

Chapitre 3: couples de variables aléatoires discrètes

Afin d'étudier efficacement le cours : refaites les schémas (ou dessins) et études qui l'accompagnent et vérifiez dans un second temps en consultant vos notes manuscrites

Table des matières

1	Quelques rappels	1
2	Révisions : loi d'une variable aléatoire discrète	2
3	Loi d'un couple de variables aléatoires (ou loi conjointe)	3
4	Conditionnement et indépendance	4
4.1	Rappels	4
4.2	Loi d'une variable aléatoire sachant un événement	5
4.3	Indépendance	6
4.4	Modélisation d'expérience aléatoire	6
5	Exercices du chapitre 3	6

1 Quelques rappels

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut connaître à l'avance le résultat.

Le mot aléatoire vient de aléa qui signifie "jeu de dés".

On appelle **événement** tout 'fait' dont on peut dire, connaissant le résultat de l'expérience si il s'est réalisé ou non.

Donnons un exemple d'expérience aléatoire : on lance un dé à 6 faces ; puis un exemple d'événement associé à cette expérience : on obtient un numéro impair.

Afin d'étudier une expérience aléatoire on commence par la **modéliser mathématiquement** . C'est à dire qu'on associe des 'objets mathématiques' (ensembles, fonctions...) à notre expérience.

Plus précisément nous associons trois objets :

- Un ensemble Ω qui représente tous les résultats possibles de l'expérience.
- Un ensemble $\mathcal{A}$ dont les éléments sont des parties de Ω . Chaque élément de $\mathcal{A}$ représente un événement .
- Une application P de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$ qui vérifie deux propriétés :
 - 1) La probabilité de Ω (événement certain) vaut 1
 - 2) La probabilité d'une réunion d'événements deux à deux incompatibles est la somme des probabilités de ces événements.

Cette application P est appelée **probabilité**, étant donné un événement A , $P(A)$ est appelé **probabilité de l'événement A**.

Enfin le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé **espace probabilisé**.

Étude 1 (Calcul dans un espace probabilisé). *Rappeler plusieurs propriétés d'une probabilité P (ces propriétés sont conséquences des propriétés de définition 1 et 2)*

On pourra démontrer ces propriétés.

Par exemple $P(\bar{A}) = \dots$

On rappellera en particulier le théorème des probabilités totales (dans une forme qui ne fait pas intervenir de probabilités conditionnées)

Étude 2. Donner l'espace probabilisé qui modélise l'expérience : "lancer un dé équilibré à 6 face"

Dans la suite du cours on ne cherchera plus à expliciter l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

En revanche on est amené à faire des hypothèses sur certains événements où certaines variables aléatoires.

Rappelons qu'une **variable aléatoire** est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Pour $\omega \in \Omega$; $X(\omega)$ correspond à la valeur que prend X lorsque ω est le résultat de l'expérience.

Ainsi on peut penser une variable aléatoire comme un nombre que l'on connaît lorsqu'on connaît le résultat ω de l'expérience.

Étude 3. Il ne faut surtout pas confondre événement et variable aléatoire

On considère l'expérience : "lancer deux dés à 6 face"

Dans les cas suivants, parle-t-on d'événement, de variable aléatoire ?

1. somme des résultats obtenus
2. obtenir deux nombres pairs
3. obtenir 1

Définition 1 (Variable aléatoire discrète). Une variable aléatoire est dite discrète lorsqu'on peut énumérer ses valeurs : $x_0, x_1, x_2, \dots$

Plus précisément lorsqu'il existe une bijection entre $X(\Omega)$ et $\mathbb{N}$ où une partie de $\mathbb{N}$.

Étude 4. Dans les cas suivants dire si X va se modéliser en une variable aléatoire réelle discrète ou non ?

1. On lance 15 pièces équilibrées et on s'intéresse au nombre de "pile" obtenus.
2. Un invité doit arriver entre 19h et 20h, on note X l'instant d'arrivée de l'invité.
3. On note X le temps d'attente avant qu'une photocopieuse tombe en panne.
4. Nombre d'étoiles filantes observées une belle nuit d'été entre 1 heure et 5 heures.

2 Révisions : loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 2. La loi d'une variable aléatoire X est la donnée de deux choses :

- L'ensemble des valeurs que peut prendre X (qui est l'ensemble $X(\Omega)$)
- Pour chaque k valeur possible pour X , la probabilité que X prenne la valeur k soit : $P([X = k])$ encore noté $P(X = k)$

Étude 5. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(2, 0.5)$

1. Donner sous forme de tableau la loi X
2. Donner un exemple d'expérience aléatoire et une variable aléatoire associée à cette expérience qui suit la loi $\mathcal{B}(2, 0.5)$.
3. Plus généralement donner la loi $\mathcal{B}(n, p)$, on précisera quelles sont les valeurs possibles pour n et p
4. Rappeler les valeurs de l'espérance et la variance d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$

Étude 6. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $1/3$.

