

Chapitre 1 : Révisions et compléments sur les suites réelles

Objectif concours : à savoir faire à l'issue du chapitre

À l'issue de ce chapitre, vous devez notamment savoir :

- **Étudier une suite définie à l'aide d'une intégrale** : établir sa monotonie, déterminer éventuellement 'des majorations ou minoration' et appliquer le théorème de convergence monotone.
- **Étudier une suite définie implicitement** : utiliser notamment le théorème de la bijection pour justifier son existence et son unicité, puis étudier sa monotonie et son comportement asymptotique.
- **Étudier une suite définie par récurrence** : montrer qu'un intervalle est stable, étudier la monotonie de la suite, utiliser le théorème de convergence monotone et, lorsque cela est possible, obtenir une équation vérifiée par sa limite.

Dans la seconde partie du chapitre :

- Reconnaître une négligeabilité $u_n = o(v_n)$ ou une équivalence $u_n \sim v_n$ à l'aide d'un quotient.
- Utiliser les croissances comparées pour identifier un terme dominant.
- Déterminer un équivalent simple d'une somme en faisant apparaître son terme dominant.
- Utiliser les équivalents usuels

$$\ln(1 + h_n) \sim h_n, \quad e^{h_n} - 1 \sim h_n, \quad (1 + h_n)^\alpha - 1 \sim \alpha h_n$$

lorsque $h_n \rightarrow 0$.

- **Utiliser un équivalent pour déterminer une limite.**
- Connaître les opérations compatibles avec les équivalents : produit, quotient et puissance sous les hypothèses appropriées.
- Repérer les opérations qui ne sont pas, en général, compatibles avec les équivalents et qui nécessitent donc une justification supplémentaire, notamment l'addition et la composition par une fonction telle que $\ln$.

Afin d'étudier efficacement le cours : refaites les schémas (ou dessins) et les études qui l'accompagnent, puis vérifiez dans un second temps en consultant vos notes manuscrites.

Table des matières

À savoir faire à l'issue du chapitre	1
I Plusieurs façons de définir une suite	2
1 Suite définie explicitement	2
2 Suite définie implicitement	3
2.1 Révisions : théorème de la bijection	4
2.2 Exemple d'étude de suite définie implicitement	4

3	Suites définies par itération d'une fonction	4
3.1	Illustration graphique	5
3.2	Monotonie de (u_n) lorsque f est croissante	5
3.3	Limite éventuelle d'une suite récurrente	5
3.4	Lorsque f est "contractante "	6
II	Comparaison des suites réelles	8
4	Suite négligeable devant une autre suite	8
4.1	Définition et premiers exemples	8
4.2	Règles de calcul	9
4.3	Résultats à parfaitement connaître	10
5	Suite équivalente à une autre suite	10
5.1	Définition et premiers exemples	10
5.2	Résultats remarquables	11
5.3	Calculs d'équivalents	13
5.3.1	Lien avec la négligeabilité	13
5.3.2	Compatibilité avec certaines opérations	14
5.3.3	Résultats à parfaitement connaître	16
III	Exercices du chapitre 1	17

Première partie

Plusieurs façons de définir une suite

Pourquoi étudier les suites numériques en mathématiques ?

Les suites interviennent naturellement dans la modélisation *discrète* de nombreux phénomènes évoluant au cours du temps. Par exemple, en démographie, on peut désigner par u_n la population d'un pays au cours de l'année n . L'étude mathématique de la suite (u_n) permet alors de décrire et, sous certaines hypothèses, de prévoir l'évolution de cette population. Nous verrons (sans pouvoir y consacrer un temps trop long) comment les résultats mathématiques présentés ici peuvent être utilisés dans des situations concrètes issues de l'économie, de la finance ou des sciences sociales. Après une phase de **modélisation**, nous serons ainsi amenés à étudier différents types de suites :

- **Épargne et intérêts capitalisés** : le placement mensuel d'une partie d'un salaire sur un compte rémunéré conduit à l'étude d'une **suite définie par récurrence**.
- **Taux de rendement interne (TRI) d'un investissement** : la comparaison entre un investissement initial et les flux financiers futurs qu'il génère conduit à l'étude d'une **suite définie implicitement**.
- **Dynamique d'une population** : le modèle de Verhulst permet de prendre en compte le ralentissement de la croissance d'une population dû aux ressources limitées du milieu et conduit à l'étude d'une **suite récurrente**.
- **Mesure des inégalités de revenus** : l'indice de Gini, construit à partir de la courbe de Lorenz, permet de quantifier les inégalités dans une distribution de revenus. L'étude de leur évolution peut conduire à celle d'une **suite définie à l'aide d'une intégrale**.

1 Suite définie explicitement

On exprime explicitement u_n en fonction de n .

Exemples :

Exemple 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$

Exemple 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^1 \frac{t}{1+t^n} dt$$

Exemple 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x^n$ où x est un réel fixé.

Dans l'exemple 2 la suite (u_n) est définie à l'aide d'une intégrale qu'on ne sait pas calculer. On peut tout de même obtenir des informations sur la suite (u_n) , c'est l'objet de très nombreux sujets de concours.

Étude 1. CSR : Classique à comprendre et savoir refaire, vous serez interrogés sur cet exemple où un exemple analogue en colle, interrogation ou devoir surveillé

On étudie la suite de l'exemple de 2.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 .
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que la suite (u_n) converge.

Dans l'exemple 3, la suite (u_n) dépend d'un paramètre x . Nombreux phénomènes se modélisent par des suites dépendant d'un paramètre (ou plusieurs).

Par exemple, si on place une somme S sur un compte rémunéré à un taux de r pour cent, le montant u_n du compte à l'issue de n années est donné par

$$u_n = S \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n.$$

Nous reparlerons de cela dans la première séance d'informatique.

