

Chapitre 2 : Rappels et compléments sur les séries numériques

À savoir faire à l'issue du chapitre

- Étant donnée une suite (u_n) , définir la série de terme général u_n , expliquer ce que signifie sa convergence et, lorsqu'elle converge, définir sa somme .
- Calculer la somme de séries simples à l'aide des formules de sommation des séries géométriques, des séries géométriques dérivées et de la série exponentielle.
- Reconnaître une série télescopique et utiliser les sommes partielles pour étudier sa nature et, lorsqu'elle converge, calculer sa somme.
- Étudier la nature d'une série en utilisant les théorèmes de comparaison et en prenant soin de bien vérifier les hypothèses, d'équivalence et de négligeabilité, ainsi que la convergence absolue.

Pour étudier efficacement ce chapitre : refaites les études sans consulter vos notes, puis vérifiez dans un second temps votre raisonnement à l'aide de vos notes manuscrites.

Table des matières

1	Approche naïve des séries numériques	1
2	Définitions, notations	2
3	Rappels de résultats à connaître parfaitement	3
4	Linéarité de la somme	3
5	Des théorèmes pour connaître la nature d'une série	4
5.1	Séries de Riemann	4
5.2	Remarque sur la nature d'une série	4
5.3	Trois théorèmes à parfaitement connaître	5
5.3.1	Comparaison	5
5.3.2	Négligeabilité	6
5.3.3	Convergence absolue	6
5.3.4	Équivalent (c'est puissant)	7

1 Approche naïve des séries numériques

À partir d'une suite de réels :

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3 \cdots,$$

on peut construire la suite :

$$\begin{aligned} &u_0 \\ &u_0 + u_1 \\ &u_0 + u_1 + u_2 \\ &u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \\ &u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Lorsque cette dernière suite converge, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa limite, on comprend que cette limite s'interprète naïvement comme la somme infinie ordonnée des nombres $u_0, u_1, u_2, \dots$

Étude 1. Étudier le cas :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad u_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots$$

On pourra interpréter les sommes partielles et la somme de la série que des aires de surfaces du plan.

2 Définitions, notations

Définition 1. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels. La suite de terme général

$$S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n, \quad N \geq n_0,$$

est appelée série de terme général $u_n, n \geq n_0$. Elle est notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$, ou simplement $\sum u_n$.

Lorsqu'elle converge, sa limite est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et est appelée somme de la série de terme général u_n .

On retiendra que, sous réserve d'existence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n$$

Remarquons que $\sum u_n$ désigne une série, c'est-à-dire ici la suite de ses sommes partielles, tandis que $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ désigne un réel (lorsque la série converge).

Étude 2. Étudions le cas $n_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

1. Calculer les trois premiers termes de la série de terme général u_n .
2. Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

3. Montrer alors que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Étude 3. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on pose $H_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$

1. Montrer que la suite (H_N) est croissante
2. Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, H_{2N} - H_N \geq \frac{1}{2}$$

3. Dédurre des deux questions précédentes que la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

On remarque qu'il est donc possible d'avoir $u_n \rightarrow 0$ et pourtant divergence de la série $\sum u_n$.

3 Rappels de résultats à connaître parfaitement

Théorème 1. Pour tout nombre réel x , la série de terme général $\frac{x^n}{n!}, n \in \mathbb{N}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$$

Démonstration. Théorème admis. □

Théorème 2. Soit $x \in \mathbb{R}$, les séries de termes généraux x^n , nx^{n-1} et $n(n-1)x^{n-2}$, où $n \in \mathbb{N}$, convergent si et seulement si $|x| < 1$; si c'est le cas on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Remarquons qu'à partir de la première formule il est facile de retrouver (retrouver, pas redémontrer) les autres, il suffit de dériver ...

Étude 4 (Preuve de la formule de sommation d'une série géométrique). Prouver le premier résultat du théorème précédent.

Étude 5 (Application des théorèmes 1 et 2). Calculer

$$A = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k}}{3^k} \quad B = \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i^2}{2^i}$$

Étude 6. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\sum_{n=k}^{+\infty} x^n$$

4 Linéarité de la somme

Théorème 3. Soit $(u_n), (v_n)$ des suites réelles.

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors la série $\sum (u_n + v_n)$ converge aussi de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

- Si λ est un réel **non nul** alors les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ ont même nature ; de plus, en cas de convergence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Étude 7. Justifier l'existence et calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{3}{n!} \quad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \quad C = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right)$$

5 Des théorèmes pour connaître la nature d'une série

Définition 2. On dit que deux séries ont même nature lorsqu'elles sont toutes les deux convergentes ou bien toutes les deux divergentes.

Déterminer la nature d'une série, c'est déterminer si elle converge ou diverge (c'est-à-dire si elle ne converge pas).