1. Donner la loi de X
2. Calculer $P(X > 3)$
3. Donner un exemple d'expérience aléatoire qui se modélise par une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(1/3)$

4. Donner $E(X)$ puis calculer le nombre S où :

$$S = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{3^k}$$

Étude 7. 1. Rappeler le cours de ECG1 sur la loi de Poisson .

2. Une des variables aléatoires de l'étude 3 suit une loi de Poisson. Laquelle ?

Théorème 1. Si X est une variable aléatoire discrète alors la somme $\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k)$ existe et vaut 1

Étude 8. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ via deux méthodes différentes.

3 Loi d'un couple de variables aléatoires (ou loi conjointe)

Définition 3. La loi d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes (X, Y) est la donnée de trois choses :

- Les valeurs possibles pour X
- Les valeurs possible pour Y
- Pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,
la probabilité que : " X prenne la valeur i et en même temps Y la valeur j "
c'est à dire :

$$P([X = i] \cap [Y = j])$$

On parle aussi de loi conjointe de X et Y .

Étude 9. Expérience 1, écrire la loi du couple (X, Y) . On présentera le résultat sous forme de tableau à double entrée, les valeurs prises par X étant placée en colonne et celles prises par Y en ligne.

Étude 10. Expérience 1 toujours, écrire la loi du couple (U, V) . On présentera le résultat sous forme de tableau à double entrée.

Nous allons maintenant observer deux propriétés sur les 2 exemples précédents qui sont généralisées par les énoncés des théorèmes 1 et 2

Étude 11. 1. Sommer les probabilités d'événements inscrites dans les tableaux des loi de (X, Y) et (U, V) . Qu'observez vous ? Pourquoi pouvez t-on le justifier sans faire de calcul.

2. Expliquer pourquoi en sommant les probabilités d'événements inscrites dans chaque ligne du tableau donnant la loi de (X, Y) on obtient la loi de X . En faisant de même mais pour les colonnes on retrouve la loi de Y .

Montrer de même que l'on peut faire apparaître les lois de U, V en **marge** du tableau donnant la loi du couple (U, V)

Théorème 2. Étant données deux variables aléatoires réelles Discrètes X, Y , on a :

$$\forall i \in X(\Omega), P(X = i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} P([X = i] \cap [Y = j])$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème des probabilités totales au s.c.e associé à Y . □

- Cas $Y(\Omega) = [1, n]$ où n est un entier naturel fixé, n est donc une donnée de l'énoncé
 Dans ce cas on obtient :

$$\forall i \in X(\Omega), P(X = i) = \sum_{j=1}^n P([X = i] \cap [Y = j])$$

- Cas $Y(\Omega) = \mathbb{N}$
 Dans ce cas on obtient :

$$\forall i \in X(\Omega), P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P([X = i] \cap [Y = j])$$

Étude 12 (À comprendre et savoir refaire en colle). *Cas de l'expérience 4*

1. Déterminer la loi conjointe de X et Y
2. En déduire les lois de X et Y . Quel résultat connu retrouve-t-on ?

Théorème 3. Lorsque X, Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes, la somme :

$$\sum_{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P([X = i] \cap [Y = j]) \text{ existe et vaut } 1$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que les événements $[X = i] \cap [Y = j]$, $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ forment un système complet d'événements □

Étude 13. Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$

On suppose que

$$P([X = 1] \cap [Y = 0]) = P([X = 0] \cap [Y = 1]) = P([X = 1] \cap [Y = 1]) = 2P([X = 0] \cap [Y = 0])$$

On pose $p = P([X = 0] \cap [Y = 0])$

1. Calculer p .
2. Déterminer la loi conjointe de X et Y
3. Déterminer les lois de X et Y .

4 Conditionnement et indépendance

4.1 Rappels

Définition 4. Étant donnés deux événements A et B , lorsque $P(A) \neq 0$, le réel : $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ est appelé probabilité de B sachant A et est noté $P_A(B)$

On interprète donc ce nombre comme la probabilité que B se réalise sachant que A s'est réalisé.

Bien souvent la valeur de $P_A(B)$ n'est pas calculée à partir de $P(A \cap B)$ et $P(A)$ mais donnée directement comme transcription immédiate d'une hypothèse de modélisation .

Par exemple dans le cas de l'expérience 2, on donnera de suite $P_{[X=1]}([Y = 2]) = 1/2$ en disant que sachant que l'on a pioché la boule 1 en premier, il ne reste alors que les boules 2 et 3 dans l'urne lors de la seconde pioche.

