Chapitre 7: Intégration généralisée à un intervalle quelconque

Afin d'étudier efficacement le cours : refaites les schémas (ou dessins) et études qui l'accompagnent et vérifiez dans un second temps en consultant vos notes manuscrites

Table des matières

1 Intégrales sur un intervalle du type $[a,+\infty[$ **1**
- 1.1 Définition et premiers exemples . . . 1
- 1.2 Intégrales de référence (à connaitre) . . . 3

2 Nature des intégrales de fonctions positives sur un intervalle de type $[a,+\infty[$ **6**

3 Extension aux intervalles du type $]-\infty,b],]-\infty,+\infty[$ **10**

4 Propriétés des intégrales généralisées **15**
- 4.1 Convergence absolue . . . 15
- 4.2 Linéarité . . . 15
- 4.3 Relation de Chasles . . . 16
- 4.4 Positivité et croissance . . . 16
- 4.5 Parité . . . 17

5 Exercices du chapitre 7 **18**

1 Intégrales sur un intervalle du type $[a,+\infty[$

1.1 Définition et premiers exemples

Dans cette section la lettre a désigne un réel.

Définition 1. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $[a,+\infty[$.*
On dit que : "l'intégrale de a à plus l'infini de f converge" lorsque :
$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$ existe et est finie,
si c'est le cas on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$$

Étude 1 (Exemple)**.** *Étudions le cas particulier où $a=1$ et $\forall t\geq 1, f(t)=\dfrac{1}{t^2}$*

1. *Justifier que l'intégrale de 1 à $+\infty$ de f converge et donner la valeur de $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^2}dt$*
2. *Comment interpréter graphiquement $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^2}dt$?*

Corrigé.

1. *La fonction $t\mapsto 1/t^2$ est définie et continue sur $[1,+\infty[$.*

Pour tout $x \geq 1$, on a :

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x$$
$$= 1 - \frac{1}{x}.$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Par définition, l'intégrale converge et

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = 1}.$$

2. *La fonction $t \mapsto 1/t^2$ est positive sur $[1,+\infty[$. L'intégrale représente donc l'aire comprise entre la courbe représentative de cette fonction, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$, en prolongeant le domaine vers $+\infty$.*
   Cette aire est finie et vaut 1.

Remarque : Pour indiquer "la convergence de l'intégrale de a à $+\infty$ de f" on écrit aussi :

$$\text{L'intégrale } \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge}$$

On devrait plutôt dire (et écrire) :

"la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ converge en $+\infty$ (rappelons que "converger " se traduit par "admettre une limite finie"

Étude 2 (Autres exemples classiques-CSR)**.** *Justifier la convergence des intégrales suivantes et calculer leurs valeurs :*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt \qquad \int_0^{+\infty} te^{-t}dt$$

Corrigé.

Les fonctions $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto te^{-t}$ sont définies et continues sur $[0,+\infty[$.
Pour tout $x \geq 0$:

$$\int_0^x e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x$$
$$= 1 - e^{-x}.$$

Comme $e^{-x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, l'intégrale converge et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1}.$$

Pour la seconde intégrale, effectuons une intégration par parties sur $[0,x]$.
On définit deux fonctions u, v de classe C^1 :

$$u(t) = t, \qquad v'(t) = e^{-t},$$

d'où

$$u'(t) = 1, \qquad v(t) = -e^{-t}.$$

Ainsi :

$$\int_0^x te^{-t}\,dt = \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt$$
$$= -xe^{-x} + 1 - e^{-x}$$
$$= 1 - (x+1)e^{-x}.$$

Par croissance comparée,

$$xe^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad et \quad e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x te^{-t}\,dt = 1.$$

Finalement :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt = 1}.$$

1.2 Intégrales de référence (à connaitre)

Théorème 1 (Intégrales de Riemann). *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$.
L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$

Étude 3 (Démonstration). 1. *Soit* $\beta \in \mathbb{R}$. *Rappeler la dérivée de la fonction* $t \mapsto t^\beta$.

2. *Donner alors une primitive de la fonction* $t \mapsto t^\gamma$ *où* γ *est un réel fixé.*
3. *Prouver le théorème 1*

Corrigé.