On finit cette section par un rappel important :

Étude 2. Rappeler la limite éventuelle de la suite de terme général x^n , en fonction de x .

2 Suite définie implicitement

Principe : étant donné $n \in \mathbb{N}$, on définit u_n comme l'unique solution d'une certaine équation (E_n) .

Remarque : si on sait résoudre (E_n) , on se retrouve avec une suite définie explicitement.

C'est le cas dans l'étude suivante :

Étude 3. CSR : Classique à comprendre et savoir refaire, vous serez interrogés sur cet exemple où un exemple analogue en colle, interrogation ou devoir surveillé

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la solution positive de l'équation $x^2 + x = n$.

Calculer u_n et donner des propriétés de la suite (u_n) .

Dans de nombreuses situations on ne sait pas résoudre (E_n) on réussit tout de même à prouver l'existence d'une unique solution u_n en appliquant le théorème de la bijection vu en première année :

2.1 Révisions : théorème de la bijection

Théorème 1. Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

Alors f réalise une bijection de I sur un intervalle J .

Les bornes de J s'obtiennent en calculant les limites de f aux bornes de I .

Plus précisément :

- si f est strictement croissante, les bornes de J sont dans le même ordre que celles de I ;
- si f est strictement décroissante, les bornes de J sont dans l'ordre inverse.

Par ailleurs, l'application réciproque

est continue et a le même sens de variation que f ainsi : Ainsi, si f est strictement croissante, f^{-1} l'est aussi ; si f est strictement décroissante, f^{-1} l'est aussi.

Étude 4. En appliquant le théorème de la bijection montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ réalise une bijection de $[0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

Donner la fonction réciproque .

Représenter les courbes des deux fonctions sur un dessin.

Étude 5. Application simple du théorème de la bijection

Montrer que l'équation $x + e^x = 3$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Étude 6. L'hypothèse de continuité est essentielle.

Considérons la fonction $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ x + 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Ici la limite de f en 0 est $f(0)$ qui vaut 0 et en 2 la limite vaut $f(2)$ qui vaut 3.

La fonction $f : [0, 2] \rightarrow [0, 3]$ est-elle injective ? Surjective ?

2.2 Exemple d'étude de suite définie implicitement

Donnons un exemple simple :

Étude 7. Classique à comprendre et savoir refaire, vous serez interrogés sur cet exemple où un exemple analogue en colle, interrogation ou devoir surveillé
Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on note (E_n) l'équation sur $\mathbb{R}$:

$$x^3 + x = n$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$.
On fera des dessins pour expliquer l'importance des différentes hypothèses du ou des théorèmes utilisés.
2. Calculer u_0, u_2, u_{10}
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante .
4. Montrer que $u_n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3 Suites définies par itération d'une fonction

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On souhaite définir une suite (u_n) par

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Pour que cette relation permette de définir u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suffit que l'intervalle I soit **stable par f** , c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) \in I.}$$

En effet, puisque $u_0 \in I$, on obtient successivement

$$u_1 = f(u_0) \in I, \quad u_2 = f(u_1) \in I, \quad \dots$$

et ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I.$$

On dit que la suite (u_n) est obtenue par **itération de la fonction f** à partir de a .

Étude 8. Comprendre l'importance de la stabilité de l'intervalle.

Considérons la fonction

$$f(x) = 1 + \ln(x).$$

La fonction f est définie sur $]0, +\infty[$. Cependant, cet intervalle n'est pas stable par f .

Par exemple, si

$$u_0 = \frac{1}{e^2},$$

alors

$$u_1 = \dots$$

Conclure

Explications : voir la construction graphique des itérés d'une fonction.

3.1 Illustration graphique

Étude 9. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x.$$

On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Représenter graphiquement les premiers itérés de 1, c'est-à-dire $u_1, u_2, u_3, \dots$, en utilisant la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.

Conjecturer le comportement de la suite u .

Retrouver les explications données en classe en visionnant : voir la construction graphique des itérés d'une fonction.

3.2 Monotonie de (u_n) lorsque f est croissante

On se place dans le contexte de la section précédente et on suppose que f est croissante .

Étude 10. Montrer que si $u_0 \leq u_1$ alors (u_n) est croissante

et que si $u_0 \geq u_1$ alors (u_n) est décroissante.

Illustrer à l'aide d'un dessin.

3.3 Limite éventuelle d'une suite récurrente

Définition 1. On appelle point fixe d'une fonction f tout élément x de son espace de départ qui vérifie :

$$f(x) = x$$

Étude 11. Quel(s) sont les éventuels points fixes de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$?

Théorème 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow I$ et $a \in I$.

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Si la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in I$ et si f est continue en ℓ , alors

$$f(\ell) = \ell.$$

Autrement dit, si la suite converge, sa limite est nécessairement un point fixe de f .

Démonstration. On suppose que (u_n) converge vers l , donc :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l.$$

On suppose aussi que f est continue en l , c'est à dire que :

$$f(t) \xrightarrow{t \rightarrow l} f(l).$$

Par théorème (composition de limites)

$$f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(l).$$

Donc, comme : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, on a :

$$u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(l).$$

Comme $u_n \rightarrow l$, par théorème (de ECG1) $u_{n+1} \rightarrow l$

Par théorème (unicité de la limite) :

$$l = f(l)$$

□

Étude 12 (Application du théorème). **CSR**

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$$

On admet que (u_n) converge. Calculer sa limite.

On proposera une solution en appliquant directement le théorème ci-dessus et une autre sans utiliser le théorème.

3.4 Lorsque f est "contractante "

Théorème 3. *Théorème hors programme mais la situation se rencontre souvent dans les sujets de concours*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow I$.

On suppose que f admet un point fixe $\ell \in I$ et qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Alors, pour tout $u_0 \in I$, la suite (u_n) définie par

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers ℓ .