Définition 5. Deux événements A et B sont dits indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Remarquons que lorsque A n'est pas négligeable les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ c'est à dire si, sachant que A s'est réalisé, la probabilité que B se réalise est la même que lorsqu'on a pas d'information sur A .

Étude 14. On lance un dé équilibré à 6 face. Les événements "obtenir un numéro inférieur ou égal à 4" et "obtenir un numéro impair" sont-ils indépendants ?

4.2 Loi d'une variable aléatoire sachant un événement

Définition 6. Étant donné un événement A tel que $P(A) \neq 0$, on note P_A l'application qui à un événement B associe le réel $P_A(B)$

Théorème 4 (Hors programme). L'application P_A est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$

Remarque hors programme : si l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ modélise une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ alors (pour $A \in \mathcal{A}$) l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ modélise cette même expérience $\mathcal{E}$ avec l'hypothèse(l'information) : A s'est réalisé.

Définition 7. Étant donnée une variable aléatoire X et un événement A non négligeable, on appelle loi de X sachant A (ou conditionnellement à A) la loi de X pour la probabilité P_A .

Étude 15. On lance une pièce équilibrée, si on obtient pile, on lance un dé équilibré à 6 faces (numérotées de 1 à 6), si on obtient face on lance un dé à 4 faces (numérotées de 1 à 4)

- 1) Donner la loi de X sachant l'événement A : on obtient pile.
- 2) Donner la loi de X sachant $\bar{A}$
- 3) Donner la loi de X

Étude 16. Dans le cas des 3 premières expériences donner la loi de Y sachant $[X = i]$ pour chaque valeur i de $X(\Omega)$

Étude 17. Dans le cas de l'expérience 4 déterminer la loi de X sachant $[Y = j]$ pour j entier fixé supérieur ou égal à 2.

Théorème 5. Étant données deux variables aléatoires réelles Discrètes X, Y , telles que $\forall i \in X(\Omega), P(X = i) \neq 0$, on a :

$$\forall j \in Y(\Omega), \quad P(Y = j) = \sum_{i \in X(\Omega)} P([X = i])P_{[X=i]}([Y = j])$$

Démonstration. Il suffit encore d'appliquer le théorème des probabilités totales au s.c.e. associé à X . □

Ce théorème est presque le même que le théorème 1 mais on a remplacé $P([X = i] \cap [Y = j])$ par $P([X = i])P_{[X=i]}([Y = j])$.

Étude 18. Dans le cas de l'expérience 3 calculer $P(Y = 2)$.

4.3 Indépendance

Définition 8. Deux variables aléatoires réelles discrètes X, Y sont dites indépendantes lorsque :

$$\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P([X = i] \cap [Y = j]) = P(X = i)P(Y = j)$$

On remarque que X et Y sont indépendantes si et seulement si :

pour tout $i \in X(\Omega)$ tel que $P(X = i) \neq 0$,
la loi de Y sachant $[X = i]$ est la même que la loi de Y (en n'ayant aucune information sur la valeur prise par X).

Étude 19. Dans le cas des expériences 2, 3, 4 dire si les variables aléatoires réelles X, Y sont indépendantes ou non.

Dans le cas où il n'y a pas d'indépendance on le prouvera en exhibant un couple (i, j) tel que $P([X = i] \cap [Y = j]) \neq P(X = i)P(Y = j)$

Théorème 6. Lorsque X, Y sont indépendantes, pour tous intervalles I, J de $\mathbb{R}$ les événements $[X \in I]$ et $[Y \in J]$ sont indépendants

Étude 20. Donner un exemple d'expérience aléatoire qui se modélise par deux variables aléatoires X, Y indépendantes de même loi : $\mathcal{B}(3, 0.5)$

Calculer $P([X \leq 2] \cap [Y \leq 1])$

4.4 Modélisation d'expérience aléatoire

Les probabilistes modélisent les expériences aléatoires par la donnée de variables aléatoires réelles et d'hypothèses sur ces variables aléatoires réelles

Étude 21. Dans chacun des cas suivants, donner le numéro de l'expérience dont on donne le modèle :

1. Les variables aléatoires réelles X, Y sont indépendantes et suivent la même loi géométrique de paramètre $1/2$.
2. Les variables aléatoires réelles X, Y sont indépendantes de loi uniforme sur $\{1, 2\}$
3. Les variables aléatoires réelles X, Y sont indépendantes de lois binomiales, respectivement $\mathcal{B}(15, p)$ et $\mathcal{B}(5, p)$.

