CONCOURS BLANC 1 - CORRECTION

Exercice 1 - ECRICOME ECS 2022 (extrait)

1. (a) $F_{\mu,a}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f_{\mu,a}(x) &= F'_{\mu,a}(x) = -\left(-\frac{1}{a}\right)\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{a}\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right).} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} f'_{\mu,a}(x) &= -\frac{1}{a^2}\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right) + \left(\frac{1}{a}\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right)^2\exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{a^2}\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right)\left[\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)-1\right].} \end{aligned}$$

(b) On commence par remarquer que $f_{\mu,a}$ est positive sur $\mathbb{R}$ et donc $\boxed{F_{\mu,a} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$

Le signe de $f'_{\mu,a}$ est donc donné par le signe de $\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)-1$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)-1>0 &\Leftrightarrow \exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)>1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\mu-x}{a}>0 \\ &\Leftrightarrow \mu-x>0 \\ &\Leftrightarrow \mu>x. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{sur }]-\infty,\mu[,\ F_{\mu,a} \text{ est convexe}}$ et $\boxed{\text{sur }]\mu,+\infty[,\ F_{\mu,a} \text{ est concave.}}$

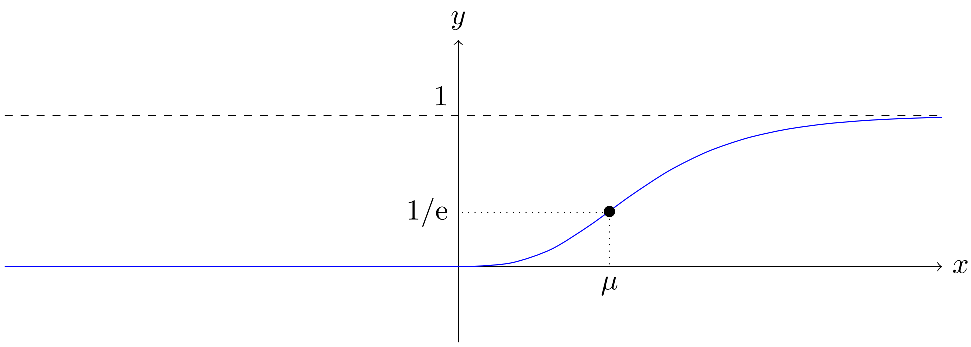
De plus on a :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} F_{\mu,a}(x) = \lim_{x\to-\infty}\exp\left(\underbrace{-\exp\left(\underbrace{\frac{\mu-x}{a}}_{\to+\infty}\right)}_{\to-\infty}\right)=0}$$

et :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F_{\mu,a}(x) = \lim_{x\to+\infty}\exp\left(\underbrace{-\exp\left(\underbrace{\frac{\mu-x}{a}}_{\to-\infty}\right)}_{\to0}\right)=1.}$$

On peut désormais tracer le graphe de $F_{\mu,a}$:



$\boxed{\text{Le point d'inflexion est en } \mu}$ d'après la discussion sur la convexité.

(c) $F_{\mu,a}$ est $\mathcal{C}^2$ donc continue, elle est également strictement croissante. D'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{c'est une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans }]0,1[}$ (d'après le calcul de limites précédent).

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned} F(x) = y \quad &\Leftrightarrow \quad exp\left(-\exp\left(-x\right)\right) = y \\ &\Leftrightarrow \quad -\exp\left(-x\right) = \ln(y) \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{x = -\ln(-\ln(y)).} \end{aligned}$$

Et donc G est la fonction définie par :

$$\boxed{G : \left\{ \begin{array}{rcl}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & -\ln(-\ln(y)) \end{array} \right. .}$$

2. On a déjà montré que $F_{\mu,a}$ est strictement croissante, qu'elle est continue et même $\mathcal{C}^1$ et que $\lim_{x\to-\infty} F_{\mu,a}(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F_{\mu,a}(x) = 1$. C'est donc une $\boxed{\text{fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.}}$

   En conséquence, sa dérivée $\boxed{f_{\mu,a} \text{ est une densité associée.}}$

3. $X = aZ + \mu$ est obtenue par transformation affine de Z. C'est donc une variable aléatoire réelle à densité. De plus, si on note F_X la fonction de répartition de X et F_Z celle de Z alors pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = F_Z\left(\frac{x-\mu}{a}\right) = \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu - x}{a}\right)\right)$$

   puisque $a > 0$. On reconnaît ici la fonction de répartition de la loi de Gumbel de paramètre (μ, a). Et donc on a bien $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{G}(\mu, a).}$

4. (a) On a $Y = G(U)$ où G est la réciproque de $F_{0,1}$. Comme G est continue, Y est bien une variable aléatoire réelle.