1. *Pour tout* $t > 0$ *:*

$$\boxed{(t^\beta)' = \beta t^{\beta-1}}.$$

2. *Si* $\gamma \neq -1$, *une primitive de* $t \mapsto t^\gamma$ *est*

$$F(t) = \frac{t^{\gamma+1}}{\gamma+1}.$$

En effet :

$$F'(t) = \frac{\gamma+1}{\gamma+1} t^\gamma = t^\gamma.$$

Si $\gamma = -1$, *une primitive sur* $]0,+\infty[$ *est* $F(t) = \ln t$.

3. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$

Pour commencer on remarque que la fonction $t \mapsto 1/t^\alpha = 1/exp(\alpha.\ln(t)$ *est définie et continue sur* $[1,+\infty[$

$x \geq 1$.

Premier cas : $\alpha \neq 1$.

On a :

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt &= \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x \\ &= \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Si $\alpha > 1$, *alors* $1-\alpha < 0$, *donc*

$$x^{1-\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Par conséquent :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1}.$$

L'intégrale converge.
Si $\alpha < 1$, *alors* $1-\alpha > 0$ *et*

$$x^{1-\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

L'intégrale diverge donc vers $+\infty$.

Second cas : $\alpha = 1$.

Pour $x \geq 1$:

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_1^x = \ln x.$$

Or

$$\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

L'intégrale diverge.

On a ainsi démontré que

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \text{ converge} \iff \alpha > 1.}$$

Étude 4. *Déterminer la nature des intégrales suivantes :*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}dt \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}dt$$

Corrigé.

On utilise le théorème des intégrales de Riemann.

1. *On a*

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t^1}.$$

Comme $\alpha = 1 \leq 1$,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt \text{ diverge.}}$$

2. *On a*

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{1/2}}.$$

Comme $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \text{ diverge.}}$$

3. *On a*

$$\frac{1}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{3/2}}.$$

Comme $\alpha = \frac{3}{2} > 1$,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt \text{ converge.}}$$

Théorème 2. *Soit α un réel.*

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$

Si c'est le cas

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha}$$

Étude 5 (Démonstration du théorème 2)**.** ***Corrigé.***

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ (théorème de composition).

Soit $x \geq 0$.

Premier cas : *$\alpha \neq 0$.*

Une primitive de $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est $t \mapsto -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t}$.

Ainsi :

$$\int_0^x e^{-\alpha t}\,dt = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t}\right]_0^x = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}.$$

Si $\alpha > 0$, alors

$$e^{-\alpha x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

L'intégrale converge donc vers $1/\alpha$.

Si $\alpha < 0$, alors

$$e^{-\alpha x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Comme $\alpha < 0$,

$$\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

L'intégrale diverge.

Second cas : *$\alpha = 0$.*

On a :

$$\int_0^x e^0\,dt = \int_0^x 1\,dt = x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

L'intégrale diverge.

Finalement :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt \text{ converge} \iff \alpha > 0.}$$

Dans ce cas :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha}.}$$

Étude 6. *Justifier l'existence et calculer :*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt, \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{e^{-t}}dt, \quad \int_1^{+\infty} e^{-t/2}dt$$

Corrigé.

1. *D'après le théorème sur les intégrales exponentielles, appliqué avec $\alpha = 1 > 0$, l'intégrale converge et*

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1}.$$

2. *Pour tout $t \geq 0$:*

$$\sqrt{e^{-t}} = e^{-t/2}.$$

On applique le même théorème avec $\alpha = \frac{1}{2} > 0$.

L'intégrale converge et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \sqrt{e^{-t}}\,dt = 2.}$$

3. *Le théorème précédent assure que*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t/2}\,dt$$

converge.

Pour tout $x \geq 1$:

$$\begin{aligned}\int_1^x e^{-t/2}\,dt &= \left[-2e^{-t/2}\right]_1^x \\ &= 2e^{-1/2} - 2e^{-x/2}.\end{aligned}$$

Comme $e^{-x/2} \to 0$, l'intégrale converge et

$$\boxed{\int_1^{+\infty} e^{-t/2}\,dt = 2e^{-1/2}.}$$

2 Nature des intégrales de fonctions positives sur un intervalle de type $[a, +\infty[$

Dans cette section la lettre a désigne un réel.

Dans cette section on ne s'intéresse qu'à la nature des intégrales . On pose la question "l'intégrale est-elle convergente ?" sans chercher en cas de convergence à calculer sa valeur.

Théorème 3. *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.*
Pour b réel plus grand que a les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_b^{+\infty} f(t)dt$ ont la même nature.

