Chapitre 2: Espaces vectoriels

Afin d'étudier efficacement le cours : refaites les schémas (ou dessins) et études qui l'accompagnent et vérifiez dans un second temps en consultant vos notes manuscrites

Table des matières

Plusieurs chapitres de première année sont consacrés à "lespace vectoriel $\mathbb{R}^n$" .
Deux opérations sont définies dans $\mathbb{R}^n$:
une opération interne notée $+$: et une opération externe notée . .
Plusieurs propriétés de ces opérations sont présentées (on en compte 7 principales dont les autres découlent); ensuite on voit apparaitre de nouvelles notions, un vocabulaire nouveau , par exemple : *combinaison linéaire, familles libres...*
En relisant le cours de première année , vous pouvez observer que ces notions ne font intervenir que les opérations $+$, . et leurs propriétés .
Nous allons voir en seconde année que l'on peut adopter le même vocabulaire pour d'autres ensembles sur lesquels sont aussi définies des opérations d'**addition** notée $+$ et de **multiplication à gauche par un réel** notée . et qui vérifient les mêmes propriétés que les opération $+$ et . de $\mathbb{R}^n$.

SI VOUS AVEZ PEU DE TEMPS VOUS POUVEZ PASSER DIRECTEMENT À LA SECTION 3.

1 Introduction à l'aide d'exemples

1.1 L'addition

Depuis les petites classes vous rencontrez l'opération élémentaire d'addition des entiers. Par exemple on peut additionner les nombres 2 et 5 , on obtient 7 , qui est encore un nombre.
En première année de classe préparatoire vous avez rencontrez des objets plus complexes sur lesquels a aussi été définie une opération notée : "$+$" et appelée addition.
Donnons des exemples :

Exemple 1 : addition des couples de réels :

Rappelons qu'un couple de nombre est la donnée de deux nombres dans l'ordre : un premier , un deuxième . Comme par exemple le couple $(2,3)$ dont la première *composante* est 2 et la seconde est 3.
On rappelle que l'on note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples de réels.
Dans le cours de première année on définit l'addition de la façon suivante : pour (a,b) et (c,d) couples de réels on pose $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
J'attire votre attention sur le fait qu'il s'agit d'une définition , avant de la lire on pouvait se demander quel sens donner à un calcul comme $(1,2)+(1,3)$.
Donnons un exemple de calcul de somme de deux couples de réels :

$$(2,4)+(0,-1)\underset{def}{=}(2+0,4+(-1))=(2,3)$$

Il s'agit ici de sommer non pas des nombres réels (éléments de l'ensemble noté $\mathbb{R}$) mais des couples de réels (éléments de l'ensemble noté $\mathbb{R}^2$), le résultat de l'opération est encore un couple de réels.
L'opération $+$ est une application de $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2 : addition de matrices à 2 lignes , 2 colonnes :

Dans le cours de première année on définit les matrices puis la somme de matrices de même format, par exemple :

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & -5\end{pmatrix}\underset{def}{=}\begin{pmatrix}1+2 & -1+2\\ 0+1 & 4+(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

On rappelle que l'on note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à 2 lignes et 2 colonnes et à coefficients réels.
Ici on somme deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on obtient une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$
La forme général de l'opération est :
L'opération $+$ est une application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\times\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Exemple 3 : Addition de polynômes de degré inférieur à 3 :

Il s'agit ici d'additionner des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 (l'ensemble des tels polynômes est noté $\mathbb{R}_3[x]$)

Donnons un exemple :

On définit les polynômes $P : x \mapsto x^2$ et $Q : x \mapsto x^3 - 1$

Par définition de première année $P+Q$ est le polynôme :

$$x \mapsto P(x) + Q(x)$$

On a alors :

$$P+Q : x \mapsto x^2 + x^3 - 1$$

Ici l'opération $+$ est une application de $\mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x]$ dans $\mathbb{R}_3[x]$

Fin des exemples

On observe ainsi qu'en mathématiques nous sommes amenés à additionner des objets de natures très différentes . Malgré cette différence on constate (on montre) que l'opération notée $+$ dans les trois cas vérifie des propriétés communes.

1.2 Exemples de propriétés de l'addition

Associativité :

si u, v, w sont des couples de réels alors $(u+v)+w = u+(v+w)$.

On vérifie que cette propriété reste valide lorsque u, v, w sont des matrices 2×3 mais aussi lorsque u, v, w sont des polynômes.

Commutativité

Une autre propriété commune de $+$ est la commutativité : si u, v sont des couples de réels alors $u+v = v+u$, c'est aussi le cas si u, v sont des matrices 2×2 ou des polynôme de dégré inférieur à 3.

Existence d'un élément neutre pour l'addition

On observe aussi dans chaque cas l'existence d'un "objet" particulier, neutre par rapport à l'addition , c'est à dire que lorsque l'ajoute à un élément u on obtient encore u. Dans le cas de l'exemple 1 c'est $(0,0)$, pour l'exemple 2 c'est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et dans le troisième exemple le polynôme nul : $x \mapsto 0$

1.3 La multiplication à gauche par un réel

Exemple 1 : multiplication d'un couple de réels par un réel Rappelons le cours de première année :

étant donné un réel α et un couple (x,y) de réels , on appelle produit de (x,y) par α le couple de réel $(\alpha x, \alpha y)$

On écrit :

$$\alpha.(x,y) = (\alpha.x, \alpha.y)$$

Cette opération notée . est une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2 : multiplication par un réel d'une matrice 2 ligne, 2 colonnes On définit aussi dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une opération . :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ (\lambda, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) & \mapsto & \lambda.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underset{def}{=} \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 3 : multiplication par un réel d'un polynôme On dispose aussi d'une opération :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x], (\lambda, P) \mapsto \lambda.P$$

1.4 Exemples de propriétés de la multiplication à gauche par un réel

Dans les trois exemples on peut observer par exemple que

$$\alpha.(\beta.v) = (\alpha\beta).u$$

où α est un réel et u un vecteur (un couple de réels dans le cas de l'exemple 1, une matrice 2×2 dans le cas de l'exemple 2 et enfin un polynôme pour l'exemple 3)

1.5 Remarque : des espaces vectoriels 'calqués'

Remarquons qu'on peut facilement mettre en relation 2 par 2 les éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et de $\mathbb{R}^4$, c'est à dire établir une bijection de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^4$.

