CONCOURS BLANC 1

Mercredi 08/11/2023 - 4h

Calculatrice interdite

1. Les exercices sont indépendants.
2. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
3. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
4. Encadrez ou soulignez vos résultats.

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques `Python` *sont importées comme suit :*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - ECRICOME ECS 2022 (extrait)

On considère un réel μ et un réel strictement positif a, et on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$F_{\mu,a} : x \mapsto \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu - x}{a}\right)\right).$$

1. Soient a et μ deux réels tels que $a > 0$.
   (a) Justifier que $F_{\mu,a}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée notée $f_{\mu,a}$ et sa dérivée seconde $f'_{\mu,a}$.
   (b) En déduire les variations et la convexité de $F_{\mu,a}$ sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites de $F_{\mu,a}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Donner l'allure de la courbe de $F_{\mu,a}$ en y faisant figurer le point d'inflexion.
   (c) Montrer que $F_{\mu,a}$ est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer.
   On note G la réciproque de $F_{0,1}$. Expliciter G.
2. Soient a et μ deux réels tels que $a > 0$.
   Montrer que $f_{\mu,a}$ est une densité, et que $F_{\mu,a}$ est la fonction de répartition associée.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et on suppose que toutes les variables aléatoires introduites dans la suite du problème sont définies sur cet espace probabilisé.
Soient μ et a des réels tels que $a > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle X **suit la loi de Gumbel de paramètre** (μ, a), ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\mu, a)$, si elle admet $f_{\mu,a}$ comme densité.

3. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.
   Soit μ un réel et a un réel strictement positif.
   Montrer que la variable aléatoire $X = aZ + \mu$ est une variable aléatoire à densité qui suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a).

On **admet** que réciproquement, si X suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a), alors $Z = \frac{X-\mu}{a}$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

4. (a) Soit U une variable aléatoire à densité qui suit la loi uniforme $]0, 1[$.
   Montrer que la variable alélaoire $Y = -\ln(-\ln(U))$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.
   (b) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def gumbel(mu,a):` renvoyant une réalisation d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(\mu, a)$.
5. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) et $Z = \frac{X-\mu}{a}$.
   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(u)e^{-u}du$ converge.

(b) À l'aide du changement de variable $t = \mathrm{e}^{-u}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(-\ln(t))\mathrm{d}t$ converge.

On notera dans la suite :

$$\gamma = -\int_0^1 \ln(-\ln(t))\mathrm{d}t.$$

(c) Montrer que Z admet une espérance et que $E(Z) = \gamma$.

On pourra utiliser le changement de variable $u = \exp(-\exp(-x))$.

(d) En déduire que X admet une espérance et déterminer $E(X)$ en fonction de γ, μ et a.

Exercice 2 - ECRICOME 2014 (adapté)

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe deux polynômes P, Q appartenant $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f(x) = xP(x) + x\ln(x)Q(x).$$

Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose :

$$u_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k\ln(x) \end{array} \right.$$

Pour toute fonction f appartenant à E, on note $\varphi(f)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

et on note φ l'application qui à $f \in E$ associe $\varphi(f)$.

1. Prouver que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $E = \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$ (c'est-à-dire que E est l'espace vectoriel engendré par les fonctions u_1, v_1, ..., u_n, v_n).
   On **admettra** que la famille $\mathcal{B} = (u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$ est une base de E.
2. Justifier que chaque fonction f de E se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, calculer $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$.
3. Démontrer que φ est linéaire. En déduire que $\varphi(f) \in E$ lorsque $f \in E$.
4. Écrire la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$.
5. L'endomorphisme φ est-il bijectif ? Quelles sont les valeurs des termes diagonaux de M ?
6. Soit $f \in E$ un vecteur tel que $\varphi(f) = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que λ est non nul et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ g(x) = x^{-1/\lambda}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$
   Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}_+^\star$. En déduire l'expression de la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ puis celle de f.
7. Pour tout $k \in [\![1, k]\!]$, on note $E_k = \{f \in E,\ \varphi(f) = \frac{1}{k+1}f\}$. Montrer que : $E_k \subset \mathrm{Vect}(u_k)$. En déduire la dimension de E_k pour tout k.
   Pour les cubes : φ est-il diagonalisable ?

Problème 3 - EDHEC ECS 2022

1. **Question préliminaire**
   Soit f une fonction définie et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.
   Montrer que $\ln(f(x)) \underset{0^+}{\sim} \ln(x)$.