   De plus, en notant F_Y la fonction de répartition de Y, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leqslant x) = P(G(U) \leqslant x) \\ &= P(\underbrace{F_{0,1}(G(U))}_{=U} \leqslant F_{0,1}(x)). \end{aligned}$$

   Or $F_{0,1}(x) \in]0,1[$. Comme U suit une loi uniforme sur $[0,1]$, on a $P(U \leqslant F_{0,1}(x)) = F_{0,1}(x)$. D'où :

$$F_Y(x) = F_{0,1}(x).$$

   D'où $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}(0,1).}$

   (b)

```python
def gumbel(mu,a):
    U = rd.random() # tirage selon U([0,1])
    Y = -np.log(-np.log(U)) # Y suit G(0,1)
    Z = (Y - mu)/a # Z suit G(mu, a)
    return Z
```

5. (a) L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$.

   - **En $+\infty$:** On a pour tout $u \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\ln(u)\mathrm{e}^{-u} = \underbrace{\ln(u)\mathrm{e}^{-u/2}}_{\xrightarrow[u\to+\infty]{}0} \mathrm{e}^{-u/2} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}\right).$$

     Or $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}} du$ converge. Par négligeabilité, l'intégrale $\boxed{\int_1^{+\infty} \ln(u)\mathrm{e}^{-u} du \text{ converge}}$ (et même absolument).

- **En** 0 **:** On a :

$$\sqrt{u}\ln(u)\mathrm{e}^{-u} \underset{u\to 0^+}{\sim} \sqrt{u}\ln(u) \xrightarrow[u\to 0^+]{} 0.$$

Donc $\ln(u) = \underset{u\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$. Or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge (intégrale de Riemann convergente) et donc par négligeabilité, l'intégrale $\boxed{\int_0^1 \ln(u)\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \text{ converge}}$ (et même absolument).

Donc $\boxed{\int_0^{+\infty} \ln(u)\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \text{ converge.}}$

(b) On pose $\varphi : u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$. Cette application est strictement décroissante et $\mathcal{C}^1$. De plus :

$$\lim_{u\to+\infty} \varphi(u) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u\to 0} \varphi(u) = 1.$$

Donc, d'après le théorème de changement de variable, en posant $t = \mathrm{e}^u$, on a $\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$ et les intégrales suivantes ont même nature et sont égales en cas de convergence :

$$\int_0^1 \ln(-\ln(t))\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{+\infty}^0 \ln(-\ln(\mathrm{e}^{-u}))(-\mathrm{e}^{-u})\mathrm{d}u.$$

Or $\int_{+\infty}^0 \ln(-\ln(\mathrm{e}^{-u}))(-\mathrm{e}^{-u})\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \ln(u)\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$ est l'intégrale que l'on vient d'étudier.

$\boxed{\text{Donc les deux intégrales sont convergentes.}}$

(c) Z a une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{0,1}(x)\mathrm{d}x$ converge absolument.

On cherche à poser $u = \exp(-\exp(-x))$. Remarquons que :

$$u = \exp(-\exp(-x)) \Leftrightarrow -\ln(u) = \exp(-x) \Leftrightarrow x = -\ln(-\ln(u)).$$

Posons $\psi : u \mapsto -\ln(-\ln(u))$ définie sur $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cette fonction est strictement croissante (on reconnaît G qui est la bijection réciproque d'une fonction strictement croissante) et elle est $\mathcal{C}^1$. De plus :

$$\lim_{u\to 0} \psi(u) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{u\to 1} \psi(u) = +\infty.$$

Donc d'après le théorème de changement de variable, les intégrales suivantes ont même nature et sont égales en cas de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \exp(-x)\exp(-\exp(-x))\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^1 |-\ln(-\ln(u))| \exp(-(-\ln(-\ln(u))))u\left(-\frac{-\frac{1}{u}}{-\ln(u)}\right)\mathrm{d}u$$

Or $\exp(-(-\ln(-\ln(u)))) = -\ln(u)$. Donc la seconde intégrale se simplifie en : $\int_0^1 |\ln(-\ln(u))|\mathrm{d}u$.

De plus si $u \in]0, \frac{1}{\mathrm{e}}[$, on a $|\ln(-\ln(u))| = \ln(-\ln(u))$. Or $\int_0^1 \ln(-\ln(u))\mathrm{d}u$ converge donc $\int_0^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \ln(-\ln(u))\mathrm{d}u$ converge également.

De même, si $u \in]\frac{1}{\mathrm{e}}, 1[$, on a $|\ln(-\ln(u))| = -\ln(-\ln(u))$. Or $-\int_0^1 \ln(-\ln(u))\mathrm{d}u$ converge donc $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 (-\ln(-\ln(u)$ converge également.

