n + \ln(n)$
3. $v_n = 2^n - n^3 + 4$
4. $v_n = \dfrac{1}{n} + n$
5. $v_n = 3 - n\ln(n)$

Théorème 10. *Étant donné $d \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{R}$; $a_d \neq 0$*
on a :

$$a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots a_d n^d \underset{n\to+\infty}{\sim} a_d n^d$$

Par exemple $1 - n - 3n^3 \sim -3n^3$.

5.3.2 Compatibilité avec certaines opérations

Théorème 11. *Soient $(u_n), (v_n), (w_n), (x_n)$ des suites réelles.*

- *Si* $\left\{\begin{array}{ccc} u_n & \sim & v_n \\ w_n & \sim & x_n \end{array}\right.$ *alors* $u_n \times w_n \sim v_n \times x_n$
- *Lorsque (v_n) et (x_n) ne s'annulent pas :*
  si $\left\{\begin{array}{ccc} u_n & \sim & v_n \\ w_n & \sim & x_n \end{array}\right.$ *alors* $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{x_n}$
- *Lorsque α est un réel <u>indépendant de n</u> :*
  $\boxed{\text{si}}$ *$u_n \sim v_n$ et si à partir d'un certain rang $u_n > 0, v_n > 0$* $\boxed{\text{alors}}$ $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$

Étude 24 (preuve)**.** *Prouver le théorème dans le cas ou les termes des suites diffèrent de 0 à partir d'un certain rang.*

Étude 25 (application)**.** *Montrer que :*

1. $$\frac{n+2}{n-3} \sim 1$$
2. $$\frac{(n+\ln(n))^3}{n+1} \sim n^2$$

Il est de mon devoir de vous mettre en garde contre certaines erreurs.
Par exemple on peut avoir $\left\{\begin{array}{ccc} u_n & \sim & v_n \\ w_n & \sim & x_n \end{array}\right.$ MAIS PAS $u_n + w_n \sim v_n + x_n$.

Étude 26 (Exemple)**.** *:*
Remarquer :

$$\left\{\begin{array}{ccc} n^2 + n^3 & \sim & n^3 \\ -n^3 & \sim & -n^3 + n \end{array}\right.$$

Peut-on "ajouter " ?

Une autre erreur fréquente consiste à appliquer une fonction comme ln sans se poser de question

Étude 27 (Exemple). *:*

1. *On a* $1+n \sim n$ *, a-t-on :* $\ln(1+n) \sim \ln(n)$ *?*
2. *On a* $1+1/n \sim 1+1/n^2$*, a-t-on* $\ln(1+1/n) \sim \ln(1+1/n^2)$ *?*
   Dans ce second cas , on pourra anticiper et utiliser le prochain théorème.

5.3.3 Résultats à parfaitement connaitre

Théorème 12 (Croissances comparées). *Lorsque* (h_n) *est une suite qui converge vers* 0 *:*

$$\ln(1+h_n) \sim h_n \qquad (1+h_n)^{\alpha} - 1 \sim \alpha h_n \qquad e^{h_n} - 1 \sim h_n$$

où α *désigne un réel indépendant de n*

Étude 28 (preuve). *Justifier ce théorème 10 en utilisant le cours de ECS1*

Étude 29 (application).

1. *Montrer que*
$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$$
2. *En déduire :*
$$\lim_{n\to+\infty} (1+1/n)^n$$
3. *Soit x un nombre réel .*
   Montrer que :
$$exp(x) = \lim_{n\to+\infty} (1+x/n)^n$$

Troisième partie
Exercices du chapitre 1

Comparaison des suites réelles

Exercice 1
Dans ce qui suit $(u_n), (v_n)$ désignent des suites de réels.
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses , en justifiant la réponse .