Étude 22. Dans chaque cas, décrire une expérience aléatoire qui correspond au modèle :

1. Les variables aléatoires réelles X, Y sont indépendantes de loi uniforme sur $[1, 6]$
2. (*) La variable aléatoire réelle X suit la loi géométrique de paramètre $1/2$, par ailleurs Y est une variable aléatoire réelle telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y sachant $[X = i]$ est la binomiale de taille i et paramètre $1/2$.

5 Exercices du chapitre 3

Exercice 1

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, justifier.

Comment justifier :

Lorsque c'est vrai on le démontre !

Lorsque c'est faux on présente un exemple explicite pour lequel l'assertion n'est pas valide.

1. Si deux variables aléatoires réelles sont à valeurs dans $[1, 5]$ alors :

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 P([X = i] \cap [Y = j]) = 1$$

2. Si on connaît la loi de X et Y on peut calculer la loi du couple (X, Y)
3. (*) Si X et Y ont même loi alors $P(X < Y) = P(Y < X)$
4. (*) Soient X, Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Si : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k \cap Y = k) = P(X = k)P(Y = k)$ alors X et Y sont indépendantes.
5. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $[1, n]$.
On a :

$$\forall j \in [1, n], P(Y = j) = \sum_{i=1}^n P_{(X=i)}(Y = j)$$

Exercice 2

Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3.

On effectue deux tirages successifs **sans** remise .

On note :

X la variable aléatoire réelle égale au premier numéro pioché .

Y la variable aléatoire réelle égale au second numéro tiré .

M la variable aléatoire réelle égale au plus grand numéro tiré.

I la variable aléatoire réelle égale au plus petit numéro tiré .

1. Déterminer les lois des couples $(X, Y), (M, I)$ Ces lois s'exprimeront sous forme de tableau à double entrées (cf exemple simple traité dans le cours).
2. En déduire les lois des variables aléatoires réelles X, Y, M, I, S

Exercice 3

(*)

Une urne contient deux boules blanches , deux boules rouges et trois boules bleues .

On pioche **simultanément** trois boules.

On note X le nombre de boules blanches parmi ces trois boules, Y le nombre de boules rouges.

1. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2. On va déterminer la loi du couple (X, Y) , les premières questions constituent des indications .
On numérote les boules de 1 à 7.
(a) Quel objet mathématique représente une pioche .
(b) Combien y-a-t-il de pioches possible ? sont-elle équiprobable ?
(c) Donner la loi conjointe de X et Y , c.a.d. la loi du couple (X, Y) ?
3. En déduire les lois de X et Y .

Exercice 4

(*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n , et on effectue deux tirages sans remise dans cette urne.

On note X le plus petit des deux numéros obtenus , et Y le plus grand.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y)
2. En déduire les lois de X et de Y .
3. Les variables aléatoires réelles X et Y sont-elles indépendantes.

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, P([X = j] \cap [Y = k]) = \frac{1}{8} \times \frac{j+k}{2^{j+k}}$$

1. Déterminer les lois de X et Y .
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 6

(*)

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n telles que, pour tout entier k compris entre 1 et n l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k .

On réalise l'expérience suivante :

- On choisit au hasard (de façon équiprobable) une urne parmi les n
- On pioche alors une boule dans cette urne.

On note X la variable aléatoire réelle égale au numéro de l'urne choisie et N la variable aléatoire réelle égale au numéro porté par la boule obtenue.

1. Déterminer la loi du couple (X, N)
2. En déduire la loi de N (sous forme de somme)
3. Calculer l'espérance et la variance de N

Exercice 7

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $1/2$.

On pose, pour tout $\omega \in \Omega$, $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$.

Quelle est la probabilité que la matrice aléatoire M soit inversible ?

Exercice 8

(*)

Un magasin possède 5 caisses numérotées de 1 à 5, chaque caisse est ouverte toute la durée d'ouverture du magasin. On suppose que chaque client choisit une des 5 caisses avec équiprobabilité et indépendamment des autres clients.

Le nombre aléatoire de clients qui fréquentent le grand magasin le samedi est noté N . On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ , λ réel strictement positif fixé.

On note X le nombre de clients qui utilisent la caisse 1 le samedi.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles pour X .
2. Étant donné $n \in \mathbb{N}$, donner la loi de X conditionnellement à l'événement $[N = n]$
3. Déterminer la loi de X .

Exercice 9

(*)

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$.

On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$P([X = k] \cap [Y = n]) = \begin{cases} \binom{n}{k} p \left(\frac{1-p}{2}\right)^n & \text{si : } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi marginale de Y .
2. Sachant

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

Déterminer la loi de X .

Quelle est la loi de $X + 1$?

3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?