Étude 7. *Prouver ce théorème.*
Corrigé.
Soit $b > a$.
Pour tout $x \geq b$, la relation de Chasles donne :

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^x f(t)\,dt.$$

Puisque f est continue sur $[a,b]$, le réel

$$C = \int_a^b f(t)\,dt$$

existe.
On obtient donc :

$$\int_a^x f(t)\,dt = C + \int_b^x f(t)\,dt.$$

Les deux fonctions de x ne diffèrent que d'une constante. L'une admet donc une limite finie en $+\infty$ si et seulement si l'autre admet une limite finie.
Par définition, les intégrales

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \quad et \quad \int_b^{+\infty} f(t)\,dt}$$

ont la même nature.

Étude 8. *Donner la nature des intégrales suivante :*

$$\int_{1/3}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt, \quad \int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}dt, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$$

Corrigé.

1. *La fonction $t \mapsto 1/t^2$ est continue sur $[1/3, +\infty[$.*
   D'après le théorème de Riemann, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$$

   converge car $\alpha = 2 > 1$.
   D'après le théorème de changement de borne inférieure, les intégrales

$$\int_{1/3}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt \quad et \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$$

   ont la même nature.
   Ainsi :

$$\boxed{\int_{1/3}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt \text{ converge.}}$$

2. *D'après le théorème de Riemann,*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

   diverge car $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$.
   La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ étant continue sur $[1, +\infty[$, le théorème de changement de borne inférieure permet de conclure que

$$\boxed{\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \text{ diverge.}}$$

3. *Le théorème de Riemann, avec $\alpha = 2 > 1$, donne directement :*

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt \text{ converge.}}$$

Étude 9 (Facultatif)**.** *erreur énoncé , reprise étude 7*

Théorème 4. *Soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$.*

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si :

la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée sur $[a, +\infty[$

Étude 10 (Démonstration)**.** 1. Facultatif *:Prouver le théorème (la preuve est brève)*

2. À retenir : *Comment interpréter le fait que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge lorsque f est une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$?*

Corrigé.

1. *Posons, pour tout $x \geq a$:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

   Comme f est continue, le théorème fondamental de l'analyse assure que

$$F'(x) = f(x).$$

   Or $f(x) \geq 0$, donc F est croissante.

Supposons d'abord que l'intégrale converge. Alors F admet une limite finie ℓ en $+\infty$.
Puisque F est croissante, on a

$$\forall x \geq a, \quad F(x) \leq \ell.$$

Ainsi F est majorée.
Réciproquement, supposons F majorée.
La fonction F est croissante et majorée sur $[a,+\infty[$.
D'après le théorème de convergence des fonctions monotones, F admet une limite finie en $+\infty$.
Par définition, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
On a donc démontré l'équivalence.

2. *Géométriquement, lorsque f est continue et positive, la convergence de*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

signifie que l'aire sous la courbe de f, au-dessus de l'axe des abscisses, entre a et $+\infty$, est finie.

Théorème 5. *Soient $f,g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que :*

- *Au voisinage de $+\infty$: $f(t) \geq 0 \quad$ et $\quad g(t) \geq 0$*
- *Au voisinage de $+\infty$: $f(t) \leq g(t)$*
- *L'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge.*

Sous ces hypothèses :

l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Démonstration. admis. □

Étude 11 (Application)**.** *Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt$ converge.*

Corrigé.

Pour tout $t \geq 1$, posons

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{t^2} \quad et \quad g(t) = e^{-t}.$$

Les fonctions f et g sont continues et positives sur $[1,+\infty[$.
Comme $t \geq 1$, on a $t^2 \geq 1$, donc

$$\frac{1}{t^2} \leq 1.$$

En multipliant par $e^{-t} > 0$, on obtient

$$\forall t \geq 1, \quad 0 \leq \frac{e^{-t}}{t^2} \leq e^{-t}.$$

D'après le théorème sur les intégrales exponentielles,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

converge puisque $\alpha = 1 > 0$.

Le théorème de changement de borne inférieure assure alors que

$$\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

converge également.

Toutes les hypothèses du théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives sont donc vérifiées.

Par conséquent :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \text{ converge.}}$$

Théorème 6. *Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues tels que :*

- *Au voisinage de $+\infty$: $f(t) \geq 0 \quad et \quad g(t) \geq 0$*
- *$f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(g(t))$*
- *L'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge.*

Sous ces hypothèses l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Démonstration. admis. □

Étude 12 (Application). *Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^3}dt$ converge.*

Corrigé.