Par exemple , on note f la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (a,b,c,d) \end{array}$$

Cette fonction f est non seulement bijective mais elle respecte aussi les opération $+$ et . définis dans chaque ensemble .

Ainsi , du point de vue des opération $+$ et . $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se comporte exactement comme $\mathbb{R}^4$ muni de ses opération $+$ et .

Nous n'étudierons dans la suite que des ensembles munis d'opérations $+,.$ qui se comportent comme $\mathbb{R}^n$ pour un certain n, de tels "structures algébriques " sont appelés "espaces vectoriels"

2 Définition et exemples d'espaces vectoriels

2.1 Qu'est ce qu'un espace vecoriel

Je donne la définition générale d'espace vectoriel mais le programme n'exige pas que vous la connaissiez.

Définition 1. *On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou plus simplement espace vectoriel la donnée :*

- *D'un ensemble E*
- *D'une opération interne que l'on note $+$, il s'agit d'une application de $E\times E$ dans E*
- *D'une opération externe : $\mathbb{R}\times E \to E$, notée .*

opérations qui vérifient les propriétés suivantes :

1. *Pour tout $(x,y,z)\in E^3$, on a : $(x+y)+z = x+(y+z)$ (on dit que l'opération $+$ est associative)*
2. *Pour tout $(x,y)\in E$, on a : $x+y = y+x$ (on dit que l'opération $+$ est commutative)*
3. *Il existe un seul élément de E , noté 0_E , neutre pour l'addition , c'est à dire :*
$$\forall x\in E, x+0_E = x$$
4. *Pour tout x de E il existe un unique élément y tel que $x+y = 0_E$ cet élément y est noté $-x$*
5. *On a :*
$$\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}, (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$$
6. *On a*
$$\forall\lambda\in\mathbb{R}, \forall(x,y)\in E^2, \lambda.(x+y) = \lambda.x+\lambda.y$$
7. *On a :*
$$\forall x\in E, 1.x = x$$

2.2 Des exemples de référence

Dans l'introduction, nous avons présenté trois espaces vectoriels : $\mathbb{R}^2, \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}_3[X]$.

Plus généralement on rencontrera :

— Pour $n \in \mathbb{N}$ l'espace $\mathbb{R}^n$

— Pour $k, p \in \mathbb{N}$ l'espace $\mathscr{M}_{k,p}(\mathbb{R})$

— Pour $k \in \mathbb{N}$ l'espace $\mathbb{R}_k[x]$

2.3 Un autre exemple

Donnons un nouvel exemple :

On note E l'ensemble

$$\left\{(0,a,b); a,b \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Par exemple $(0,2,1),(0,0,0)$ sont des éléments de E, le triplet $(1,0,-1)$ n'en est pas un.

Remarquons que E est une partie de $\mathbb{R}^3$, en fait les éléments de E sont la triplets de réels dont la première composante est nulle.

Remarquons aussi que si on considère deux élément de E : $(0,a,b)$ et $(0,c,d)$ alors leur somme : $(0,a+c,b+d)$ est encore un élément de E.

On dispose donc d'une opération interne notée $+$.

On remarque aussi que si α est un réel et $(0,a,b)$ un élément de E alors $\alpha.(0,a,b)$ vaut $(0,\alpha.a,\alpha.b)$ et est encore un élément de E.

On dispose ainsi d'une opération ainsi d'une opération interne notée $+$ et d'une opération externe notée .

Est-on en présence d'un espace vectoriel ? Oui , il n'est pas bien difficile de vérifier que les opérations $+$ et . introduites vérifient les 7 propriétés de la définition 1.

Quel est l'élément neutre pour l'addition ? c'est $(0,0,0)$

Cet espace vectoriel E a la même "structure" qu'un autre espace rencontré plus haut, lequel ? On remarque que E est "calqué" sur $\mathbb{R}^2$.

L'application $\mathbb{R}^2 \to E, (a,b) \mapsto (0,a,b)$ est bijective et respecte les opérations $+$ et . de chaque espace vectoriel.

2.4 Calcul dans un espace vecoriel

De nombreuses règles de calculs dans un espace vectoriel se déduisent des 7 prorpiétés de la définition.

Par exemple pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x,y,z \in E$ alors $\lambda.(x+y+z) = \lambda.x + \lambda.y + \lambda.z$

C'est une conséquence de la propriété 6, appliquée deux fois de suite :

$\lambda.(x+y+z) = \lambda.((x+y)+z) = \lambda.(x+y) + \lambda.z = \lambda.x + \lambda.y + \lambda.z$

Nous n'allons pas faire de longues listes des règles de calculs dans un espace vectoriel car ça se fera très naturellement puisque comme cela a été dit plus haut tous les espaces rencontrés sont "*calqués*" sur $\mathbb{R}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ et vous êtes déjà habitués à calculer dans $\mathbb{R}^n$.

Donnons tout de même un résultat utile :

Théorème 1. *Soit E un espace vectoriel.*
Soient $x \in E, \alpha \in \mathbb{R}$.
On a :

$$\alpha.x = 0_E \iff \alpha = 0_{\mathbb{R}} \quad ou \quad x = 0_E$$

Démonstration. admis.

□

On se contente de remarquer que c'est vrai dans $\mathbb{R}^n$, et donc dans les autres espaces de référence.

2.5 Vocabulaire à connaitre : vecteurs , scalaire

Lorsqu'on est en présence d'**un** espace vectoriel E, on parle de **vecteur** pour désigner les éléments de E et de **scalaire** pour désigner les réels.