1. Si $u_n = o(1/n)$ alors $u_n = o(1/n^3)$
2. Si $u_n = o(n)$ alors $u_n = o(n^3)$
3. Si $u_n = o(1/(n+1))$ alors $u_n = o(1/n)$
4. * Si (u_n) est une suite convergente alors $u_{n+1} \sim u_n$
5. Deux suites qui admettent une même limite sont équivalentes.
6. * Si $u_n \sim 1/n$ alors $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{2}{n}$
7. Si $u_n \sim v_n$ alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$
8. Etant donné $l \in \mathbb{R}^*$, si $u_n \to l$ alors $u_n \sim l$

Exercice 2
Dans chaque cas, déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

1.
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^3 + 3n^2 - 1$$

2.
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^5 - 3n^2 + 2}{n^8 + n^3 + 1}$$

3. *
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(n^2 + 1)$$

4.
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} k$$

5.
$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$$

6.
$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

7.
$$u_n = n \ln\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

8.
$$u_n = n - (\ln n)^2$$

9.
$$u_n = \ln(n+1) - \ln n$$

10.
$$u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$$

11.
$$u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$$

12.
$$u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^3 - 2n + 1}}$$

Exercice 3
Obtention d'un équivalent par encadrement

1. On considères des suites $(u_n), (v_n), (w_n), (t_n)$.
   On suppose qu'à partir d'un certain rang :
   $$u_n \leq v_n \leq w_n$$
   et
   $$t_n > 0$$
   et on suppose aussi :
   $$u_n \sim w_n \sim t_n$$
   Montrer que
   $$v_n \sim t_n$$
2. On suppose qu'à partir d'un certain rang :
   $$n - \ln(n) \leq u_n \leq n$$
   Donner un équivalent simple de (u_n)

3. On suppose qu'à partir d'un certain rang :

$$n \leq u_n \leq 2n$$

   Donner un équivalent simple de $\ln(u_n)$
4. Déterminer un équivalent simple pour la suite $u_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ainsi que sa limite si elle existe.

Exercice 4
Ce résultat sera utilisé dans le cours de probabilité et on verra une application à la modélisation probabiliste de phénomènes réels
Soit k un entier naturel.

1. ** Donner un équivalent simple de $u_n = \binom{n}{k}$ lorsque $n \to +\infty$
2. Calculer alors la limite de $\dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$ lorsque $n \to +\infty$

Étude de suites

Exercice 5
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

1. * Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Étudier les variations de la suite (I_n)
3. Démontrer que la suite (I_n) converge.
4. * Déterminer la limite de la suite (I_n)

Exercice 6
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{1}{x+1}$$

On pose :

$$I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Soit $a \in I$.
Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

.

1. Démontrer que l'intervalle I est stable par f.
2. Montrer que f admet un unique point fixe l dans l'intervalle I, calculer ce point fixe.
   (a) Rappeler le théorème : "inégalité des accroissement finis " du cours de première année. et montrer que :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq (4/9)\,|x - y|$$

   (b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq (4/9)^n\,|u_0 - l|$$

(c) Montrer que (u_n) converge vers l.

Exercice 7
On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$$

1. (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$$
   (b) (*) Montrer que (u_n) converge vers 1.
2. Déterminer un équivalent de $u_n - 1$, en déduire un réel a tel que
$$u_n - 1 = \frac{a}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 8
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 on pose :

$$\forall x \in [e, +\infty[, f_n(x) = exp\left(\frac{x}{n}\right) - x$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $[e, +\infty[$.
   On note b_n cette solution.
2. * Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n \geq n \ln n$$
   En déduire la limite de (b_n)
3. (a) Étudier sur $]0, +\infty[$ la fonction g définie par :
$$\forall x > 0, g(x) = x - 2\ln(x)$$
   (b) En déduire le signe de $f_n(2n\ln n)$ puis donner un encadrement de b_n puis de $\ln(b_n)$
   (c) Donner alors un encadrement de $\frac{b_n}{n}$ et déterminer un équivalent de b_n.

Exercice 9
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}$$

1. Dresser le tableau des variations de f en indiquant les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. (a) Montrer que pour tout réel t positif :
$$2e^t - t - t^2 > 0$$
$$1 + t \geq \sqrt{1+t^2}$$
   (b) En déduire
$$\forall t \geq 0, f(t) > t$$
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$
   et
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$
   Montrer que la suite u_n est positive et croissante . En déduire que (u_n)tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$