Pour $t \geq 2$, posons

$$f(t) = \frac{\ln t}{t^3} \quad et \quad g(t) = \frac{1}{t^2}.$$

Les fonctions f et g sont continues et positives sur $[2, +\infty[$.

De plus :

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{\ln t}{t^3} \times t^2 = \frac{\ln t}{t}.$$

Par croissance comparée :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0.$$

Par conséquent :

$$\frac{\ln t}{t^3} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

D'après le théorème des intégrales de Riemann,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$$

converge puisque $\alpha = 2 > 1$.

Le théorème de changement de borne inférieure assure alors la convergence de

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt.$$

On applique le théorème de comparaison par négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives.

On en déduit :

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3}\,dt \text{ converge.}}$$

Théorème 7. *Soient $f,g:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues tels que :*

- *Au voisinage de $+\infty$: $f(t)\geq 0$ et $g(t)\geq 0$*
- $f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$

Sous ces hypothèses les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ ont même nature.

Démonstration. admis. □

Étude 13 (Application)**.** *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+1/t)}{t^2(t+2)}dt$ *converge.*

Corrigé.

Pour tout $t\geq 1$, posons

$$f(t)=\frac{\ln(1+1/t)}{t^2(t+2)}.$$

Cette fonction est continue sur $[1,+\infty[$.
Déterminons un équivalent de $f(t)$ lorsque $t\to+\infty$.
On sait que

$$\ln(1+u)\underset{u\to 0}{\sim} u.$$

Comme $\frac{1}{t}\to 0$ lorsque $t\to+\infty$, on en déduit :

$$\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t}.$$

D'autre part :

$$t+2=t\left(1+\frac{2}{t}\right).$$

Puisque $1+\frac{2}{t}\to 1$, on a

$$t+2\underset{t\to+\infty}{\sim} t.$$

Par conséquent :

$$t^2(t+2)\underset{t\to+\infty}{\sim} t^3.$$

Par quotient d'équivalents :

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{\ln(1+1/t)}{t^2(t+2)}\\&\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1/t}{t^3}\\&=\frac{1}{t^4}.\end{aligned}$$

Or, d'après le théorème de Riemann,

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^4}dt$$

converge puisque $\alpha=4>1$.

Les fonctions f et $t\mapsto 1/t^4$ étant continues, positives et équivalentes au voisinage de $+\infty$, le théorème de comparaison par équivalence assure que leurs intégrales ont même nature.

Ainsi :

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+1/t)}{t^2(t+2)}dt \text{ converge.}}$$

3 Extension aux intervalles du type $]-\infty,b],]-\infty,+\infty[$

Définition 2. *Soit $b \in \mathbb{R}$*
Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $]-\infty, b]$.

On dit que : "l'intégrale de moins l'infini à b de f converge" lorsque :

$\lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)dt$ existe et est finie,
si c'est le cas on pose :

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)dt$$

Étude 14 (Exemple)**.** *Justifier la divergence de :* $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t} dt$

Corrigé.
La fonction $t \mapsto 1/t$ est définie et continue sur $]-\infty, -1]$.
Pour tout $x < -1$, on a :

$$\int_x^{-1} \frac{1}{t} dt = [\ln|t|]_x^{-1}.$$

En effet, sur $]-\infty, 0[$, une primitive de $t \mapsto 1/t$ est $t \mapsto \ln|t|$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_x^{-1} \frac{1}{t} dt &= \ln|-1| - \ln|x| \\ &= -\ln(-x).\end{aligned}$$

Lorsque $x \to -\infty$, on a $-x \to +\infty$, donc

$$\ln(-x) \to +\infty.$$

Par conséquent :

$$\int_x^{-1} \frac{1}{t} dt \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty.$$

La limite n'est pas finie.
Par définition :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t} dt \text{ diverge.}}$$

Étude 15. *Justifier la convergence et calculer :* $\int_{-\infty}^{-1/2} \frac{1}{t^3} dt$