Donc les deux intégrales convergent et donc $\boxed{Z \text{ admet une espérance.}}$

De plus :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\exp(-x)\exp(-\exp(-x))\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \ln(-\ln(t))\mathrm{d}t \boxed{= \gamma.} \end{aligned}$$

(d) Maintenant, on a $X = aZ + \mu$. Donc par linéarité de l'espérance, X admet une espérance et :

$$\boxed{E(X) = a\gamma + \mu.}$$

Exercice 2 - ECRICOME 2014 (adapté)

1. On sait que $F = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Montrons que E est un sous-espace de F.
   - On a bien $E \subset F$.
   - Soit f la fonction nulle. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$:
   $$f(x) = xP(x) + x\ln(x)Q(x)$$
   à condition de poser $P = Q = 0$ qui sont bien des polynômes de degré au plus $n-1$ (le degré du polynôme nul est $-\infty$). Donc $f \in E$ et E est non vide.
   - Soient $f, g \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut écrire :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f(x) = xP(x) + x\ln(x)Q(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ g(x) = x\tilde{P}(x) + x\ln(x)\tilde{Q}(x)$$
   où P, Q, $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ sont des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   On a pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$:
   $$\begin{aligned}(f+\lambda g)(x) &= f(x) + \lambda g(x)\\ &= xP(x) + x\ln(x)Q(x) + \lambda(x\tilde{P}(x) + x\ln(x)\tilde{Q}(x))\\ &= x(P(x) + \lambda\tilde{P}(x)) + x\ln(x)(Q(x) + \tilde{Q}(x))\end{aligned}$$
   et donc comme $P + \tilde{P}$ et $Q + \tilde{Q}$ sont dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $(f + \lambda g) \in E$.

   Donc E est un sous-espace de F et donc $\boxed{E \text{ est bien un espace vectoriel.}}$
   De plus, soit $f \in E$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$:
   $$f(x) = xP(x) + x\ln(x)Q(x)$$
   avec $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Or une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est donnée par $1, X, X^2, \dots, X^{n-1}$. On peut donc écrire :
   $$\begin{aligned}f(x) &= x(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) + x\ln(x)(b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1})\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k+1}\ln(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}u_k(x) + \sum_{k=1}^{n} b_{k-1}v_k(x)\end{aligned}$$
   et donc $f \in \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$. Ainsi $\boxed{E \subset \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n).}$
   Réciproquement, on a clairement $u_k \in E$ (avec $P = X^{k-1}$ et $Q = 0$) et $v_k \in E$ (avec $P = 0$ et $Q = X^{k-1}$).
   Donc $\boxed{E \text{ contient l'espace engendré } \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n).}$
   D'où $\boxed{E = \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n).}$
2. Soit $f \in E$. Notons :
   $$f(x) = xP(x) + x\ln(x)Q(x)$$
   avec $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée. Donc :
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \times P(0) + 0 \times Q(0) = 0.$$
   Ainsi $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité sur } \mathbb{R}_+ \text{ en posant } f(0) = 0.}$
   Soit maintenant $k \in [\![1, n]\!]$. On a pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$:
   $$\varphi(u_k)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^k \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \frac{x^k}{k+1} = \frac{1}{k+1}u_k(x)$$
   donc $\boxed{\varphi(u_k) = \frac{1}{k+1}u_k.}$
   Pour v_k, l'intégrale est généralisée 0, mais c'est en fait faussement improre. Cela dit, je vais détailler l'intégration par partie dans le cas généralisé, pour que la correction soit complète. Pour $\epsilon \in \mathbb{R}_+^\star$, on a :
   $$\begin{aligned}\int_\epsilon^x \underbrace{t^k}_{=u'(t)} \underbrace{\ln(t)}_{=v(t)} \mathrm{d}t &= \left[\underbrace{\frac{t^{k+1}}{k+1}}_{=u(t)} \underbrace{\ln(t)}_{=v(t)}\right]_\epsilon^x - \int_\epsilon^x \underbrace{\frac{t^{k+1}}{k+1}}_{=u(t)} \underbrace{\frac{1}{t}}_{=v'(t)} \mathrm{d}t\\ &= \frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \frac{\epsilon^{k+1}\ln(\epsilon)}{k+1} - \frac{1}{k+1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_\epsilon^x\\ &= \frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} - \frac{\epsilon^{k+1}\ln(\epsilon)}{k+1} + \frac{\epsilon^{k+1}}{(k+1)^2}.\end{aligned}$$

On a $\epsilon^{k+1}\ln(\epsilon) \xrightarrow[\epsilon\to 0^+]{} 0$ par croissance comparée et donc :

$$\int_0^x t^k \ln(t)\mathrm{d}t = \frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

Puis :

$$\varphi(v_k)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^k \ln(t)\mathrm{d}t = \frac{x^k\ln(x)}{k+1} - \frac{x^k}{(k+1)^2} = \frac{1}{k+1}v_k(x) - \frac{1}{(k+1)^2}u_k(x)$$

c'est-à-dire : $\boxed{\varphi(v_k) = \frac{1}{k+1}v_k - \frac{1}{(k+1)^2}u_k.}$

3. Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\begin{aligned}
\varphi(f+\lambda g)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x (f+\lambda g)(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x (f(t)+\lambda g(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \lambda\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right) = \varphi(f)(x)+\lambda\varphi(g)(x) \\
&= (\varphi(f)+\lambda\varphi(g))(x).
\end{aligned}$$