Ainsi , suivant le contexte un vecteur peut être : un couple de réel, une matrice 2×2, un polynôme de degré inférieur à 3 . Par ailleurs , on appelle **vecteur nul** l'élément neutre de l'addition .

3 Combinaisons linéaires

C'est la notion centrale de ce chapitre .

3.1 Définition

Dans un espace vectoriel E, on appelle combinaison linéaire des vecteur u et v tout vecteur x pour lequel on peut trouver des réels α, β tels que $x = \alpha.u + \beta.v$.

Par exemple :

Dans $\mathbb{R}^2$: Le vecteur $(2,3)$ est combinaison linéaire des vecteur $(1,0)$ et $(1,1)$ puisque

$$(2,3) = (-1).(1,0) + 3.(1,1)$$

Étude 1. *Illustrer géométriquement ce résultat*

Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$: La matrice I_2 est combinaison linéaire des matrices $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

En effet :

$$I_2 = \frac{1}{2}.u + \frac{1}{2}.v$$

On appelle combinaison linéaire de trois vecteur u, v, w tout vecteur x pour lequel on peut trouver des réels α, β, γ tels que $x = \alpha.u + \beta.v + \gamma.w$.

Étude 2. *Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ on pose :*

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Donner plusieurs exemples de combinaisons linéaires des matrices :*
   $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. *La matrice $0_{2,2}$ est-elle combinaison linéaire de u, v, w*
3. *La matrice I_2 est-elle combinaison linéaires de u, v, w ?*
4. *Montrer que w est combinaison linéaire de u et v .*

Définition 2. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$*

Etant donnés p vecteur $v_1, v_2, \cdots, v_p$ d'un espace vectoriel E et x un vecteur de E.

On dira que x est combinaison linéaire *des vecteur $v_1, v_2, \cdots, v_p$ lorsqu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ tels que :*

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots \alpha_p.v_p$$

Étude 3. *On se place de nouveau dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.*

Trouver 4 vecteur de E : A, B, C, D tels que toute matrice M soit combinaison linéaire des vecteurs A, B, C, D

3.2 Familles liées ou bien libres

3.2.1 Notion de famille de vecteurs

Une famille de vecteur est simplement une suite finie de vecteurs ; par exemple :
$((2,1);(0,1);(1,2);(2,1))$ est une famille de vecteur de l'espace $\mathbb{R}^2$

Rappelons que l'ordre compte : les familles de vecteurs : $((2,1);(0,1);(1,2);(2,1))$ et $((1,2);(0,1);(2,1);(2,1))$ sont différentes.

Par ailleurs on ne supprime pas les répétitions : les familles de vecteurs : $((2,1);(0,1);(1,2);(2,1))$ et $((1,2);(0,1);(2,1))$ sont différentes.

3.2.2 Définition : Familles liées, familles libres

Définition 3. *Une famille de vecteur est dite liée lorsqu'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres*

Par exemple la famille $((2,1);(0,1);(1,2);(2,1))$ est clairement liée : le dernier vecteur est combinaison linéaire des trois premiers puisque :

$$(2,1) = 1.(2,1) + 0.(0,1) + 0.(1,2)$$

Définition 4. *Une famille de vecteurs qui n'est pas liée est dite libre*

Étude 4 (Exemples)**.** *Dans les cas suivant la famille $\mathscr{F}$ est elle liée ou libre ? on justifiera les réponses.*

1. $E = \mathbb{R}^2$
   $\mathscr{F} = ((1,0),(0,1),(1,1))$
2. $E = \mathbb{R}^2$
   $\mathscr{F} = ((0,0),(0,1),(1,1))$
3. $E = \mathbb{R}^3$
   $\mathscr{F} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$
4. $E = \mathbb{R}^3$
   $\mathscr{F} = ((1,0,0),(0,1,0),(1,1,1),(0,0,1)$
5. *Dans $\mathbb{R}_2[x]$ on pose , pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$P(x) = (x-1)^2, Q(x) = x^2, R(x) = x-1, S(x) = 2$$

   La famille (P,Q,R,S) est-elle liée ?

Définition 5. *Deux vecteurs u,v d'un espace vectoriel sont dit colinéaires lorsque la famille (u,v) est liée.*

Étude 5. *Traduire formellement l'assertion ; "la famille (u,v) est liée"*

Étude 6 (Exemples)**.** *Dans $\mathbb{R}^2$ donner des exemples de vecteurs colinéaires et de vecteurs non colinéaire. Illustrer à l'aide d'un dessin*

Théorème 2. *Toute famille de vecteurs qui contient le vecteur nul est liée*

Étude 7. *Prouver ce théorème*

3.2.3 Caractérisation des familles libres

Théorème 3. *Soit $\mathscr{F} = (v_1, v_2, \cdots, v_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .*

La famille $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si :

$$\forall(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p, \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_p.v_p = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$$

Démonstration. résultat admis □

Étude 8 (Facultatif : preuve d'un cas particulier du théorème 3) : On prouve tout de même le résultat pour une famille de trois vecteurs)**.** *:*

Soient u, v, w trois vecteur d'un espace E.

1. *Écrire la négation de l'assertion :*

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha.u + \beta.v + \gamma.w = 0 \Rightarrow (\alpha = 0 \quad et \quad \beta = 0 \quad et \quad \gamma = 0)$$

2. *Conclure*

Étude 9. *À quelles conditions sur $a \in \mathbb{R}$ la famille suivante est elle libre ? :*

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}\right)$$

Étude 10 (Application du th 3)**.** *Soit $\mathscr{B}$ la famille contenant les polynômes défini par , pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)\\
P_1(x) &= x(x-2)(x-3)\\
P_2(x) &= x(x-1)(x-3)\\
P_3(x) &= x(x-1)(x-2).
\end{aligned}$$

Démontrer que la famille $\mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[x]$.

Théorème 4. *Une famille formée d'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.*

Étude 11.