Corrigé.
La fonction $t \mapsto 1/t^3$ est définie et continue sur $]-\infty, -1/2]$.
Pour tout $x < -\frac{1}{2}$, on a :

$$\int_x^{-1/2} \frac{1}{t^3} dt = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_x^{-1/2}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_x^{-1/2} \frac{1}{t^3} dt &= -\frac{1}{2(-1/2)^2} + \frac{1}{2x^2} \\ &= -2 + \frac{1}{2x^2}.\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^{-1/2} \frac{1}{t^3} dt = -2.$$

L'intégrale converge donc et

$$\boxed{\int_{-\infty}^{-1/2} \frac{1}{t^3}\,dt = -2.}$$

Définition 3. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.*

On dira que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge lorsque :

les intégrales $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ et $\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$ convergent,

si c'est le cas on note $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ le réel : $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)dt$

Étude 16. *Montrer la convergence et calculer :* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt$

Corrigé.

La fonction $t \mapsto e^{-|t|}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (par composition).
D'après la définition, il faut étudier séparément les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-|t|}\,dt \quad et \quad \int_{0}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt.$$

Première intégrale.

Pour $t \leq 0$, on a $|t| = -t$, donc

$$e^{-|t|} = e^{t}.$$

Pour tout $x < 0$:

$$\begin{aligned}\int_{x}^{0} e^{-|t|}\,dt &= \int_{x}^{0} e^{t}\,dt \\ &= \left[e^{t}\right]_{x}^{0} \\ &= 1 - e^{x}.\end{aligned}$$

Or $e^{x} \to 0$ lorsque $x \to -\infty$. Ainsi :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{0} e^{-|t|}\,dt = 1.}$$

Seconde intégrale.

Pour $t \geq 0$, on a $|t| = t$, donc

$$e^{-|t|} = e^{-t}.$$

D'après le théorème sur les intégrales exponentielles, avec $\alpha = 1 > 0$:

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1.}$$

Les deux intégrales convergent.
Par définition, l'intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt &= \int_{-\infty}^{0} e^{-|t|}\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt \\ &= 1 + 1 \\ &= 2.\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt = 2.}$$

Étude 17. *Montrer la convergence de :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Corrigé.

Posons

$$f(t) = e^{-t^2/2}.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

D'après la définition, il faut montrer que les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2}\,dt \quad et \quad \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt$$

convergent.

1. Étude sur $[0,+\infty[$**.**

On sait que, pour tout réel $\alpha > 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\alpha} e^{-t} = 0.$$

Or, en posant $x = t^2/2$, on obtient

$$t^2 e^{-t^2/2} = 2xe^{-x}.$$

Lorsque $t \to +\infty$, on a $x \to +\infty$. Par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2/2} = 0,$$

ce qui signifie que

$$\boxed{e^{-t^2/2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (t\to+\infty).}$$

En particulier,

$$e^{-t^2/2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \Longrightarrow \quad e^{-t^2/2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$$

converge puisque $2 > 1$.

Les fonctions étant positives, le théorème de comparaison par domination permet d'affirmer que

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt$$

converge.

Enfin, f étant continue sur $[0,+\infty[$, le théorème de changement de borne inférieure donne la convergence de

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt.}$$

2. Étude sur $]-\infty,0]$**.**

Pour tout réel $x<0$, considérons l'intégrale

$$I(x)=\int_x^0 e^{-t^2/2}\,dt.$$

Effectuons le changement de variable

$$u=-t.$$

L'application

$$\varphi : t \longmapsto -t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x,0]$, et sa dérivée est

$$\varphi'(t)=-1.$$

Les bornes deviennent :

$$t=x \Longrightarrow u=-x, \qquad t=0 \Longrightarrow u=0.$$

De plus,

$$t=-u, \qquad dt=-du.$$

La fonction $u \mapsto e^{-u^2/2}$ étant continue, la formule de changement de variable dans une intégrale sur un segment s'applique.

On obtient donc

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_x^0 e^{-t^2/2}\,dt \\ &= \int_{-x}^0 e^{-(-u)^2/2}(-du) \\ &= -\int_{-x}^0 e^{-u^2/2}\,du \\ &= \int_0^{-x} e^{-u^2/2}\,du. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi montré que, pour tout $x<0$,

$$\boxed{\int_x^0 e^{-t^2/2}\,dt = \int_0^{-x} e^{-u^2/2}\,du.}$$

Étudions maintenant la limite lorsque $x \to -\infty$.

On a alors

$$-x \to +\infty.$$

Or, d'après la première partie, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$$

converge.

Cela signifie, par définition, que la limite

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-u^2/2}\,du$$

existe et est finie.