Il n'y a pas de problème de convergence puisque les fonctions de E sont prolongeables par continuité et donc les intégrales sont faussement impropres.
D'où $\boxed{\varphi(f+\lambda g) = \varphi(f)+\lambda\varphi(g).}$ Donc φ est linéaire.
Soit maintenant $f \in E$. On a :

$$f = a_1u_1 + b_1v_1 + \cdots + a_nu_n + b_nv_n$$

car $(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$ est une base de E et est donc génératrice. On a alors par linéarité de φ :

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &= a_1\varphi(u_1) + b_1\varphi(v_1) + \cdots + a_n\varphi(u_n) + b_n\varphi(v_n) \\
&= a_1\frac{1}{2}u_1 + b_1\left(\frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{4}u_1\right) + \cdots + a_n\frac{1}{n+1}u_n + b_n\left(\frac{1}{n+1}v_n - \frac{1}{(n+1)^2}u_n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(a_1 - \frac{b_1}{2}\right)u_1 + \frac{b_1}{2}v_1 + \cdots + \frac{1}{n+1}\left(a_n - \frac{b_n}{n+1}\right)u_n + \frac{b_n}{n+1}v_n \\
&\in \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi(f) \in E.}$

4. Les calculs de $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$ permettent de déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n+1} & -\frac{1}{(n+1)^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1}
\end{pmatrix}$$

C'est une matrice diagonale par bloc, chaque bloc correspondant à un couple (u_k, v_k).

5. La matrice obtenue est une matrice triangulaire supérieure. $\boxed{\text{Ces termes diagonaux sont } \{\frac{1}{k+1},\ k \in [\![1,n]\!]\}}$ et sont tous non nuls. Donc la matrice M est inversible.
En conséquence, $\boxed{\varphi \text{ est bijectif.}}$

6. g est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^\star$. En effet, comme f est continue (techniqument prolongeable par continuité), $x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ en est la primitive qui s'annule en 0.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a :

$$g'(x) = -\frac{1}{\lambda}x^{-1/\lambda-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + x^{-1/\lambda}f(x).$$

Or $\varphi(f) = \lambda f$ c'est-à-dire pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \lambda f(x).$$

Donc :

$$g'(x) = -\frac{1}{\lambda}x^{-1/\lambda-1}x\lambda f(x) + x^{-1/\lambda}f(x) = 0.$$

Donc $\boxed{g \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+^\star.}$ Ainsi il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\boxed{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = Kx^{1/\lambda}.}$$

Puis, en dérivant :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f(x) = \frac{K}{\lambda}x^{1/\lambda-1}.}$$

On peut encore écrire f de la forme $K'x^{1/\lambda-1}$ puisque la constante λ peut être réabsorbé dans K.

7. On vient de voir que pour $\lambda \neq 0$, une solution à $\varphi(f) = \lambda f$ est nécessairement de la forme : $f(x) = K'x^{1/\lambda-1}$.
Donc si f vérifie $\varphi(f) = \frac{1}{k+1}f$ alors nécessairement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f(x) = K'x^{1/(1/k+1)-1} = K'x^k = K'u_k(x)$.
Et on peut l'écrire : $f \in \mathrm{Vect}(u_k)$.
On a donc bien $\boxed{E_k \subset \mathrm{Vect}(u_k).}$
L'inclusion réciproque est vrai puisqu'on a déjà montré que $\varphi(u_k) = \frac{1}{k+1}u_k$. Donc : $\boxed{E_k = \mathrm{Vect}(u_k).}$
On en déduit :
$$\boxed{\dim E_k = 1}$$
puisque les u_k sont non nuls et forment donc tous individuellement des bases des $\mathrm{Vect}(u_k)$.
Pour les cubes : En conséquence, $\boxed{\varphi \text{ n'est pas diagonalisable}}$ puisque $\sum_{k=1}^n \dim E_k = n$ mais $\dim E = 2n$.

Problème 3 - EDHEC ECS 2022

1. Soit f une fonction définie et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.
Montrons que $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$.
On a pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\begin{aligned}\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} &= \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{x}\times x\right)}{\ln(x)} = \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{x}\right)+\ln(x)}{\ln(x)}\\ &= \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{x}\right)}{\ln(x)}+1.\end{aligned}$$

Or $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$ puisque $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$. Donc $\ln\left(\frac{f(x)}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. Puis $\frac{\ln\left(\frac{f(x)}{x}\right)}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. D'où :

$$\boxed{\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0+1 = 1.}$$

D'où $\boxed{\ln(f(x)) \underset{0^+}{\sim} \ln(x).}$

Partie I - deux nouvelles fonctions

2. (a) sh est définie sur $\mathbb{R}$ qui est bien symétrique autour de 0. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{sh}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-(-x)}}{2} = -\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2} = -\mathrm{sh}(x).$$

$\boxed{\text{sh est donc impaire.}}$

(b) Par opérations usuelles sur les fonctions, sh est dérivable. De plus pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{sh}'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - (-\mathrm{e}^{-x})}{2} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x).$$