1. *Prouver le théorème ci-dessus.*
2. *Montrer, en donnant un exemple explicite, qu'il ne suffit pas que des vecteurs soient non nuls pour qu'ils soient indépendants linéairement, c'est à dire qu'ils forment une famille libre.*

3.3 Famille génératrice d'un espace vectoriel

Définition 6. *On dira qu'une famille $\mathscr{F}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est génératrice de cet espace E lorsque **tout** vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$*

Étude 12. *Dans les cas suivants, la famille $\mathscr{F}$ est-elle génératrice de E. Justifier.*

1. *Dans $E = \mathbb{R}^2$, on pose $u = (2,2); v = (1,1)$ et $\mathscr{F} = (u,v)$*
2. *Dans $E = \mathbb{R}^2$, on pose $u = (1,0); v = (0,1)$ et $\mathscr{F} = (u,v)$*
   ON ILLUSTRERA LE RÉSULTAT PAR UN DESSIN
3. *Dans $E = \mathbb{R}^2$, on pose $u = (1,0); v = (1,1)$ et $\mathscr{F} = (u,v)$*
4. *Dans $E = \mathbb{R}_3[x]$ on pose , pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$P(x) = x^3, Q(x) = x^2, R(x) = x$$

5. *Dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   La famille (A,B,C) est-elle génératrice de E

Étude 13. *Soient $\mathscr{F} = (u,v,w,z)$ une famille de vecteur d'un espace vectoriel E*

1. *Montrer que si (u,v) est une famille génératrice de E alors c'est aussi le cas de $\mathscr{F}$*
2. *Montrer que si z est combinaison linéaire des vecteurs u,v,w et que $\mathscr{F}$ est génératrice de E alors (u,v,w) est génératrice de E.*

Solution de la question 2 de l'étude 13 (à cacher dans un premier temps)

On suppose que z est combinaison linéaire des vecteurs u,v,w et que $\mathscr{F}$ est génératrice de E.
Soit $x \in E$.
Comme $\mathscr{F}$ est génératrice de E, il existe $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $x = \alpha.u + \beta.v + \gamma.w + \lambda.z$
On choisit de tels réels $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$.
par ailleurs, comme z est combinaison linéaire de u,v,w, il existe $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que : $z = a.u + b.v + c.w$.
On choisit de tels réels a,b,c.
On a

$$x = \alpha.u + \beta.v + \gamma.w + \lambda.(a.u + b.v + c.w) = (\lambda a + \alpha).u + (\beta + \lambda b).v + (\gamma + \lambda c).w$$

et $\lambda a + \alpha, \beta + \lambda b, \gamma + \lambda c$ sont des réels.
Ainsi x est combinaison linéaire de u,v,w.
On a montré cela pour x choisi quelconque dans E.
On a montré que (u,v,w) est une famille génératrice de E.

Théorème 5.
1. *Toute famille qui contient une famille génératrice de E est encore une famille génératrice de E.*
2. *Soit $(v_1, v_2, \cdots, v_{p+1})$ une famille génératrice de E . Si le vecteur v_{p+1} est combinaison linéaire des vecteur $v_1, v_2, \cdots, v_p$ alors*
   la famille $(v_1, v_2, \cdots, v_p)$ est encore une famille génératrice de E.

Démonstration. admis, il s'agit d'une généralisation des résultat de l'étude 14. □

Nous retrouverons le second résultat en fin de polycopié.

4 Base d'un espace vectoriel

4.1 Définition

Définition 7. *Soit $\mathscr{F} = (v_1, v_2, \cdots, v_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .*

*On dit que $\mathscr{F}$ est une base de E lorsque tout vecteur de E se décompose de **façon unique** comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$, c'est à dire lorsque :*

$$\forall x \in E, \exists!(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p : x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p$$

Le symbole : "$\exists!$" se lit : "il existe un unique".

On remarque qu'une base de E est aussi une famille génératrice de E mais la réciproque est fausse en général :

On se place encore dans $E = \mathbb{R}^2$.

On pose

$$u = (0,1), v = (1,0), w = (1,1)$$

et

$$\mathscr{F} = (u, v, w)$$

La famille $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E mais n'est pas une base de E

En effet :

On pose $x = (2,2)$

On a

$$x = 2.u + 2.v + 0.w$$

On a aussi

$$x = 0.u + 0.v + 2.w$$

Le vecteur x ne se décompose pas d'une unique façon comme combinaison linéaire de vecteurs de E

4.2 Une caractérisation des bases

Théorème 6. *Une famille de vecteur d'un espace vectoriel E est une base de E si et seulement si cette famille est libre et génératrice de E*

Démonstration. Soit $\mathscr{F} = (v_1, v_2, \cdots, v_p)$ une famille de vecteurs de E.

$\Rightarrow$ On suppose que $\mathscr{F}$ est une base de E.

Elle est alors clairement génératrice de E (à expliquer).

Montrons que $\mathscr{F}$ est libre.

Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$\lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 + \cdots + \lambda_p.v_p = 0_E$$

On a aussi

$$0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_p = 0_E$$

Comme $\mathscr{F}$ est une base de E, il n'y a qu'une façon de décomposer 0_E dans $\mathscr{F}$ ainsi

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$$

$\Leftarrow$ On suppose que $\mathscr{F}$ est libre et génératrice de E.

Soit $x \in E$.