De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|.$$

Étude 13. *Preuve du théorème*

Sous les hypothèses du théorème ci-dessus montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|.$$

puis conclure au sujet de la convergence de (u_n)

L'hypothèse

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

(pour un réel k donné) se justifie souvent à l'aide du théorème des accroissements finis. Rappelons l'énoncé :

Théorème 4 (Inégalité des accroissements finis). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

S'il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq M,$$

alors

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Deuxième partie

Comparaison des suites réelles

Comme le mot "limite", les mots "négligeable" et "équivalent" sont utilisés dans le langage commun.

On pourra par exemple dire que la masse d'une souris est négligeable devant celle d'un éléphant ; la somme des masses de l'éléphant et de la souris est équivalente à la masse de l'éléphant.

Nous allons définir rigoureusement deux nouvelles relations sur les suites.

Nous verrons que cela nous permet de rendre rigoureuses certaines intuitions et donne des outils efficaces pour le calcul de limite ainsi que l'étude de la nature de séries numériques.

4 Suite négligeable devant une autre suite

4.1 Définition et premiers exemples

Définition 2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) au voisinage de l'infini si :

il existe une suite (ϵ_n) telle que :

1. À partir d'un certain rang : $u_n = \epsilon_n v_n$
2. $\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donnons un premier exemple :

Étude 14 (Exemple). Lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad v_n = \frac{1}{n+1}$$

1. Trouver (ϵ_n) tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \epsilon_n v_n$
2. Montrer alors que (u_n) est négligeable devant (v_n)
3. Donner une suite (w_n) telle que (u_n) soit négligeable devant (w_n) et (w_n) négligeable devant (v_n)

Théorème 5 (à connaître par cœur). :

Étant données deux suites réelles (u_n) et (v_n) telles que, à partir d'un certain rang, $v_n \neq 0$,

La suite (u_n) est négligeable devant (v_n) au voisinage de l'infini si et seulement si :

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Démonstration. Il s'agit de vérifier deux implications :

$\Rightarrow$: Supposons (u_n) négligeable devant (v_n) .

On peut donc choisir une suite (ϵ_n) telle que :

1. À partir d'un certain rang : $u_n = \epsilon_n v_n$
2. $\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

La propriété 1 assure qu'à partir d'un certain rang :

$$\frac{u_n}{v_n} = \epsilon_n$$

Donc , selon la seconde propriété :

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$\Leftarrow$: On suppose que

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On définit une suite (ϵ_n) vérifiant les propriétés 1 et 2 en posant :
À partir d'un certain rang N où $v_n \neq 0$:

$$\epsilon_n = \frac{u_n}{v_n}$$

et pour $n \leq N, \epsilon_n = 0$

□

Nous pouvons maintenant utiliser directement le théorème précédent :

Étude 15 (Exemples). *Dans les cas suivants, la suite (u_n) est-elle négligeable devant (v_n) au voisinage de l'infini ?*

1. $u_n = \frac{1}{n^2}, \quad v_n = n$
2. $u_n = 1 \quad v_n = n$
3. $u_n = \sqrt{n} \quad v_n = n$
4. $u_n = n + 1 \quad v_n = n - 1$

Notation 1. L'assertion : "la suite (u_n) est négligeable devant (v_n) au voisinage de l'infini" se note

$$u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$$

ou simplement

$$u_n = o(v_n)$$

On lit : " u_n est un petit o de v_n lorsque $n \rightarrow +\infty$ "

Remarquons que :

$$n - 1 = o(n^3) \quad \text{et} \quad n^2 = o(n^3)$$

mais

$$\forall n \in \mathbb{N}, n - 1 \neq n^2$$

Attention. La notation $o(v_n)$ ne désigne pas une suite précise. Dans une égalité, un terme $o(v_n)$ représente une quantité de la forme $\epsilon_n v_n$, où $\epsilon_n \rightarrow 0$.

4.2 Règles de calcul

Les théorèmes suivants ne sont pas à apprendre "par cœur" : il faut les comprendre et savoir les retrouver rapidement.

Théorème 6. Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ des suites de réels non nuls à partir d'un certain rang.

- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$ (on parle de **transitivité** de la relation "être négligeable devant")
- Il est impossible que l'on ait : $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(u_n)$

Démonstration. :

- On suppose que $u_n = o(v_n)$ et aussi $v_n = o(w_n)$
On a, à partir d'un certain rang :

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \frac{v_n}{w_n}$$

Comme $u_n = o(v_n)$ on a $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$, de même $\frac{v_n}{w_n} \rightarrow 0$

Ainsi, par théorème (produit de suites convergentes)

$$\frac{u_n}{w_n} \rightarrow 0$$

Ainsi, par le critère précédent :

$$u_n = o(w_n)$$

• On suppose par l'absurde $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(u_n)$
d'après ce qui précède $u_n = o(u_n)$

ainsi $\frac{u_n}{u_n} \rightarrow 0$

donc $1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $1 = 0$, ce qui est faux.

□

Ainsi la relation "être négligeable devant" permet d'ordonner certaines suites :

Étude 16 (Exercice). *Classer par ordre de négligeabilité les suites de termes généraux :*

$$n, \quad n^n, \quad 2^n, \quad \sqrt{n}, \quad \frac{1}{n}, \quad n!, \quad n^2, \ln(n)$$

On pourra présenter le résultat sous forme de graphe orienté

Théorème 7. *Si les suites $(u_n), (v_n)$ sont négligeables devant la suite (w_n) alors pour tous a, b réels la suite $(au_n + bv_n)$ est négligeable devant (w_n)*

Étude 17 (Démonstration à savoir refaire). *Prouver le théorème 3*

Étude 18 (application du théorème 3). *Montrer que $2n - n^2 = o(n^3)$*

4.3 Résultats à parfaitement connaître

Théorème 8 (Croissances comparées). *Pour tout a, b, q réels*

$$a > 0 \Rightarrow (\ln n)^b = o(n^a)$$

$$|q| > 1 \Rightarrow n^a = o(q^n)$$

Démonstration. Ce théorème est une conséquence immédiate des résultats (souvent appelés "croissances comparées") du cours de ECG1.

