

Devoir maison numéro 1

Du 2 au 8 septembre 2026

À rendre impérativement le 8 septembre 2026

L'un des objectifs essentiels de ce devoir maison est de travailler la qualité de la rédaction mathématique.

Il est également indispensable d'effectuer une véritable recherche personnelle. Vous devez impérativement chercher les questions sans aucune aide dans un premier temps, même si vous ne parvenez pas immédiatement à les résoudre.

N'attendez pas la veille de la remise du devoir. Il faut répartir votre recherche sur plusieurs jours

Une aide éventuelle ne doit intervenir qu'après cette première phase de recherche personnelle.

Exercice 1 : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n > 1.$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{u_n + 2}.$$

3. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
4. Montrer que (u_n) est convergente.
5. On note ℓ sa limite. En passant à la limite dans la relation de récurrence, déterminer ℓ .
6. On pose

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}.$$

Montrer que (v_n) est une suite géométrique et en déduire une expression de u_n en fonction de n .

Exercice 2 : Étude d'une suite définie implicitement

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'équation

$$x + x^2 + \cdots + x^n = 1, \quad x \in [0, 1].$$

On note u_n son éventuelle solution.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'équation admet une unique solution $u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que

$$0 < u_n \leq 1.$$

3. En comparant les équations vérifiées par u_n et u_{n+1} , montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ .
5. *Plus difficile*

Pour $x \neq 1$, exprimer $x + x^2 + \cdots + x^n$ sous forme de fraction. En utilisant cette expression déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$