Comme $\mathscr{F}$ est génératrice de E, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ réels tels que

$$x = \lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 + \cdots + \lambda_p.v_p$$

Supposons que x se décompose aussi sous la forme

$$x = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + \cdots + \alpha_p.v_p$$

On a donc

$$\lambda_1.v_1+\lambda_2.v_2+\cdots+\lambda_p.v_p-(\alpha_1.v_1+\alpha_2.v_2+\cdots+\alpha_p.v_p)=0_E$$

donc

$$(\lambda_1-\alpha_1)v_1+(\lambda_2-\alpha_2)v_2+\cdots+(\lambda_p-\alpha_p)v_p=0$$

Comme la famille $(v_1,\cdots,v_p)$ est libre

$$\lambda_1=\alpha_1;\ \lambda_2=\alpha_2;\ \cdots;\ \lambda_p=\alpha_p$$

□

Étude 14 (Application du théorème 6)**.** *La famille* $\mathscr{F}=((1,0,0),(0,1,0),(1,1,1),(0,0,1)$ *est elle une base de* $\mathbb{R}^3$ *?*

4.3 Coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice d'un vecteur dans une base (à connaitre parfaitement)

Définition 8. *Soit* $\mathscr{B}=(v_1,v_2,\cdots,v_p)$ *une base d'un espace vectoriel* E *.*
Soit $x\in E$ *et* $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p$ *tel que*

$$x=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_pv_p$$

Le réel λ_1 *est alors appelé coordonnée de* x *dans* $\mathscr{B}$ *selon* v_1*.*
Le réel λ_2 *est alors appelé coordonnée de* x *dans* $\mathscr{B}$ *selon* v_2*.*

$$\vdots$$

Le réel λ_p *est alors appelé coordonnée de* x *dans* $\mathscr{B}$ *selon* v_p*.*
La matrice

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_p\end{pmatrix}$$

est appelée matrice de x *dans* $\mathscr{B}$ *est notée* $Mat_{\mathscr{B}}(x)$

Étude 15. *Dans les cas suivant, on admet que* $\mathscr{B}$ *est une base de* E*. Donner la matrice de* v *dans* $\mathscr{B}$

1. $E=\mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}=((1,1);(-1,1))$, $v=(1,1)$
2. $E=\mathbb{R}^3$, $\mathscr{B}=((1,0,0);(1,1,0),(1,1,1))$, $v=(0,1,1)$
3. $E=\mathbb{R}^3$, $\mathscr{B}=((1,1,0);(1,0,0),(1,1,1))$, $v=(0,1,1)$. *Commenter*
4. $E=\mathbb{R}_2[x]$, $\mathscr{B}=(P,Q,R)$ *où*

$$P:x\mapsto 1, Q:x\mapsto x, R:x\mapsto x^2 \quad et \quad v:x\mapsto(x-1)^2$$

5. $E=\mathbb{R}_2[x]$, $\mathscr{B}=(P,Q,R)$ *où*

$$P:x\mapsto 1, Q:x\mapsto(x-1), R:x\mapsto(x-1)^2, \quad et \quad v:x\mapsto(x-1)^2$$

6. $E=\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathscr{B}=(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2})$ *où, pour* $(i,j)\in[|1,2|]^2$ *la matrice* $E_{i,j}$ *est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne* i *et colonne* j *qui vaut* 1.

$$v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

5 Dimension d'un espace vectoriel

5.1 Introduction naïve

On considère un espace vectoriel pour lequel on dispose d'une base formée de trois vecteurs u, v, w.

C'est par exemple le cas de $\mathbb{R}_2[X]$ avec $u = x \mapsto 1, v = x \mapsto x, w = x \mapsto x^2$.

Tout vecteur de E se caractérise alors par la donnée de la 3-liste de ses coordonnées dans la base (u, v, w).

On établit ainsi un "parallèle" , plus précisément une bijection entre E et $\mathbb{R}^3$.

Ainsi à chaque vecteur de E on fait correspondre un et un seul triplet de réel . Cette correspondance est non seulement bijective ('one to one' comme disent les anglosaxons) mais en plus a la propriété de respecter les opérations des espaces E et $\mathbb{R}^3$.

On dira que E est de dimension 3.

MAIS de suite une question se pose, est il possible que notre espace E admettent aussi une base formée de 4 vecteurs , auquel cas on établirait un parallèle qui conserve les opération entre E et $\mathbb{R}^4$ et notre espace E serait aussi de dimension 4...

La réponse est :NON

5.2 Théorèmes centraux

Définition 9. *Lorsqu'on parle de nombre d'éléments d'une famille de vecteurs on parle de la longueur de la liste de vecteurs .*

Ainsi, dans on dira que la famille (u, u, v, u, v) est une famille de 5 vecteurs .

Théorème 7. *Une famille libre d'un espace vectoriel a moins de vecteur qu'une famille génératrice de cet espace vectoriel .*

Par conséquent

Toutes les bases d'un espace vectoriel ont le même nombre d'éléments.

Démonstration. Théorème admis

□

Remarque culturelle : l'espace $\mathbb{R}[X]$ n'admet pas de base finie, il n'existe pas de famille finie génératrice de $\mathbb{R}[X]$.

Théorème 8. ***et définition de dimension d'un espace vectoriel***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E un espace vectoriel.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- *Les bases de E ont n éléments*
- *L'espace E est calqué sur $\mathbb{R}^n$: Il existe un fonction bijective f de E sur $\mathbb{R}^n$ qui respecte les opérations des deux espaces vectoriels , c'est à dire telle que :*

$$\forall (x, y) \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad f(\alpha.x + \beta.y) = \alpha.f(x) + \beta f(y)$$

Si une des assertion est valide on dit alors que E est de dimension finie et que sa dimension est n, on note :

$$dim(E) = n$$

Remarque : l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ n'est pas de dimension finie (il n'existe pas de famille finie de $\mathbb{R}[x]$ génératrice de $\mathbb{R}[x]$). Nous ne nous intéresserons qu'aux espaces vectoriels de dimension finie.