□

Étude 19 (application des théorèmes ci-dessus). *Montrer que :*

$$n\sqrt{n} + (\ln(n))^3 + \frac{1}{n} = o((1.01)^n)$$

5 Suite équivalente à une autre suite

5.1 Définition et premiers exemples

Définition 3. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.*

On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) au voisinage de l'infini si :

il existe une suite (β_n) telle que :

1. *À partir d'un certain rang : $u_n = \beta_n v_n$*
2. $\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

Donnons un premier exemple :

Étude 20 (Exemple). :

Lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(n-1)}{n(n+1)}, \quad v_n = \frac{1}{n}$$

1. Trouver (β_n) tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \beta_n v_n$
2. Montrer alors que (u_n) est équivalente à (v_n)

Théorème 9 (à connaître par cœur). :

Étant données deux suites réelles (u_n) et (v_n) telles que, à partir d'un certain rang, $v_n \neq 0$,

La suite (u_n) est équivalente à (v_n) au voisinage de l'infini si et seulement si :

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Démonstration. Il suffit de reprendre le schéma de la démonstration de la proposition 1 en remplaçant ' $\rightarrow$ ' par ' $\rightarrow 1$ '. □

Étude 21. Dans les cas suivants, la suite (u_n) est-elle équivalente à la suite (v_n) au voisinage de l'infini ?

1. $u_n = \frac{1}{n^2}, \quad v_n = \frac{2}{n^2}$
2. $u_n = n - 2, \quad v_n = n$
3. $u_n = \sqrt{n}, \quad v_n = \sqrt{n+2}$
4. $u_n = n + 1, \quad v_n = n - 1$

Notation 2. L'assertion : "la suite (u_n) est équivalente à (v_n) au voisinage de l'infini" se note

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$$

ou simplement

$$u_n \sim v_n$$

5.2 Résultats remarquables

Le théorème suivant est déjà suggéré par le choix du mot : "équivalent" et de la notation $\sim$.

Théorème 10. Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ des suites de réels

- On a : $u_n \sim u_n$
- Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$
- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$

Étude 22 (Démonstration à savoir refaire). Justifier ces trois assertions lorsque les termes des suites diffèrent de 0 à partir d'un certain rang.

Preuve.

On utilise la définition :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

- **Réflexivité**

On a, à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_n}{u_n} = 1.$$

Donc

$$\frac{u_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

et ainsi

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n}.$$

- **Symétrie**

Supposons que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n.$$

Alors

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en 1, on obtient

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{u_n/v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi

$$\boxed{v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n}.$$

- **Transitivité**

Supposons que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \quad \text{et} \quad v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n.$$

Alors

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad \frac{v_n}{w_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Or

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}.$$

Par produit des limites,

$$\frac{u_n}{w_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \times 1 = 1.$$

Donc

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n}.$$

Ainsi, la relation « être équivalent à » est réflexive, symétrique et transitive : c'est une relation d'équivalence.

Nous pouvons regrouper entre elles les suites équivalentes, on découpe ainsi l'ensemble des suites en classes tout comme on peut découper la population en classes d'âge (via la relation : "a le même âge que ")

Étude 23 (Exercice). Regrouper entre elles les suites de termes généraux suivants :

$$\frac{n^3}{n+1}, \quad n+2, \quad \frac{n}{n+2}, \quad 1, \quad , n, \quad n^2$$

On pourra présenter le résultat sous forme de graphe non orienté

Le résultat suivant sera très utilisé pour déterminer la limite de certaines suites

Théorème 11. Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes.

Si l'une des deux suites admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors l'autre admet la même limite.

Démonstration. “\latex

Soient $(u_n), (v_n)$ des suites équivalentes.

On suppose que (v_n) admet une limite l en $+\infty$.

Remarquons que l peut être un réel (comme 0 ou 2) mais aussi $+\infty$ ou $-\infty$.

On veut montrer que

$$u_n \rightarrow l.$$

Comme (u_n) est équivalente à (v_n) , à partir d'un certain rang :

$$u_n = \beta_n v_n$$

où (β_n) est une suite réelle qui admet 1 pour limite.

Distinguons alors trois cas.

— Si $l \in \mathbb{R}$, alors

$$\beta_n \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad v_n \rightarrow l.$$

Les propositions du cours de ECG1 sur les limites et les opérations nous assurent alors que

$$u_n = \beta_n v_n \rightarrow 1 \times l = l.$$

— Si $l = +\infty$, alors

$$\beta_n \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad v_n \rightarrow +\infty.$$

Comme $1 > 0$, les propositions du cours de ECG1 sur les limites et les opérations nous assurent que

$$u_n = \beta_n v_n \rightarrow +\infty.$$

— Si $l = -\infty$, alors

$$\beta_n \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad v_n \rightarrow -\infty.$$

Comme $1 > 0$, les propositions du cours de ECG1 sur les limites et les opérations nous assurent que

$$u_n = \beta_n v_n \rightarrow -\infty.$$

Dans tous les cas,

$$\boxed{u_n \rightarrow l}.$$

□

Étude 24. On admet que $\frac{n}{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$

Donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n-1}$

5.3 Calculs d'équivalents

5.3.1 Lien avec la négligeabilité

Le résultat suivant est conforme à l'intuition et aussi à l'image de la souris et l'éléphant exprimée dans les premières lignes de ce chapitre .