En particulier, comme somme de quantités strictement positives, ch est strictement positive. Donc $\boxed{\text{sh est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$		$+$	
sh		$\nearrow$	

(c) Faisons un développement limité à l'ordre 1 en 0. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x) - (1 - x + \underset{x\to 0}{o}(x))}{2} = x + \underset{x\to 0}{o}(x).$$

Donc $\boxed{\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.}$

3. (a) ch est défini sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{ch}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-(-x)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2} = \mathrm{ch}(x).$$

$\boxed{\text{ch est donc paire.}}$

(b) Par opérations usuelles sur les fonctions, ch est dérivable. De plus pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}'(x) = \frac{\mathrm{e}^x + (-\mathrm{e}^{-x})}{2} = \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x).$$

De plus, $\mathrm{sh}(0) = \frac{\mathrm{e}^0\mathrm{e}^{-0}}{2} = 0$. Or, on a montré que sh est strictement croissante. Donc $\mathrm{sh}(x) > 0$ si $x > 0$ et $\mathrm{sh}(x) < 0$ si $x < 0$.

ch atteint donc un minimum en 0 et on a :

$$\mathrm{ch}(0) = \frac{\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-0}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
ch		$\searrow$	1	$\nearrow$	

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ch}(x))^2 - (\mathrm{sh}(x))^2 &= \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x} - (\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x})}{4} \\
&= \frac{4}{4} \boxed{= 1.}
\end{aligned}$$

Partie II - une troisième fonction

5. (a) $\boxed{\text{th est bien définie sur } \mathbb{R}}$ puisque ch, puisque d'après le tableau de variation précédent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1$ et donc en particulier $\mathrm{ch}(x) \neq 0$.

(b) On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{th}(-x) = \frac{\mathrm{sh}(-x)}{\mathrm{ch}(-x)} = \frac{-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = -\mathrm{th}(x).$$

Donc $\boxed{\text{th est impaire.}}$

(c) th est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{sh}'(x)\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}'(x)}{(\mathrm{ch}(x))^2} = \frac{(\mathrm{ch}(x))^2 - (\mathrm{sh}(x))^2}{(\mathrm{ch}(x))^2} \boxed{= \frac{1}{(\mathrm{ch}(x))^2}.}$$

Notons que l'on peut aussi l'écrire $\mathrm{th}'(x) = 1 - (\mathrm{th}(x))^2$.

La dérivée de th est ainsi toujours strictement positive et donc $\boxed{\text{th est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

(d) On a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{th}(x) &= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}}{\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^x(1 - \mathrm{e}^{-2x})}{\mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^{-2x})} \\ &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}. \end{aligned}$$

Et donc $\boxed{\mathrm{th}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.}$

Par imparité, on a également $\boxed{\mathrm{th}(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1.}$

On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$ $+\infty$
$\mathrm{th}'(x)$	$+$
th	$-1 \nearrow 1$

6. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\frac{a\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} + \frac{b\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{a\mathrm{e}^{-x}(1 + \mathrm{e}^{-x}) + b\mathrm{e}^{-x}(1 - \mathrm{e}^{-x})}{(1 - \mathrm{e}^{-x})(1 + \mathrm{e}^{-x})} = \frac{(a+b)\mathrm{e}^{-x} + (a-b)\mathrm{e}^{-2x}}{1 - \mathrm{e}^{-2x}}.$$

D'autre part, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\frac{1}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{2}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \frac{2}{\mathrm{e}^x(1 - \mathrm{e}^{-2x})} = \frac{2\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-2x}}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{a\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} + \frac{b\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ 2\mathrm{e}^{-x} = (a+b)\mathrm{e}^{-x} + (a-b)\mathrm{e}^{-2x} \\ &Leftrigharrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ 2 = (a+b) + (a-b)\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Clairement, on a $a + b = 2$ et $a - b = 0$ implique $2 = (a+b) + (a-b)\mathrm{e}^{-x}$. La réciproque est également vraie. En effet, en dérivant, on obtient $-(a-b)\mathrm{e}^{-x}$ ce qui implique $a - b = 0$ et en réinjectant, on trouve bien $a + b = 2$.

On résout donc :

$$\begin{cases} a+b &= 2 \\ a-b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 1 \end{cases}.$$

D'où il existe une unique solution au problème à savoir $\boxed{a = b = 1.}$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{1}{\mathrm{sh}(t)}\mathrm{d}t &= \int_1^x \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[\ln|1-\mathrm{e}^{-t}| - \ln|1+\mathrm{e}^{-t}|\right]_1^x \\
&= \ln\left|\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right| - \ln\left|\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{1+\mathrm{e}^{-1}}\right| \\
&= \ln\left|\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)}\right| - \ln\left|\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{1+\mathrm{e}^{-1}}\right| \\
&= \ln\left|\mathrm{th}\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{1+\mathrm{e}^{-1}}\right| \\
&= \ln\left(\mathrm{th}\frac{x}{2}\right) - \ln\left|\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{1+\mathrm{e}^{-1}}\right| \\
&\ \text{(car th est positive sur } \mathbb{R}_+^\star\text{)}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{les primitives de } \frac{1}{\mathrm{sh}} \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto \ln\left(\mathrm{th}\frac{x}{2}\right) + K \text{ où } K \in \mathbb{R}.}$

7. On sait $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et comme $\mathrm{ch}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \neq 0$, on a également $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.