Étude 16. *Ainsi, pour connaitre la dimension d'un espace vectoriel il suffit de disposer d'une base et d'en compter le nombre de vecteurs :*

Donner la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. $E = \mathbb{R}^2$
2. $E = \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$
3. $E = \mathbb{R}_3[x]$

Définition 10. *Un espace vectoriel de dimension* 1 *est appelé droite vectoriel.*

Un espace vecoriel de dimension 2 *est appelé plan vectoriel .*

Étude 17. *Expliquer ce vocabulaire*

5.3 Espaces de référence (à connaitre parfaitement)

Théorème 9. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension n, la famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,0,\cdots,0) \\ e_2 & = & (0,1,0,\cdots,0) \\ e_3 & = & (0,0,1,\cdots,0) \\ & \vdots & \\ e_n & = & (0,0,0,\cdots,1) \end{array}$$

est une base de $\mathbb{R}^n$

Démonstration. admis, vu en première année

□

Théorème 10. *Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.*

L'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension $n \times p$.

La famille $(E_{1,1}, E_{1,2} \cdots, E_{1,p}; E_{2,1}, E_{2,2} \cdots, E_{2,p}; \cdots; E_{n,1}, E_{n,2}, \cdots, E_{n,p})$

- où pour tout $(i, j) \in [|1, n|] \times [|1, p|]$, $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients valent 0 *sauf celui de la ligne i et colonne j qui vaut* 1 *-*

est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ appelée base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Démonstration. admis

□

Étude 18. *Donner la base canonique de $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$*

Théorème 11. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*
L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est dé dimension $n+1$, la famille $(e_0, e_1, \cdots, e_n)$ où :

$$\begin{array}{rcl}
\forall x \in \mathbb{R}, e_0(x) & = & 1 \\
\forall x \in \mathbb{R}, e_1(x) & = & x \\
\forall x \in \mathbb{R}, e_2(x) & = & x^2 \\
 & \vdots & \\
\forall x \in \mathbb{R}, e_n(x) & = & x^n
\end{array}$$

est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ appelée base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

Démonstration. admis

□

5.4 Un théorème très utile, à connaitre parfaitement

Théorème 12. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*
Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille de longueur n .
Sous ces hypothèses :
Si $\mathscr{F}$ est libre alors $\mathscr{F}$ est une base de E
Si $\mathscr{F}$ est génératrice de E alors $\mathscr{F}$ est une base de E.

Étude 19. 1. *Cas $E = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$*

Montrer que $\mathscr{F}$ est une base de E.

2. *Dans $E = \mathbb{R}_3[x]$ on considère les polynomes P_0, P_1, P_2, P_3 définis par, pour tout x réel :*

$$\begin{array}{rcl}
P_0(x) & = & 1 \\
P_1(x) & = & 1+x \\
P_2(x) & = & 1+x+x^2 \\
P_3(x) & = & 1+x+x^2+x^3
\end{array}$$

Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de E.

6 Sous espaces vectoriel d'un espace vectoriel

6.1 Définition

Définition 11. *Soit E un espace vectoriel.*
On appelle sous espace vectoriel de E toute partie F de E qui vérifie les 2 propriétés suivantes :

— *Le vecteur 0_E appartient à F*
— *L'ensemble F est stable par combinaison linéaire :*
pour tous $x, y \in F, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha.x + \beta.y \in F$

Théorème 13. *Un sous espace vectoriel F de E est lui même un espace vectoriel pour les opérations induites c'est à dire les opération $F \times F \to F, (x,y) \mapsto x+y$ et $\mathbb{R} \times F \to F, (\lambda, x) \mapsto \lambda.x$*

Étude 20. *Montrer que* $\{P \in \mathbb{R}_2[x] | P(1) = 0\}$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}_2[x]$

Théorème 14. *L'ensemble des solution d'un système linéaire homogène à p inconnues est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^p$

Démonstration. Vu en première année

□

Étude 21. *Montrer que* $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - z = 0 \text{ et } y = 0\}$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

6.2 Sous espace vectoriel engendré par des vecteurs (à connaitre parfaitement)

Définition 12. *Étant donnés p vecteurs* $v_1, v_2, \cdots, v_p$ *d'un espace vectoriel E*
on note $Vect(v_1, v_2, \cdots, v_p)$ *l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs* $v_1, v_2, \cdots, v_p$.

Théorème 15. *Étant donnés p vecteurs* $v_1, v_2, \cdots, v_p$ *d'un espace vectoriel :*

— *l'ensemble* $Vect(v_1, v_2, \cdots, v_p)$ *est un sous espace vectoriel de E, on l'appelle espace engendrée par les vecteurs* $v_1, v_2, \vdots, v_p$.

— *la famille* $(v_1, v_2, \cdots, v_p)$ *est génératrice de* $Vect(v_1, v_2, \cdots, v_p)$.

Étude 22 (preuve d'un théorème)**.** *Prouver le précédent théorème*

Étude 23. *Dans les cas suivant :*

— *exprimer F sous la forme* $Vect(...)$

— *en déduire que F est un espace vectoriel (il suffit de dire que c'est vrai par théorème...)*

— *donner une famille génératrice de F*

.

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | a + b + c = 0 \right\}$
2. $F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) | \, {}^tM = M\}$
3. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(0) = 0\}$

Étude 24. *Soit E un espace vecoriel et* $\mathscr{F}$ *une famille de vecteurs de E.*
Traduire "en terme de Vect " l'assertion "$\mathscr{F}$ *est une famille génératrice de E"*

6.3 Règles de simplification de Vect (à connaitre)

Théorème 16. *Soient $v_1, v_2, \cdots, v_{p+1}$ des vecteurs d'un espace vectoriel E et $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ des scalaires.*

1. *Si v_{p+1} est combinaison linéaire de $v_1, v_2, \cdots v_p$ alors :*

$$Vect(v_1, v_2, \cdots, v_p, v_{p+1}) = Vect(v_1, v_2, \cdots, v_p)$$

2. *Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ sont tous différents de 0 alors*

$$Vect(\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \cdots, \alpha_p v_p) = Vect(v_1, v_2, \cdots, v_p)$$

Étude 25. *Prouver ces résultats lorsque $p = 2$*

Étude 26. *Soient u, v deux vecteurs non colinéaires*
Simplifier au maximum :

1. $Vect(u, u, v, 2u, 0_E, u)$
2. $Vect(u+v, 2u, 4v, u-v)$

Remarque à comprendre

On veut obtenir une base de l'espace vectoriel $F = Vect(v_1, v_2, \cdots, v_p)$ lorsque les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_p$ ne sont pas tous nuls.