Théorème 12. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

$$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$$

Étude 25 (Preuve (facultatif)). * Montrer ce théorème

On peut ainsi affirmer que, pour n'importe quelle suite (u_n) , on a :

$$u_n + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$$

Étude 26 (Application du théorème 8). Dans les cas suivants, donner une suite (u_n) simple telle que :

$$v_n \sim u_n$$

en déduire alors la limite de la suite (v_n)

1. $v_n = 2 + n + n^2$
2. $v_n = -n + \ln(n)$
3. $v_n = 2^n - n^3 + 4$
4. $v_n = \frac{1}{n} + n$
5. $v_n = 3 - n \ln(n)$

Théorème 13. *Étant donnés $d \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$, avec $a_d \neq 0$, on a :*

$$a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_d n^d \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_d n^d$$

Démonstration. Pour tout $k \in \{0, \dots, d-1\}$,

$$n^k = o(n^d),$$

car

$$\frac{n^k}{n^d} = \frac{1}{n^{d-k}} \longrightarrow 0.$$

Ainsi,

$$a_0 = o(n^d), \quad a_1 n = o(n^d), \quad \dots, \quad a_{d-1} n^{d-1} = o(n^d).$$

Par somme,

$$a_0 + a_1 n + \dots + a_{d-1} n^{d-1} = o(n^d).$$

On obtient donc

$$a_0 + a_1 n + \dots + a_d n^d = a_d n^d + o(n^d).$$

Comme $a_d \neq 0$, on a aussi

$$o(n^d) = o(a_d n^d).$$

Par conséquent,

$$a_0 + a_1 n + \dots + a_d n^d = a_d n^d + o(a_d n^d).$$

D'après la caractérisation des équivalents par les petits o ,

$$a_0 + a_1 n + \dots + a_d n^d \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_d n^d.$$

□

Étude 27. Un exemple :

Donner un équivalent simple de $1 - n - 3n^3$

5.3.2 Compatibilité avec certaines opérations

Théorème 14. *Soient $(u_n), (v_n), (w_n), (x_n)$ des suites réelles.*

- Si $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ w_n \sim x_n \end{cases}$ alors $u_n \times w_n \sim v_n \times x_n$
- Lorsque (v_n) et (x_n) ne s'annulent pas :
si $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ w_n \sim x_n \end{cases}$ alors $\frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{x_n}$
- Lorsque α est un réel indépendant de n :
 $\boxed{\text{si}} u_n \sim v_n$ et si à partir d'un certain rang $u_n > 0, v_n > 0$ $\boxed{\text{alors}} u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$

Étude 28 (preuve). Prouver le théorème dans le cas où les termes des suites diffèrent de 0 à partir d'un certain rang.

Preuve.

On utilise la définition :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

- **Produit**

Supposons que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \quad \text{et} \quad w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x_n.$$

Alors

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad \frac{w_n}{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Or

$$\frac{u_n w_n}{v_n x_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{w_n}{x_n}.$$

Par produit des limites,

$$\frac{u_n w_n}{v_n x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi

$$\boxed{u_n w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n x_n}.$$

- **Quotient**

Supposons que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \quad \text{et} \quad w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x_n.$$

Alors

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad \frac{w_n}{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Lorsque les quotients sont bien définis, on a

$$\frac{\frac{u_n}{v_n}}{\frac{w_n}{x_n}} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{x_n}{w_n} = \frac{u_n/x_n}{w_n/x_n}.$$

Or

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad \frac{w_n}{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc, par quotient des limites,

$$\frac{\frac{u_n}{v_n}}{\frac{w_n}{x_n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{u_n}{w_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{v_n}{x_n}}.$$

- **Puissance réelle**

Supposons que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n,$$

et que, à partir d'un certain rang,

$$u_n > 0 \quad \text{et} \quad v_n > 0.$$

Alors

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Comme la fonction

$$x \longmapsto x^\alpha$$

est continue sur $]0, +\infty[$, on obtient

$$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1^\alpha = 1.$$

Or

$$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)^\alpha = \frac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha}.$$

Ainsi

$$\frac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

et donc

$$u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^\alpha.$$

Étude 29 (Application). *Montrer que :*

1.
$$\frac{n+2}{n-3} \sim 1$$
2.
$$\frac{(n+\ln(n))^3}{n+1} \sim n^2$$

Attention. On peut avoir

$$\begin{cases} u_n \sim v_n \\ w_n \sim x_n \end{cases}$$

sans avoir pour autant $u_n + w_n \sim v_n + x_n$. En général, on ne peut donc pas additionner des équivalents terme à terme.

Étude 30 (Exemple). :

Remarquer :

$$\begin{cases} n^2 + n^3 \sim n^3 \\ -n^3 \sim -n^3 + n \end{cases}$$

Peut-on "ajouter" ?

Attention. Une autre erreur fréquente consiste à composer par une fonction comme $\ln$ sans vérifier que l'équivalence est préservée.

Étude 31 (Exemple). :

1. On a $1+n \sim n$, a-t-on $\ln(1+n) \sim \ln(n)$?
2. On a $1+1/n \sim 1+1/n^2$, a-t-on $\ln(1+1/n) \sim \ln(1+1/n^2)$?
Dans ce second cas, on pourra anticiper et utiliser le prochain théorème.

5.3.3 Résultats à parfaitement connaître

Théorème 15 (Croissances comparées). *Lorsque (h_n) est une suite qui converge vers 0 :*

$$\ln(1+h_n) \sim h_n \quad (1+h_n)^\alpha - 1 \sim \alpha h_n \quad e^{h_n} - 1 \sim h_n$$

où α désigne un réel indépendant de n

Étude 32 (Démonstration à savoir refaire). *Justifier ce théorème 10 en utilisant le cours de ECS1*

Étude 33 (Application). 1. *Montrer que*

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \rightarrow 1$$

2. En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n$$

3. Soit x un nombre réel .

Montrer que :

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + x/n)^n$$

Troisième partie

Exercices du chapitre 1

Études de suites

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

1. * Justifier que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Étudier les variations de la suite (I_n)
3. Démontrer que la suite (I_n) converge.
4. * Déterminer la limite de la suite (I_n)

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$1 \leq u_n \leq 2.$$
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge.
4. Déterminer sa limite.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq 2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(2 - u_n).$$

6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq 2 - u_n \leq \frac{1}{3^n}.$$

7. Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$2 - u_n < 0,01.$$

Exercice 3

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{1}{x+1}$$

On pose :

$$I = \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$$

Soit $a \in I$.