Donc :

$$\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x/2}{1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}.$$

D'après le résultat préliminaire, on a :

$$\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln\frac{x}{2}.$$

De plus :

$$\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln(x) - \underbrace{\ln(2)}_{\underset{x\to 0}{=} o(\ln(x))} \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x).$$

D'où $\boxed{\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x).}$

Partie III - une série convergente

8. (a) $x > 0$ étant fixé, on pose $f : t \mapsto \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}$.

Par opérations usuelles sur les fonctions, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Et pour $t \in \mathbb{R}_+^\star$, on a :

$$f'(t) = -\frac{x\overbrace{\mathrm{ch}(tx)}^{\geqslant 1}}{(\mathrm{sh}(tx))^2} < 0.$$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Donc pour $k \in \mathbb{N}^\star$ et $t \in [k, k+1]$, on a :

$$\frac{1}{\mathrm{sh}((k+1)x)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)}.$$

Et par croissance de l'intégrale, on a donc $\int_k^{k+1} \frac{1}{\mathrm{sh}((k+1)x)}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)}\mathrm{d}t$ et ainsi :

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{sh}((k+1)x)} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)}.}$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, sommons de 1 à n l'inégalité précédente de droite. On obtient :

$$\boxed{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}\mathrm{d}t}_{=\int_1^{n+1} \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}\mathrm{d}t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)}.}$$

Pour l'inégalité de gauche, on la somme de 1 à $n-1$ pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}\mathrm{d}t}_{=\int_1^{n} \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}\mathrm{d}t}.$$

Remarquons que $\frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$ (par décroissance de la fonction f de la question précédente). Donc en sommant les inégalités :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}\mathrm{d}t + \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}.}$$

9. (a) On a $\frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\mathrm{e}^{nx} - \underbrace{\mathrm{e}^{-nx}}_{=\underset{n\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{nx})}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\mathrm{e}^{nx}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\mathrm{e}^{-nx}$.

Or la série $\sum_{n=1}^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-nx}$ converge car il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raion $\mathrm{e}^{-x} \in]0,1[$. Donc par équivalence sur des séries de termes généraux positifs, on a : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \text{ converge.}}$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculons explicitement :

$$\int_1^n \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{x}\ln \mathrm{th}\frac{tx}{2}\right]_1^n = \frac{\ln\left(\mathrm{th}\frac{nx}{2}\right) - \ln\left(\mathrm{th}\frac{x}{2}\right)}{x}.$$

Puis quand $n \to +\infty$, on a $\mathrm{th}\frac{nx}{2} \to 1$. D'où :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(tx)}\mathrm{d}t = \frac{\ln(1) - \ln\left(\mathrm{th}\frac{x}{2}\right)}{x} = -\frac{\ln\left(\mathrm{th}\frac{x}{2}\right)}{x}$$

et l'intégrale est bien convergente.
Donc, par encadrement, on a :

$$\boxed{-\frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)} \leqslant -\frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}.}$$

(c) Commençons par remarquer que au voisinage de 0^+, $-\frac{\ln x}{x}$ est strictement positif. On peut donc diviser l'inégalité précédente :

$$\frac{-\frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{-\frac{\ln x}{x}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)}}{-\frac{\ln x}{x}} \leqslant \frac{-\frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}}{-\frac{\ln x}{x}}.$$

On peut légèrement simplifier en :

$$\frac{\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\ln x} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(kx)}}{-\frac{\ln x}{x}} \leqslant \frac{\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x)} - \frac{x}{\ln(x)\mathrm{sh}(x)}.$$

Or, on a déjà montré que $\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{x\to0^+}{\sim} \ln(x)$. Donc :

$$\frac{\ln\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\ln x} \xrightarrow[x\to0^+]{} 1.$$

D'autre part :

$$\frac{x}{\ln(x)\mathrm{sh}(x)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x}{\ln(x)x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

Et donc par encadrement, on a :

$$\frac{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{sh}(kx)}}{-\frac{\ln x}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{sh}(nx)} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{x}.}$$

10.

```python
def somme(n,x):
    S = 0
    for k in range(1,n+1):
        S = S + 2/(np.exp(k*x) - np.exp(-k*x))
    return S
```

Problème 4 - ECRICOME ECS 2016 (extrait)

Partie I

1. (a) Soit $a \in \mathbb{N}$. On a :

$$\boxed{I_{a,0} = \int_0^1 x^a(1-x)^0\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \frac{1}{a+1}.}$$