5.1 Séries de Riemann

Théorème 4. Soit α un nombre réel.

La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

Démonstration. preuve dans un devoir maison à venir. □

Étude 8 (Application du théorème). Donner la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

$$1) u_n = \frac{1}{n}; \quad 2) u_n = \frac{1}{n^2}; \quad 3) u_n = \frac{3}{n^3}; \quad 4) u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad 5) u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

5.2 Remarque sur la nature d'une série

Théorème 5 (Critère de divergence grossière). Si la série de terme général u_n converge, alors la suite (u_n) converge vers 0.

Par conséquent, si (u_n) ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Démonstration. On note

$$S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n.$$

Si la série converge, alors (S_N) converge vers une limite réelle S . Or, pour tout $N > n_0$,

$$u_N = S_N - S_{N-1}.$$

Ainsi $u_N \rightarrow S - S = 0$.

□

Attention.

Comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, la réciproque est fautive : le fait que $u_n \rightarrow 0$ ne suffit pas à assurer la convergence de la série $\sum u_n$. Par exemple, $1/n \rightarrow 0$ mais la série harmonique $\sum 1/n$ diverge.

Théorème 6. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles.

Si à partir d'un certain rang : $u_n = v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature MAIS pas nécessairement même somme

Démonstration. On note n_1 l'indice du premier terme de u et n_2 l'indice du premier terme de v . On pose, pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$:

$$S_n = \sum_{k=n_1}^n u_k \quad T_n = \sum_{k=n_2}^n v_k$$

Soit $N \in \mathbb{N}$
On suppose :

$$\forall k \geq N, u_k = v_k$$

Ainsi, pour $n \geq N$ on a :

$$S_n = S_N + \sum_{k=N+1}^n u_k = S_N + \sum_{k=N+1}^n v_k = S_N + T_n - T_N$$

Donc :

$$\forall n \geq N, S_n = T_n + K$$

où $K = S_N - T_N$

Ainsi, à partir d'un certain rang, les suites (S_n) et (T_n) diffèrent d'une constante ; elles ont donc même nature.

□

5.3 Trois théorèmes à parfaitement connaître

5.3.1 Comparaison

Théorème 7. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

Si les propriétés suivantes sont valides :

1. à partir d'un certain rang u_n et v_n sont positifs.
2. à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$
3. la série $\sum v_n$ converge

alors

la série de terme général u_n converge.

Démonstration. Le théorème précédent permet de se ramener au cas où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, posons

$$S_N = \sum_{n=0}^N u_n \quad \text{et} \quad T_N = \sum_{n=0}^N v_n.$$

La suite (S_N) est croissante puisque $u_n \geq 0$. De plus, par sommation des inégalités,

$$0 \leq S_N \leq T_N.$$

Comme la série $\sum v_n$ converge, la suite (T_N) converge et est donc majorée. Ainsi (S_N) est croissante et majorée ; elle converge. La série $\sum u_n$ converge donc.

□

Étude 9 (Application du théorème de comparaison). Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \frac{1}{n^2 + 1}$

2. $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^3}$

Indication : on montre $u_n \leq 1/n^2$

3. $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$

Indication : On va prouver la divergence de la série .

Par l'absurde : on suppose qu'elle converge et on en déduit la convergence de la série de terme général $1/n$

5.3.2 Négligeabilité

Théorème 8. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

Si :

1. à partir d'un certain rang u_n et v_n sont positifs.
2. On a $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$
3. La série de terme général v_n converge

alors :

La série de terme général u_n converge.

Démonstration. On suppose que (1) et (2) sont valides
 À partir d'un certain rang $u_n = \epsilon_n v_n$ où (ϵ_n) est une suite qui converge vers 0.
 À partir d'un certain rang, on a $u_n \geq 0$, $v_n \geq 0$ et $\epsilon_n \leq 1$. Comme $v_n \geq 0$,

$$u_n = \epsilon_n v_n \leq v_n.$$

Ainsi $0 \leq u_n \leq v_n$.

On applique le théorème de comparaison.

□

Étude 10 (Application du théorème de négligeabilité). Prouver la convergence de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \frac{e^{-n}}{n}$

Indication : on montre $u_n = o(1/n^2)$

2. $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$

Indication : on montre $u_n = o(1/n^\alpha)$, $\alpha > 1$ à déterminer.

5.3.3 Convergence absolue

Définition 3. On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 9. Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge.

Démonstration. On écrit, pour tout n ,

$$0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|.$$

Comme la série $\sum 2|u_n|$ converge, le théorème de comparaison montre que la série $\sum(u_n + |u_n|)$ converge. Par linéarité,

$$u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n|,$$

donc la série $\sum u_n$ converge. □

Étude 11. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument.