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

.

1. Démontrer que l'intervalle I est stable par f .
2. Montrer que f admet un unique point fixe l dans l'intervalle I , calculer ce point fixe.
Que dit le cours au sujet de la suite (u_n) et du point fixe l de f ?
- (a) Rappeler le théorème : "inégalité des accroissements finis" du cours de première année.
et montrer que :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq (4/9) |x - y|$$

- (b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq (4/9)^n |u_0 - l|$$

- (c) Montrer que (u_n) converge vers l .

Comparaison des suites réelles

Exercice 4

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes.

- | | |
|--|--|
| 1. $u_n = \frac{3n+1}{n^2+2}$. | 12. $u_n = \ln(n+1) - \ln n$. |
| 2. $u_n = \frac{2n^2-3n+1}{5n^3+n}$. | 13. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. |
| 3. $u_n = \sqrt{n^2+n}$. | 14. $u_n = \frac{e^{1/n} - 1}{\ln(1+1/n)}$. |
| 4. $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. | 15. $u_n = \frac{e^{2/n} - 1}{e^{1/n} - 1}$. |
| 5. $u_n = e^{1/n} - 1$. | 16. $u_n = \frac{\ln(1+2/n)}{e^{3/n} - 1}$. |
| 6. $u_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1$. | 17. $u_n = \frac{\sqrt{1+1/n} - 1}{\ln(1+1/n)}$. |
| 7. $u_n = e^{1/n^2} - 1$. | 18. $u_n = (e^{1/n} - 1)(\sqrt{n^2+n} + n)$. |
| 8. $u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$. | 19. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+n} - n}{\ln(1+1/n)}$. |
| 9. $u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. | 20. $u_n = \frac{\ln(1+1/n)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$. |
| 10. $u_n = n^2(e^{1/n} - 1)$. | |
| 11. $u_n = n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$. | |

Exercice 5

Dans ce qui suit $(u_n), (v_n)$ désignent des suites de réels.

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si $u_n = o(1/n)$ alors $u_n = o(1/n^3)$
2. Si $u_n = o(n)$ alors $u_n = o(n^3)$
3. Si $u_n = o(1/(n+1))$ alors $u_n = o(1/n)$
4. * Si (u_n) est une suite convergente alors $u_{n+1} \sim u_n$
5. Deux suites qui admettent une même limite sont équivalentes.
6. * Si $u_n \sim 1/n$ alors $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$
7. Si $u_n \sim v_n$ alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$
8. Étant donné $l \in \mathbb{R}^*$, si $u_n \rightarrow l$ alors $u_n \sim l$

Exercice 6

Obtention d'un équivalent par encadrement

1. On considère des suites $(u_n), (v_n), (w_n), (t_n)$.
On suppose qu'à partir d'un certain rang :

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

et

$$t_n > 0$$

et on suppose aussi :

$$u_n \sim w_n \sim t_n$$

Montrer que

$$v_n \sim t_n$$

2. On suppose qu'à partir d'un certain rang :

$$n - \ln(n) \leq u_n \leq n$$

Donner un équivalent simple de (u_n)

3. On suppose qu'à partir d'un certain rang :

$$n \leq u_n \leq 2n$$

Donner un équivalent simple de $\ln(u_n)$

4. Déterminer un équivalent simple pour la suite $u_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ainsi que sa limite si elle existe.

Exercice 7

Ce résultat sera utilisé dans le cours de probabilité et on verra une application à la modélisation probabiliste de phénomènes réels

Soit k un entier naturel.

1. ** Donner un équivalent simple de $u_n = \binom{n}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$
2. Calculer alors la limite de $\frac{\binom{n}{k}}{n^k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

Corrigé

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la règle du produit de deux équivalents.

Théorème 16 (Produit fini d'équivalents). Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Si, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$,

$$u_n^{(k)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^{(k)},$$

alors

$$\prod_{k=1}^p u_n^{(k)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \prod_{k=1}^p v_n^{(k)}.$$

1. Pour $n \geq k$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Comme k est fixé, pour tout entier $j \in \{0, \dots, k-1\}$,

$$n - j \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n.$$

Le théorème du produit fini d'équivalents donne alors

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^k.$$

Comme $k!$ est une constante non nulle, on obtient

$$\boxed{\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}}.$$

2. D'après la question précédente,

$$\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}.$$

En divisant par n^k , par théorème du quotient d'équivalents, on obtient

$$\frac{\binom{n}{k}}{n^k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k!}.$$

donc

$$\frac{\binom{n}{k}}{n^k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k!}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \frac{1}{k!}}.$$

Étude de suites

Exercice 8

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$$

1. (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$$

(b) (*) Montrer que (u_n) converge vers 1.

2. Déterminer un équivalent de $u_n - 1$, en déduire un réel a tel que

$$u_n - 1 = \frac{a}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 9

Exercice.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation

$$x + \ln(x) = n, \quad x > 0.$$

On note u_n son unique solution.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$x + \ln(x) = n$$

admet une unique solution u_n dans $]0, +\infty[$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 \leq u_n \leq n.$$

3. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

4. En déduire que

$$u_n \longrightarrow +\infty.$$

5. Montrer que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n.$$

6. Montrer que

$$u_n = n - \ln(n) + o(1).$$

Corrigé de l'exercice 9

1. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln(x).$$

La fonction f est dérivable (comme somme de fonctions dérivables) sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0.$$

Ainsi, f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

La fonction f est continue (car dérivable).