(b) Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\begin{aligned}
I_{a,b} &= \int_0^1 \underbrace{x^a}_{=u'(x)}\underbrace{(1-x)^b}_{=v(x)}\mathrm{d}x \\
&\underset{\text{IPP}}{=} \left[\underbrace{\frac{x^{a+1}}{a+1}}_{=u(x)}\underbrace{(1-x)^b}_{=v(x)}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\frac{x^{a+1}}{a+1}}_{=u(x)}\underbrace{(-b)(1-x)^{b-1}}_{=v'(x)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1^{a+1}}{a+1}\times 0^b - \frac{0^{a+1}}{a+1}\times 1^b + \frac{b}{a+1}\int_0^1 x^{a+1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x \boxed{= I_{a+1,b-1}.}
\end{aligned}$$

(c) Procédons par récurrence sur $b \in \mathbb{N}$. Pour cela, posons pour tout $b \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_b \ : \ « \forall a \in \mathbb{N},\ I_{a,b} = \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!} ».$$

- **Initialisation :** On considère $b = 0$. Pour tout $a \in \mathbb{N}$, on a d'une part :

$$I_{a,b} = I_{a,0} \boxed{= \frac{1}{a+1}}$$

et d'autre part :

$$\frac{a! \times b!}{(a+b+1)!} = \frac{a! \times 0!}{(a+0+1)!} \boxed{= \frac{1}{a+1}.}$$

Donc, on a bien pour tout $a \in \mathbb{N}$, $I_{a,b} = \frac{a!\times b!}{(a+b+1)!}$ lorsque $b = 0$. Donc $\boxed{\mathcal{H}_0 \text{ est vrai.}}$

- **Hérédité :** Soit $b \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $a \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{a,b} = \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!}$$

Soit maintenant $a \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} I_{a,b+1} &= \frac{b+1}{a+1} I_{a+1,(b+1)-1} = \frac{b+1}{a+1} I_{a+1,b} \\ &= \frac{b+1}{a+1} \times \frac{(a+1)! \times b!}{((a+1)+b+1)!} \boxed{= \frac{a!(b+1)!}{(a+(b+1)+1)!}.} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{H}_{b+1} \text{ est vraie.}}$

Ainsi par récurrence sur $b \in \mathbb{N}$, on a bien :

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2,\ I_{a,b} = \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!}.}$$

(d) Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Montrons que $f_{a,b}$ est une densité.

- $f_{a,b}$ est bien une fonction $\boxed{\text{positive sur } \mathbb{R}.}$
- Par opérations usuelles sur les fonctions, $\boxed{f_{a,b} \text{ est bien } \mathcal{C}^0 \text{ sauf éventuellement en 0 et en 1.}}$
- Comme $f_{a,b}$ est nulle en dehors de $[0,1]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)\mathrm{d}x$ converge et est en fait une intégrale sur un segment.
  On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 f_{a,b}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} x^a (1-x)^b \\ &= \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} I_{a,b} = \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} \times \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!} \boxed{= 1.} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f_{a,b} \text{ est bien une densité.}}$

2. (a) X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{a,b}(x)\mathrm{d}x$ converge absolument.
Comme $f_{a,b}(x) = 0$ si $x \notin [0,1]$, l'intégrale est en fait sur un segment et il n'y a pas de problème de convergence. Donc X admet une espérance.
De plus :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{a,b}(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x \times \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} x^a (1-x)^b \mathrm{d}x \\ &= \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} \int_0^1 x^{a+1}(1-x)^b \mathrm{d}x \\ &= \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} I_{a+1,b} \\ &= \frac{(a+b+1)!}{a! \times b!} \times \frac{(a+1)! \times b!}{((a+1)+b+1)!} \boxed{= \frac{a+1}{a+b+2}.} \end{aligned}$$

(b) De même, X admet un moment d'ordre 2 (toutes les intégrales sont sur des segments) et :

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{a,b}(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2 \times \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!} x^a(1-x)^b\mathrm{d}x \\
&= \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}\int_0^1 x^{a+2}(1-x)^b\mathrm{d}x \\
&= \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!} I_{a+2,b} \\
&= \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!} \times \frac{(a+2)!\times b!}{((a+2)+b+1)!} \boxed{= \frac{(a+1)(a+2)}{(a+b+3)(a+b+2)}.}
\end{aligned}$$

D'après la formule de Huygens, X admet donc une variance et :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2)-E(X)^2 = \frac{(a+1)(a+2)}{(a+b+3)(a+b+2)} - \left(\frac{a+1}{a+b+2}\right)^2 \\
&= \frac{(a+1)(a+2)(a+b+2)-(a+1)^2(a+b+3)}{(a+b+3)(a+b+2)^2} \\
&= \frac{(a+1)\left(a^2+ab+4a+2b+4-(a^2+ab+4a+b+3)\right)}{(a+b+3)(a+b+2)^2} \\
&= \boxed{\frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+3)(a+b+2)^2}.}
\end{aligned}$$

(c) Commençons par vérifions que F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité (pas nécessairement X).