5.3.4 Équivalent (c'est puissant)

Théorème 10. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

Si :

1. à partir d'un certain rang u_n et v_n sont *POSITIFS*
2. On a $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$

alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature

Démonstration. On a

$$u_n \sim v_n \implies u_n - v_n = o(v_n).$$

Supposons d'abord que $\sum v_n$ converge. Puisque

$$|u_n - v_n| = o(v_n)$$

et que v_n est positif à partir d'un certain rang, le théorème de négligeabilité montre que la série $\sum |u_n - v_n|$ converge. La série $\sum(u_n - v_n)$ converge donc absolument, donc converge. Par linéarité,

$$u_n = v_n + (u_n - v_n),$$

donc $\sum u_n$ converge.

Réciproquement, $v_n \sim u_n$, donc $v_n - u_n = o(u_n)$, et le même raisonnement montre que la convergence de $\sum u_n$ entraîne celle de $\sum v_n$.

Les deux séries ont donc même nature. □

Attention. Il ne faut pas oublier l'hypothèse numéro 1 : la **POSITIVITÉ**. On peut en effet montrer que, en posant $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ on a $u_n \sim v_n$ MAIS la série de terme général u_n n'a pas même nature que la série de terme général v_n .

Étude 12 (Application du théorème sur les équivalents). Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature de la série de terme général u_n .

1. $u_n = \frac{(n+1)}{(3n-1)^2}$
2. $u_n = \frac{n-1}{(2^n+2)}$
3. $u_n = n^\alpha \left(\sqrt{1 + \frac{1}{(n+1)^2}} - 1 \right)$ où α est un réel.

Exercices du chapitre 2

Exercice 1

Montrer que l'assertion suivante est fausse :

Si (u_n) est une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{1}{n^2}$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 2

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
2. $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$
3. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$
4. $u_n = ne^{-n}$
5. $u_n = e^{1/n}$
6. $u_n = e^{1/n} - 1$
7. $u_n = \frac{1}{n^{2\alpha}}$ On discutera selon la valeur de α .
8. $u_n = \frac{(\ln(n))^2}{n^4}$
9. $u_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$
10. $u_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$
11. $u_n = \frac{n^2 + 1}{(n-1)^3}$
12. $u_n = \frac{n^2 + 1}{(n-1)^2}$
13. $u_n = \frac{\ln(n)^2}{n^5}$
14. $u_n = \frac{\ln(n)^2}{n^3}$
15. $u_n = \frac{1}{\ln n}$
16. $u_n = \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\sqrt{n}}$
17. $u_n = 2^{-n^2}$
18. Déterminer, suivant la valeur de α , la nature de la série : $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha$.
19. Déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{(n+1)^2}$$

Exercice 3

Retrouver les valeurs de espérance puis de la variance d'une variable aléatoire X de loi géométrique de paramètre p ; $p \in]0, 1[$.

Exercice 4

On considère une suite (u_n) vérifiant

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_n > 0, \\ \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente.} \end{cases}$$

1. Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 0} e^{u_n}$$

est divergente.

2. Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 0} \ln(1 + u_n)$$

est convergente.

3. Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 0} u_n^2$$

est convergente.

4. En étudiant les sommes partielles, montrer que la série

$$\sum_{n \geq 0} \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$$

est divergente.

Exercice 5

Séries alternées et équivalents

Partie A – Un résultat sur les séries alternées

Soit (a_n) une suite de réels positifs, décroissante et convergeant vers 0.

On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n.$$

1. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$S_{2N+2} - S_{2N} \leq 0.$$

En déduire que la suite (S_{2N}) est décroissante.

2. Montrer de même que la suite (S_{2N+1}) est croissante.
 3. Montrer que les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) convergent vers une même limite.
 4. Montrer finalement que la série

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$$

converge.

5. En déduire que la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

converge.

Partie B – Deux suites équivalentes

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n.$$

2. Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n \geq 2} v_n ?$$

3. Montrer que

$$u_n - v_n = -\frac{1}{\sqrt{n}((-1)^n + \sqrt{n})}.$$

4. Montrer que

$$u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}.$$

5. En déduire que la série

$$\sum_{n \geq 2} (u_n - v_n)$$

diverge.

6. En raisonnant par l'absurde et en utilisant la linéarité, montrer que la série

$$\sum_{n \geq 2} u_n$$

diverge.

7. On a donc

$$u_n \sim v_n,$$

alors que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature.

Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas le théorème du cours concernant les séries à termes équivalents.

Exercice 6

Séries télescopiques

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. On considère la série de terme général

$$u_{n+1} - u_n.$$

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, simplifier la somme

$$\sum_{n=0}^N (u_{n+1} - u_n).$$

2. Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$$

converge si et seulement si la suite (u_n) converge.

3. Lorsque (u_n) converge vers un réel ℓ , déterminer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n).$$