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$f(x) = n$$

admet une unique solution $u_n \in]0, +\infty[$.

2. Remarquons que, pour tous $a, b \in]0, +\infty[$,

$$f(a) \leq f(b) \implies a \leq b.$$

En effet, si l'on avait $a > b$, la stricte croissance de f donnerait

$$f(a) > f(b),$$

ce qui est contradictoire.

On a

$$f(1) = 1 \leq n = f(u_n)$$

et

$$f(u_n) = n \leq n + \ln(n) = f(n).$$

Ainsi,

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(n).$$

D'après la propriété établie à la question précédente,

$$\boxed{1 \leq u_n \leq n}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(u_n) = n < n + 1 = f(u_{n+1}).$$

D'après la propriété établie à la première question,

$$u_n < u_{n+1}.$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

4. La suite (u_n) étant croissante, elle admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ . Par continuité de f ,

$$f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell).$$

Or

$$f(u_n) = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

ce qui est impossible.

Ainsi,

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}.$$

5. Par définition de u_n ,

$$u_n + \ln(u_n) = n,$$

donc

$$\frac{u_n}{n} + \frac{\ln(u_n)}{n} = 1.$$

D'après la question 2,

$$1 \leq u_n \leq n.$$

La fonction $\ln$ étant croissante sur $]0, +\infty[$,

$$0 \leq \ln(u_n) \leq \ln(n),$$

puis

$$0 \leq \frac{\ln(u_n)}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}.$$

Or

$$\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par encadrement,

$$\frac{\ln(u_n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Comme

$$\frac{u_n}{n} = 1 - \frac{\ln(u_n)}{n},$$

on obtient

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n}.$$

6. Par définition de u_n ,

$$u_n = n - \ln(u_n).$$

D'après la question précédente,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n,$$

donc

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Par continuité de la fonction $\ln$ en 1,

$$\ln\left(\frac{u_n}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Or

$$\ln\left(\frac{u_n}{n}\right) = \ln(u_n) - \ln(n).$$

Ainsi,

$$\ln(u_n) - \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

c'est-à-dire

$$\ln(u_n) = \ln(n) + o(1).$$

En reportant cette relation dans

$$u_n = n - \ln(u_n),$$

on obtient

$$\boxed{u_n = n - \ln(n) + o(1)}.$$

Corrigé de l'exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$x \longmapsto x^n e^{-x}$$

est continue sur le segment $[0, 1]$.

Ainsi, I_n est bien définie .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par théorème de linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx - \int_0^1 x^n e^{-x} dx \\ &= \int_0^1 (x^{n+1} e^{-x} - x^n e^{-x}) dx. \end{aligned}$$

En factorisant à l'intérieur de l'intégrale,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} (x - 1) dx.$$

Or, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$x^n \geq 0, \quad e^{-x} > 0 \quad \text{et} \quad x - 1 \leq 0.$$

Ainsi,

$$x^n e^{-x} (x - 1) \leq 0.$$

De plus,

$$0 \leq 1.$$

Par théorème de croissance de l'intégrale,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} (x - 1) dx \leq \int_0^1 0 dx = 0.$$

Donc

$$I_{n+1} \leq I_n.$$

Ainsi, la suite (I_n) est décroissante.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$,

$$x^n e^{-x} \geq 0.$$

De plus,

$$0 \leq 1.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx \geq \int_0^1 0 dx = 0.$$

La suite (I_n) est donc minorée par 0.

D'après la question précédente, elle est également décroissante.

Ainsi, d'après le théorème de convergence des suites monotones, la suite (I_n) converge.

4. Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq e^{-x} \leq 1.$$

Comme $x^n \geq 0$, on obtient

$$0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n.$$

De plus,

$$0 \leq 1.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 x^n e^{-x} \, dx \leq \int_0^1 x^n \, dx.$$

Ainsi,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}.$$

Corrigé de l'étude 1

Corrigé

1. Calculons u_0 , u_1 et u_2 .

Pour $n = 0$, on a

$$u_0 = \int_0^1 \frac{t}{1+t^0} \, dt = \int_0^1 \frac{t}{2} \, dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Pour $n = 1$,

$$u_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t} \, dt.$$

Or

$$\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}.$$

Ainsi,

$$u_1 = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) \, dt = [t - \ln(1+t)]_0^1 = \boxed{1 - \ln 2}.$$

Enfin,

$$u_2 = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} \, dt.$$

Comme la dérivée de $1+t^2$ est $2t$, on obtient

$$u_2 = \frac{1}{2} [\ln(1+t^2)]_0^1 = \boxed{\frac{\ln 2}{2}}.$$

2. Montrons que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{t}{1+t^{n+1}} \, dt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^n} \, dt.$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^{n+1}} - \frac{t}{1+t^n} \right) \, dt.$$

En mettant au même dénominateur,

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{t(1+t^n) - t(1+t^{n+1})}{(1+t^{n+1})(1+t^n)} dt.$$

Puis, en factorisant,

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}(1-t)}{(1+t^{n+1})(1+t^n)} dt.$$

Or, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$t^{n+1} \geq 0, \quad 1-t \geq 0$$

et

$$(1+t^{n+1})(1+t^n) > 0.$$

Ainsi,

$$\frac{t^{n+1}(1-t)}{(1+t^{n+1})(1+t^n)} \geq 0.$$

Par positivité de l'intégrale,

$$u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

Donc

la suite (u_n) est croissante.

3. Montrons que la suite (u_n) converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$, on a

$$1+t^n \geq 1.$$

Par conséquent,

$$0 \leq \frac{t}{1+t^n} \leq t.$$

Par positivité et croissance de l'intégrale,

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

Remarque : La majoration proposée par Noé était juste mais pas correctement justifiée, on peut évidemment se contenter de majorer plus grossièrement par 1 comme de le corrigé écrit en classe

D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante. Elle est donc croissante et majorée.