En prenant $A=-x$, on en déduit que

$$\lim_{x\to-\infty}\int_0^{-x} e^{-u^2/2}\,du$$

existe et est finie.

Par l'égalité précédente, la limite

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 e^{-t^2/2}\,dt$$

existe donc et est finie.

Par définition, l'intégrale

$$\boxed{\int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2}\,dt}$$

converge.

Conclusion.

Les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2}\,dt \quad et \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt$$

convergent.

Par définition, on en déduit que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt \text{ converge.}}$$

Remarque.

La fonction f est paire puisque

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad f(-t)=f(t).$$

Nous verrons qu'un théorème sur les intégrales de fonctions paires permettra de simplifier cette démonstration : il suffira d'étudier la convergence sur $[0,+\infty[$.

4 Propriétés des intégrales généralisées

Dans cette section a désigne un réel ou alors $-\infty$, b désigne un réel ou alors $+\infty$. On suppose $a<b$.

Les fonctions introduites (notées f,g) sont supposées définies et continues en tout point de $]a,b[$ et aussi en a et b lorsque ces derniers désignent des réels.

4.1 Convergence absolue

Définition 4. *On dira que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente lorsque $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.*

Théorème 8. *Toute intégrale absolument convergente est convergente mais la réciproque est fausse.*

Étude 18. *Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$.*

Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t^2}dt$ converge.

4.2 Linéarité

Théorème 9. *Étant donnés $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, si les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent alors $\int_a^b(\alpha f(t)+\beta g(t))dt$ converge de plus :*

$$\int_a^b \alpha f(t)+\beta g(t)dt=\alpha\int_a^b f(t)dt+\beta\int_a^b g(t)dt$$

Démonstration. admis □

Étude 19 (Preuve d'un cas particulier)**.** *Prouver le théorème lorsque $a = 0$ et $b = +\infty$*

Étude 20 (Application)**.** *Justifier la convergence et calculer :* $\int_0^{+\infty} (2e^{-t} - e^{-2t})dt$

Théorème 10. *Lorsque α est un réel* ***non nul*** *, les intégrales* $\int_a^b \alpha f(t)dt$ *et* $\int_a^b f(t)dt$ *ont même nature.*

Étude 21 (Facultatif : Preuve d'un cas particulier)**.** *Prouver le théorème pour a réel et $b = +\infty$*

Étude 22. *Quelle est la nature de l'intégrale :* $\int_{-1}^{+\infty} e^{-2t-1}dt$ *?*

4.3 Relation de Chasles

Théorème 11. *Si $\int_a^b f(t)dt$ converge alors pour tout réel $c \in]a,b[$ les intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent.*

De plus :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Démonstration. Théorème admis □

Étude 23. *Illustrer la relation de Chasles à l'aide d'un dessin lorsque f est positive.*

Étude 24 (Application)**.** *On admet que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$ *converge et vaut* $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{-t^2/2}dt$$

Montrer que la série de terme général $u_n, n \in \mathbb{N}$ converge et calculer sa somme.

4.4 Positivité et croissance

Théorème 12. *Lorsque :*

- $a \leq b$
- *L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge*
- $\forall t \in]a,b[, f(t) \geq 0$

Alors le nombre $\int_a^b f(t)dt$ est positif.

Étude 25 (Preuve)**.** *Prouver ce théorème lorsque $a = 0$ et $b = +\infty$*

Théorème 13. *Lorsque :*

- $a \leq b$
- *Les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent*
- $\forall t \in]a,b[, f(t) \leq g(t)$

Alors

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

Étude 26. *Prouver ce théorème*

Étude 27. ***CSR : exercice type concours***

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^n} dt$$

1. *Montrer que l'intégrale définissant $I_n$est bien convergente*
2. *Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}$$

3. *Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

4.5 Parité

Théorème 14. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.*

Si f est paire ou impaire alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge aussi.