Partie I - deux nouvelles fonctions

On définit les fonctions, appelées "sinus hyperbolique" et "cosinus hyperbolique", notées respectivement sh et ch, en posant, pour tout réel x :

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

2. (a) Étudier la parité de la fonction sh.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction sh.
   (c) Déterminer un équivalent en 0 de $\mathrm{sh}(x)$.
3. (a) Étudier la parité de la fonction ch.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction ch.
4. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{ch}(x))^2 - (\mathrm{sh}(x))^2 = 1.$$

Partie II - une troisième fonction

5. (a) Montrer que l'on définit bien une fonction, appelée "tangente hyperbolique" et notée th, en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

   (b) Vérifier que la fonction th est impaire.
   (c) En s'aidant éventuellement des relations $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$, déterminer les variations de la fonction th.
   (d) Dresser le tableau de variations, limites comprises, de la fonction th.
6. (a) Trouver les constantes a et b telles ques : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)} = \dfrac{a\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} + \dfrac{b\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
   (b) En déduire, à l'aide de la fonction th, une primitive sur $\mathbb{R}_+^\star$ de la fonction qui à $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)}$.
7. Montrer que $\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{0^+}{\sim} \ln x$.

Partie III - une série convergente

Dans cette partie, on désigne par x un réel strictement positif.

8. (a) Soit k un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\frac{1}{\mathrm{sh}\left((k+1)x\right)} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\mathrm{sh}\left(tx\right)}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\mathrm{sh}\left(kx\right)}$$

   (b) En déduire l'encadrement, valable pour tout n de $\mathbb{N}^\star$:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\mathrm{sh}\left(tx\right)}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{sh}\left(kx\right)} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{\mathrm{sh}\left(tx\right)}\mathrm{d}t + \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$$

9. (a) Montrer que la série de terme général $\frac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$ est convergente.
   (b) Établir, que pour tout réel x strictement positif, l'encadrement suivant :

$$-\frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)} \leqslant -\frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$$

   (c) En déduire, en utilisant certains résultats des parties précédentes, l'équivalent suivant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{x}$$

10. Compléter la fonction `Python` suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)}$ lorsque n et x sont passés en paramètres :

```python
def somme(n,x):
    S = 0
    for k in range(1,n+1):
        S = ...
    return S
```

Problème 4 - ECRICOME ECS 2016 (extrait)

Partie I

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, on note $I_{a,b}$ le réel défini par :

$$I_{a,b} = \int_0^1 x^a(1-x)^b \mathrm{d}x$$

et on note $f_{a,b}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} x^a(1-x)^b & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}.$$

1. (a) Calculer $I_{a,0}$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
   $$\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star,\ I_{a,b} = \frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}.$$
   (c) En déduire que :
   $$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2,\ I_{a,b} = \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!}.$$
   (d) Justifier que pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.
2. Dans toute la suite de cette partie, on fixe $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et on considère une variable aléatoire réelle X admettant $f_{a,b}$ pour densité. On dit que X **suit la loi *beta* de paramètres** a **et** b**.**
   (a) Montrer que X admet une espérance et que :
   $$E(X) = \frac{a+1}{a+b+2}.$$
   (b) Montrer que X admet une variance et que :
   $$V(X) = \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+3)(a+b+2)^2}.$$
   (c) Soit F la fonction définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (a+b+1)! \sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{x^k(1-x)^{a+b+1-k}}{k!(a+b+1-k)!} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$
   Montrer que F est la fonction de répartition de X.

Partie II

Soient a, b deux entiers strictement positifs. Une urne contient initialement a boules rouges et b boules blanches. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant consitutée des trois étapes suivantes :

- on pioche une boule au hasard dans l'urne,
- on replace le boule tirée dans l'urne,
- on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée.

Après n épreuves, l'urne contient donc $a+b+n$ boules.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note X_n le nombre de boules rouges qui ont été **ajoutés** dans l'urne (par rapport à la composition initiale) à l'issue des n premières épreuves.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on notera R_n l'événement « on pioche une boule rouge au n-ième tirage » .

3. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoires X_n en fonction de n.
4. On souhaite simuler l'expérience grâce à `Python`.

(a) Compléter la fonction suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant x boules rouges et y boules blanches et qui retourne la valeur 0 si la boule est rouge et 1 si elle est blanche.