D'après le théorème de convergence des suites monotones,

la suite (u_n) converge.

Corrigé de l'exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(n) : 1 \leq u_n \leq 2.$$

Montrons cette propriété $\mathcal{P}$ par récurrence.

Initialisation.

On a

$$u_0 = 1,$$

donc

$$1 \leq u_0 \leq 2.$$

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité.

Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq u_n \leq 2.$$

Alors

$$3 \leq 2 + u_n \leq 4.$$

La fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2.$$

Or

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

Ainsi

$$\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 2.$$

Comme $\sqrt{3} \geq 1$, on a finalement

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2.$$

La propriété est héréditaire.

Par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 2.}$$

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + u_n} - u_n.$$

Les deux termes étant positifs, on peut étudier le signe de

$$\sqrt{2 + u_n} - u_n$$

en comparant leurs carrés.

On a

$$u_{n+1} \geq u_n \iff \sqrt{2 + u_n} \geq u_n.$$

Comme $u_n \geq 0$, cette inégalité équivaut à

$$2 + u_n \geq u_n^2.$$

Or

$$2 + u_n - u_n^2 = -(u_n^2 - u_n - 2).$$

On factorise :

$$u_n^2 - u_n - 2 = (u_n - 2)(u_n + 1).$$

Donc

$$2 + u_n - u_n^2 = (2 - u_n)(u_n + 1).$$

D'après la question précédente,

$$u_n \leq 2,$$

donc

$$2 - u_n \geq 0,$$

et comme $u_n \geq 1$,

$$u_n + 1 > 0.$$

Ainsi

$$(2 - u_n)(u_n + 1) \geq 0.$$

Par conséquent

$$2 + u_n \geq u_n^2,$$

donc

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

Ainsi,

$$(u_n) \text{ est croissante.}$$

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

D'après les questions précédentes, la suite (u_n) est :

croissante

et

majorée par 2.

D'après le théorème de convergence des suites monotones, (u_n) converge.

Ainsi,

$$(u_n) \text{ converge.}$$

4. Déterminer sa limite.

Notons

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

On sait que

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

La fonction

$$x \mapsto \sqrt{2 + x}$$

est continue sur $[1, 2]$. Par théorème du cours :

$$\ell = \sqrt{2 + \ell}.$$

Ainsi :

$$\ell^2 = 2 + \ell.$$

Ainsi

$$\ell^2 - \ell - 2 = 0.$$

On factorise :

$$(\ell - 2)(\ell + 1) = 0.$$

Donc

$$\ell = 2 \quad \text{ou} \quad \ell = -1.$$

Mais $u_n \geq 1$ pour tout n , donc nécessairement

$$\ell \geq 1.$$

On élimine donc la solution -1 .

Finalement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.}$$

5. **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,**

$$0 \leq 2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(2 - u_n).$$

D'après la première question,

$$u_{n+1} \leq 2.$$

Par conséquent

$$2 - u_{n+1} \geq 0.$$

Calculons maintenant $2 - u_{n+1}$.

On a

$$2 - u_{n+1} = 2 - \sqrt{2 + u_n}.$$

On multiplie par la quantité conjuguée :

$$2 - u_{n+1} = \frac{(2 - \sqrt{2 + u_n})(2 + \sqrt{2 + u_n})}{2 + \sqrt{2 + u_n}}.$$

Au numérateur,

$$(2 - \sqrt{2 + u_n})(2 + \sqrt{2 + u_n}) = 4 - (2 + u_n).$$

Ainsi

$$2 - u_{n+1} = \frac{2 - u_n}{2 + \sqrt{2 + u_n}}.$$

Comme

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n},$$

on peut écrire

$$2 - u_{n+1} = \frac{2 - u_n}{2 + u_{n+1}}.$$

Or, d'après la première question,

$$u_{n+1} \geq 1.$$

Donc

$$2 + u_{n+1} \geq 3 > 0.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2 + u_{n+1}} \leq \frac{1}{3}.$$

Comme

$$2 - u_n \geq 0,$$

on obtient

$$\frac{2 - u_n}{2 + u_{n+1}} \leq \frac{1}{3}(2 - u_n).$$

Ainsi

$$0 \leq 2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(2 - u_n).$$

6. **En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,**

$$0 \leq 2 - u_n \leq \frac{1}{3^n}.$$

Posons

$$v_n = 2 - u_n.$$

D'après la question précédente,

$$0 \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{3}v_n.$$

En appliquant successivement cette inégalité, on obtient

$$v_n \leq \frac{1}{3}v_{n-1} \leq \frac{1}{3^2}v_{n-2} \leq \cdots \leq \frac{1}{3^n}v_0.$$

Or

$$v_0 = 2 - u_0 = 2 - 1 = 1.$$

Donc

$$v_n \leq \frac{1}{3^n}.$$

Puisque $v_n = 2 - u_n$, on obtient

$$0 \leq 2 - u_n \leq \frac{1}{3^n}.$$

On peut également établir ce résultat plus rigoureusement par récurrence.

7. Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$2 - u_n < 0,01.$$

D'après la question précédente,

$$0 \leq 2 - u_n \leq \frac{1}{3^n}.$$

Il suffit donc de choisir n tel que

$$\frac{1}{3^n} < 0,01.$$

Or

$$0,01 = \frac{1}{100}.$$

Il suffit donc d'avoir

$$\frac{1}{3^n} < \frac{1}{100},$$

c'est-à-dire

$$3^n > 100.$$

Calculons quelques puissances de 3 :

$$3^4 = 81 < 100$$

et

$$3^5 = 243 > 100.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 5$,

$$\frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243} < \frac{1}{100} = 0,01.$$

Donc

$$\boxed{n_0 = 5}$$

convient.

Ainsi, pour tout $n \geq 5$,

$$\boxed{2 - u_n < 0,01.}$$