On sait déjà que $(v_1, v_2, \cdots v_p)$ est génératrice de F.

On distingue 2 cas :

1. La famille $(v_1, v_2, \cdots v_p)$ est libre. Dans ce cas cette famille est libre et génératrice de F, c'est une base de F en vertu du théorème 6.
2. La famille $(v_1, v_2, \cdots, v_p)$ est liée. Dans ce cas un des vecteurs est combinaison linéaire des autres , quitte à renommer les vecteurs on peut supposer qu'il s'agit de v_p.
   Selon le point 1 du théorème 10 :

$$F = Vect(v_1, v_2, \cdots, v_{p-1})$$

On recommence alors la procédure avec une famille de $p-1$ vecteurs.

On est en présence d'un algorithme avec structure "tant que" : Tant que la famille est liée , un des vecteurs est combinaison linéaire des autres , on peut alors le 'supprimer'

L'algorithme s'arrêtera au plus tard lorsqu'il ne restera qu'un vecteur non nul.

Étude 27. *Dans $E = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ on pose :*

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On pose $F = Vect(u, v, w, t)$
Donner une base de l'espace vectoriel F

6.4 Rang d'une famille de vecteur (à connaitre parfaitement)

Définition 13. *On appelle rang d'une famille de vecteur $\mathscr{F}$, et on note $rg(\mathscr{F})$ la dimension de l'espace engendré par les vecteurs de $\mathscr{F}$.*

Ainsi étant donnés p vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_p$ on a , par définition :

$$rg(v_1, v_2, \cdots, v_p) = \dim(Vect(v_1, v_2, \cdots, v_p))$$

Étude 28. *Soient u, v deux vecteurs non colinéaires*
Calculer

1. $rg(u, u, v, 2u, 0_E, u)$
2. $rg(u+v, 2u, 4v, u-v)$

Étude 29. *Donner le rang des familles de vecteurs suivantes :*

1. *La famille* $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right)$ *dans* $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
2. *La famille* $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\right)$ *dans* $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
3. *La famille* $\left(\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\b\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\\b\end{pmatrix}\right)$ *dans* $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *où* $a, b \in \mathbb{R}$

6.5 Dimension d'un sous espace vectoriel

6.5.1 Cas du sous espace nul

Théorème 17. *Étant donné un espace vectoriel E, l'ensemble $\{0_E\}$ est un sous espace vectoriel de E.*
Par convention sa dimension est 0

6.5.2 On peut classer les sous espace d'un espace donné selon leurs dimensions

Théorème 18. *Si F est un sous espace vectoriel d'un espace de dimension finie alors :*
• *L'espace vectoriel F est de dimension finie et $dim(F) \leq dim(E)$*
de plus :
• $dim(F) = dim(E)$ *si et seulement si* $F = E$
• $F = \{0_E\}$ *si et seulement si* $dim(F) = 0$

Démonstration. théorème admis

□

On remarque ainsi que tout sous espace d'un espace E peut s'écrire $Vect(\mathscr{F})$ où $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de E.

Étude 30. *Décrire les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. Représenter géométriquement ces sous-espaces vectoriels.*

Étude 31. *Soit u, v deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$*
Peut-on avoir $Vect(u, v) = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Étude 32. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, u_2, \cdots, u_k$ des vecteurs de $\mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})$*
Montrer que $rg(u_1, u-2, \cdots, u_k) \leq 9$

7 Exercices du chapitre 8

Quelques questions sur le cours

Exercice 1
Vrai ou faux ?

Il faut justifier , comme toujours.

1. Soit E un espace vectoriel et u, v, w trois vecteurs de E,
   la famille $(u, v, w, u - w)$ est une famille liée.
2. L'ensemble des fonction polynomiale de degré 2 est un espace vecoriel
3. Soient E un espace vectoriel et u, v, w des vecteurs de E.
   On suppose que :
   — Les vecteurs u, v sont linéairement indépendants (la famille (u, v) est libre)
   — Les vecteurs v, w sont linéairement indépendants
   — Les vecteur v, w sont linéairement indépendants

   La famille (u, v, w) est-elle libre .
4. La réciproque de 3 est vraie.

Exercice 2
Soient a, b, c trois vecteurs d'un espace vectoriel. On pose $u = a + b, v = b - c, w = a + c$.
Montrer que la famille (u, v, w) est liée

Exercice 3
Soient a et b deux vecteurs d'un espace E, quelle hypothèse suffit il d'ajouter pour que l'implication suivante soit vraie pour tous réels α, β ?

$$\alpha a + \beta b = \alpha' a + \beta' b \Rightarrow (\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta')$$

Dans les exercices 4 à 6, les vecteurs sont des n-uplets de réels

Exercice 4
Montrer que la famille $((1, 1); (-2, 6))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
Quels sont les coordonnées du vecteur $(1, 1)$ dans cette base ?

Exercice 5
Vrai ou faux ?
Si E est un espace vectoriel de dimension n, toute famille génératrice de E a exactement n vecteurs.

Les vecteurs sont des matrices

Exercice 6
Dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
La famille (A, B, C, D, E) où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

est elle liée ?

Exercice 7
On introduit la base canonique $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

1. Rappeler ce que sont les matrices : $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$.
2. On pose :

$$A = E_{1,2} - E_{2,1}, \quad B = E_{1,2} + E_{2,1}, \quad C = I_2, \quad D = E_{1,1} - E_{2,2}$$

   et

$$\mathscr{F} = (A, B, C, D)$$

   Montrer que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$
3. Soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   Déterminer la matrice représentative de M dans $\mathscr{B}$ ainsi que la matrice de M dans $\mathscr{F}$.

Exercice 8
Une matrice carrée A est dite antisymétrique lorsque : ${}^tA = -A$.
Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n.
Vrai ou faux ?