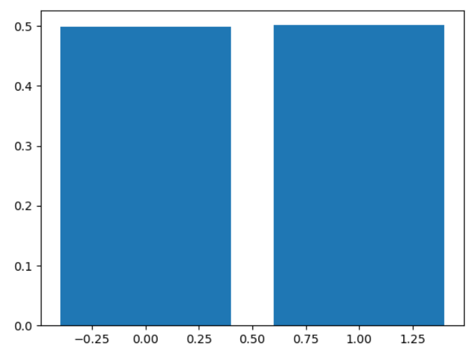
```python
def tirage(x,y):
    r = rd.random()
    if ... :
        res = 0
    else:
        res = 1
    return res
```

(b) Compléter la fonction suivante, qui simule n tirages successifs dans une urne contenant initialement a boules rouges et b boules blanches (selon le protocole décrit ci-dessus) et qui retourne la valeur de X_n :

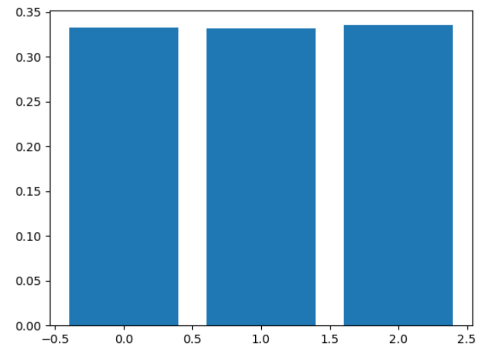
```python
def experience(a,b,n):
    x = a
    y = b
    for k in range(n):
        r = tirage(x,y)
        if r == 0:
            x = ...
        else:
            ...
    Xn = ...
    return Xn
```

(c) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulation(a,b,n,m):` qui fait appel m fois à la fonction précédente pour estimer la loi de X_n. La fonction renverra un tableau `numpy` conentant les approximations de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, ..., $P(X_n = n)$.

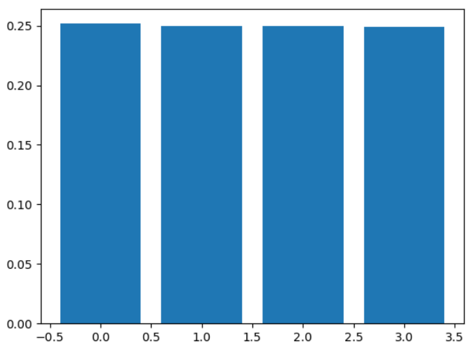
5. On s'intéresse ici au cas où $a = b = 1$. On utilise la fonction `simulation` avec des valeurs de n entre 1 et 5 et on affiche à chaque fois l'estimation de la loi de X_n sous forme d'un diagramme en « bâtons ».



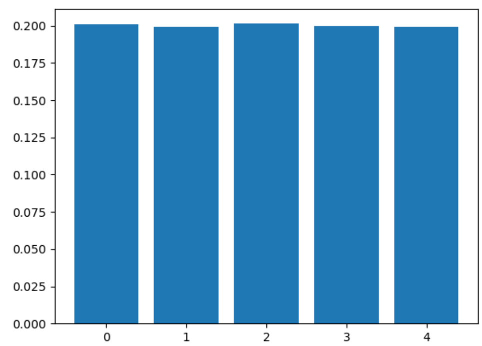
`simulation(1,1,1,100000)`



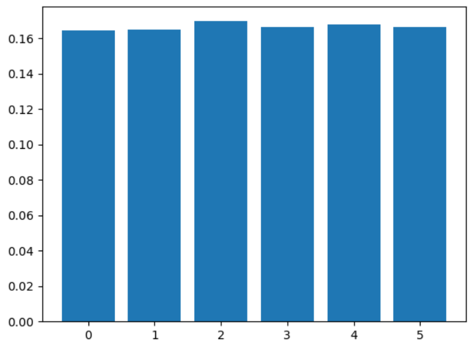
`simulation(1,1,2,100000)`



`simulation(1,1,3,100000)`



`simulation(1,1,4,100000)`



`simulation(1,1,5,100000)`

(a) À l'aide de ces résultats, conjecturer la loi de X_n.

(b) Déterminer la loi de X_1.

(c) Soient k et n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer les proobabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k+1), \ P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=\ell) \text{ avec } \ell \notin \{k,k+1\}.$$

(d) En raisonnant par récurrence sur n, prouver la conjecture émise au 5a.

6. On revient au cas général où a et b sont deux entiers strictement positifs.

(a) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Calculer la probabilité suivante :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \overline{R_{k+2}} \cap \cdots \cap \overline{R_n}).$$

(b) Justifier alors que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \ P(X_n=k) = \binom{n}{k} \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}.$$

(c) En déduire que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \ P(X_n=k) = \frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}.$$

(d) Calculer $E(a+X_n)$ puis en déduire que : $E(X_n) = \frac{na}{a+b}$.