Dans le cas f paire on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)dt$$

Dans le cas f impaire on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$$

Étude 28. *CSR : Faites un dessin pour illustrer ce théorème 14.*

Facultatif : Prouver le théorème 14

Étude 29 (Applications du théorème 14)**.** *Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$$

Pour la seconde intégrale on admet que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ *converge et vaut* $\sqrt{2\pi}$

5 Exercices du chapitre 7

Exercice 1

1. On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ (qui contient au moins deux points) et une fonction f définie et continue sur I.
   Rappeler la définition (donnée dans le cours de ECG1) de $\int_a^b f(t)dt$ lorsque $a,b \in I$
2. Expliquer la notation : $\int_a^b f(t)dt$. On ne cherchera pas à produire une explication rigoureuse mathématiquement . On commencera par subdiviser le segment d'extrémités a,b en grand nombre de points : $a = t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ et on remarquera :

$$F(b) - F(a) = F(t_1) - F(t_0) + F(t_2) - F(t_1) + \cdots + F(t_n) - F(t_{n-1})$$

Exercice 2

Montrer que les fonctions suivantes sont bien définies et dérivables sur l'intervalle I indiqué.. Calculer leurs dérivée :

1. $$F : x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} \quad I =]0, +\infty[$$
2. $$G : x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} \quad I = \mathbb{R}$$
3. $$H : x \mapsto \int_x^{x^2} e^{-t^2} \quad I = \mathbb{R}$$

Exercice 3

En utilisant la définition, étudier la nature des intégrales suivantes. En cas de convergence, donner la valeur des intégrales.

On commencera par présenter la méthode à suivre.

1. $$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$
2. $$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx$$

   Pour cette question on admettra que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge et vaut $\sqrt{\pi}/2$
   On sera amené à effectuer une **intégration par parties**
3. $$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$$

   On sera amené à effectuer deux **intégration par parties** successives.
4. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx$

   Pour le calcul de l'intégrale $\int_e^A \frac{1}{x\ln(x)}dx$, on proposera deux méthodes :

   — L'une en reconnaissant directement une primitive
   — L'autre en effectuant le changement de variable $u = \ln(x)$

5.
$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(ln(x))^2} dx$$

On proposera deux méthodes :

— L'une en reconnaissant directement une primitive
— L'autre en effectuant le changement de variable $u = \ln(x)$

6.
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt$$

On proposera deux méthodes :

— L'une en reconnaissant directement une primitive
— L'autre en effectuant le changement de variable $u = e^t$

7.
$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(1+t)^3} dt$$

On proposera deux méthodes :

— L'une en reconnaissant directement une primitive
— L'autre en effectuant un changement de variable affine, c'est à dire de la forme $u = a + bt$ où a, b sont deux réels à trouver.

Exercice 4
Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1.
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^4} dt$$

2.
$$\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^5} du$$

3.
$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^4}\right) dx$$

4.
$$\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2} dt$$

Exercice 5
CSR-Colles-DS
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$$

1. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de I_n.
   (b) Calculer I_1.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n ; En déduire la valeur de I_n.

Exercice 6
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$J_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$$

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_{n+2} = \frac{n+1}{2} J_n$$
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n n!} J_0$$
3. Justifier l'existence et calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2} dt$$

Exercice 7

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de α l'intégrale
$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^\alpha} dx$$
converge-t-elle ?
2. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est convergente (on ne demande pas sa limite).
   (b) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
   Calculer I_1. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Exercice 8
Etudier la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{|x|}} dx$

Exercice 9
On note f la fonction :
$$x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que f est paire
3. Justifier la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$
4. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$

Exercice 10
On note φ la fonction :
$$t \mapsto e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

.

1. Montrer que φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_x^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)dt$$
3. On veut montrer que f est dérivable et calculer f'.

(a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\int_0^x \varphi(t)dt + K$$

où K est une constante, c'est à dire un réel indépendant de x

(b) Conclure

4. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$. Calculer cette limite.

Exercice 11

Soit g une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles.

(a) Montrer que pour tout α et β dans I tels que $\alpha < \beta$,

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta g(t)\,dt = \int_0^1 g\big(\alpha+(\beta-\alpha)x\big)\,dx.$$

(b) Soit a,b,c,d dans I tels que $a < c < d < b$. On suppose g décroissante sur I. Établir l'encadrement :

$$\frac{1}{b-c}\int_c^b g(t)\,dt \leq \frac{1}{d-c}\int_c^d g(t)\,dt \leq \frac{1}{d-a}\int_a^d g(t)\,dt.$$

Exercice 12

1. Montrer que $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}ln(x)}\right)$ en $+\infty$ puis en déduire que : $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}ln(x)}dx$ diverge.
2. Plus généralement, montrer que si β est un réel strictement inférieur à 1, alors $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\beta ln(x)}dx$ diverge.