1. Toute matrice antisymétrique à 2 lignes, 2 colonnes est combinaison linéaire des matrices $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$.
2. On a

$$\mathscr{A}_2(\mathbb{R}) = Vect(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$$

   où $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques à coefficients réels.

Exercice 9
Matrices antisymétriques
Une matrice carrée A est dites antisymétrique lorsque : ${}^tA = -A$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On notre $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétrique à n lignes , n colonnes.

1. Montrer que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
2. On considère les trois matrices

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille libre de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$
   (b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$
   (c) Donner la dimension de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$
   (d) On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
   Remarquer $A \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$, écrire la matrice de A dans la base $\mathscr{B}$

Exercice 10
Dans les cas suivants , trouver une famille finie de matrices $A_1, A_2, \cdots, A_p$ telle que $F = Vect(A_1, A_2, \cdots, A_p)$.
En déduire que F est un espace vectoriel (pour $+$ et . définies sur les matrices) et donner une base et enfin la dimension de cet espace vectoriel F.

1. On suppose que F est l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont la première colonne est nulle.
2. On suppose que F est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.
3. On suppose que F est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
4. On suppose que $F = \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$, c'est à dire que F est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 11
On pose :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E l'ensemble des matrices M à trois lignes trois colonnnes et coefficients réels qui vérifient :

$$MK = KM = M$$

1. (a) Montrer que E est un espace vecoriel
   (b) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de E n'est inversible.
2. Traduire les relations $MK = KM = M$ par des relations sur les cofficients de M.
3. Déterminer alors une base de E ainsi que la dimension de E.

Exercice 12
On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

1. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis montrer que $A = PTP^{-1}$
2. Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.
3. Soit N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \Longleftrightarrow (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$

4. En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille :

$$(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1})$$

.

5. Donner la dimension de F.

Exercice 13
Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose : $A^2 + A + I_2 = 0_{2,2}$
Calculer :

$$rg(I, A, A^2, A^3, A^4, A^5)$$

Dans les exercices 19 à 22,les vecteurs sont des polynômes

Exercice 14
On note : u, v, w les fonction polynomiales définies par

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, u(x) &= x^2 + x + 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}, v(x) &= x + 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}, w(x) &= 1 \end{aligned}$$

1. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Déterminer les matrices représentatives des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ dans cette base (u,v,w)
3. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Quels sont les coordonnées du polynôme : $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ dans la base (u,v,w) ?

Exercice 15
On note F l'ensemble des polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) + xP'(x) = 0$$

.

1. Quel est le zero qui figure ci dessus ?
2. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$
3. Déterminer une base de F et la dimension de F

Corrigé de l'étude 8 -facultatif
Soient u, v, w trois vecteur d'un espace E.

1. Écrire la négation de l'assertion :

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3, \alpha.u+\beta.v+\gamma.w=0 \Rightarrow (\alpha=0 \quad \text{et} \quad \beta=0 \quad \text{et} \quad \gamma=0)$$

$$\exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 : \alpha.u+\beta.v+\gamma.w=0 \quad \text{et} \quad (\alpha\neq 0 \quad \text{ou} \quad \beta\neq 0 \quad \text{ou} \quad \gamma\neq 0)$$

2. Conclure
On suppose la famille (u, v, w) liée .
Ainsi un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.
Supposons sans perdre en généralité que u est combinaison linéaire de v, w.
Il existe donc $\delta, \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \delta v + \lambda.w$
En posons : $\alpha = 1, \beta = -\delta, \gamma = -\lambda$
On a : $\alpha.u+\beta.v+\gamma.w = 0$, comme : $1 \neq 0$ on a aussi $(\alpha\neq 0 \quad \text{ou} \quad \beta\neq 0 \quad \text{ou} \quad \gamma\neq 0)$
On suppose maintenant que

$$\exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 : \alpha.u+\beta.v+\gamma.w=0 \quad \text{et} \quad (\alpha\neq 0 \quad \text{ou} \quad \beta\neq 0 \quad \text{ou} \quad \gamma\neq 0)$$

On choisit de tels $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
On a

$$(\alpha\neq 0 \quad \text{ou} \quad \beta\neq 0 \quad \text{ou} \quad \gamma\neq 0)$$

Supposons sans perdre en généralité que $\alpha \neq 0$
On obtient :

$$u = -\frac{\beta}{\alpha}.v - \frac{\gamma}{\alpha}.w$$

Ainsi la famille (u, v, w) est liée.
On voulait prouver la phrase $p \Longleftrightarrow q$ (p :'la famille (u, v, w) est libre)
On a prouvé $(Nonp \Longleftrightarrow NonQ)$
Les assertions $p \Longleftrightarrow q$ et $(Nonp \Longleftrightarrow Nonq)$ sont logiquement équivalentes.

Corrigé de l'étude 11

1. Prouver le théorème ci-dessus.
Soit u un vecteur. Posons $\mathscr{F} = (u)$
Si u est le vecteur nul alors la famille $\mathscr{F}$ est liée en vertu du théorème 2.
Par contraposée : Si $\mathscr{F}$ est libre alors u n'est pas le vecteur nul.
Prouvons l'autre implication :
Supposons u non nul.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha.u = 0_E$.
Par théorème 1 : $u = 0_E$ où $\alpha = 0$
Ici $u \neq 0_E$ donc $\alpha = 0$.
On a montré :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha.u = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

En vertu du théorème 3, on a montré que $\mathscr{F}$ est libre.

2. Montrer, en donnant un exemple explicite, qu'il ne suffit pas que des vecteurs soient non nuls pour qu'ils soient indépendants linéairement, c'est à dire qu'ils forment une famille libre.
Dans $\mathbb{R}^2$ on prend : $u = (1, 1)$ et $v = (2, 2)$.
Les vecteur u, v sont non nuls mais la famille (u, v) est liée puisque $v = 2.u$.