- F est continue sur $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ séparément par opérations usuelles sur les fonctions. De plus $\lim_{x\to 0^-} F(x) = 0 = F(0)$ donc F est continue en 0.
  F est également continue en 1. Il faut cependant faire attention dans le calcul :

$$F(1) = (a+b+1)!\sum_{k=a+1}^{a+b+1}\frac{1^k \overbrace{0^{a+b+1-k}}^{=0 \text{ si } a+b+1-k\neq 0}}{k!(a+b+1-k)!} = (a+b+1)!\frac{1}{(a+b+1)!} = 1 = \lim_{x\to 1^+} F(x).$$

- F est $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0 et en 1.
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
- F est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$ (de dérivées nulles) ainsi que sur $]0,1[$. De plus pour $x\in]0,1[$:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (a+b+1)!\sum_{k=a+1}^{a+b+1}\left(\frac{kx^{k-1}(1-x)^{a+b+1-k}}{k!(a+b+1-k)!}+\frac{x^k(-1)(a+b+1-k)(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b+1-k)!}\right) \\
&= (a+b+1)!\sum_{k=a+1}^{a+b}\left(\frac{x^{k-1}(1-x)^{a+b-(k-1)}}{(k-1)!(a+b-(k-1))!}-\frac{x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b-k)!}\right)+\frac{x^{a+b}}{(a+b+1)!} \\
&\quad \text{(dernier terme séparé pour éviter de diviser par 0)} \\
&= (a+b+1)!\left[\frac{x^{(a+1)-1}(1-x)^{a+b-(a+1-1)}}{(a+1-1)!(a+b-(a+1-1))!}-\frac{x^{a+b}}{(a+b+1)!}+\frac{x^{a+b}}{(a+b+1)!}\right] \\
&= \frac{(a+b+1)!}{a!b!}x^a(1-x)^b \boxed{= f_{a,b}(x).}
\end{aligned}$$

  Comme $f_{a,b}$ est positive, F est bien croissante.

Donc F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. De plus comme F' coïncide avec $f_{a,b}$ (sauf en 0 et en 1 où F n'est pas *a priori* dérivable), $\boxed{\text{c'est bien la fonction de répartition de } X.}$

Partie II

3. $\boxed{X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]}$ puisque l'on met au plus une boule rouge pour chacun des n tirages.

4. (a)

```python
def tirage(x,y):
    r = rd.random()
    if r < x/(x+y) :
        res = 0
    else:
        res = 1
    return res
```

(b)

```python
def experience(a,b,n):
    x = a
    y = b
    for k in range(n):
        r = tirage(x,y)
        if r == 0:
            x = x+1
        else:
            y = y+1
    Xn = x-a
    return Xn
```

(c)

```python
def simulation(a,b,n,m):
    loi = np.zeros(n+1)
    for i in range(m):
        Xn = experience(a,b,n)
        loi[Xn] = loi[Xn] + 1
    loi = loi/m
    return loi
```

5. (a) **Conjecture :** $\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!]).}$

(b) On a $X_1(\Omega) = [\![0, 1]\!]$. Il faut donc calculer $P(X_1 = 0)$ et $P(X_1 = 1)$.
On a :

$$P(X_1 = 1) = P(R_1) = \frac{a}{a+b} = \frac{1}{2}.$$

On a donc $P(X_1 = 0) = 1 - P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$.

Ainsi $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, 1]\!])}$ (qui est aussi la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$).

(c) Soient k et n tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.
Si $X_n = k$, on a déjà tiré k boules rouges et $n-k$ boules blanches. Il y a donc $n+2$ boules au total dans l'urne. Si $X_{n+1} = k$ alors on a tiré une boule blanche, c'est-à-dire R_{n+1} n'a **pas** été réalisé. Et on peut déterminer la probabilité en comptant les boules dans l'urne et le nombre de boules blanches. On a :

$$\boxed{P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = P_{[X_n=k]}(\overline{R_{n+1}}) = \frac{n-k+1}{n+2}.}$$

De même, si $X_{n+1} = k+1$ alors R_{n+1} a été réalisé et donc :

$$\boxed{P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k+1) = P_{[X_n=k]}(R_{n+1}) = \frac{k+1}{n+2}.}$$

Et enfin puisque $P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k)+P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k+1)=1$, nécessairement :

$$\boxed{P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=\ell)=0}$$

pour $\ell\notin\{k,k+1\}$.

(d) Procédons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^\star$.

- **Initialisation :** Le cas $X_1\hookrightarrow\mathcal{U}(\llbracket 0,1\rrbracket)$ a déjà été traité.
- **Hérédité :** Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. On suppose $X_n\hookrightarrow\mathcal{U}(\llbracket 0,n\rrbracket)$. Montrons que $X_{n+1}\hookrightarrow\mathcal{U}(\llbracket 0,n+1\rrbracket)$.
  Soit $k\in\llbracket 0,n+1\rrbracket$. L'ensemble $\{[X_n=i]\}_{i\in\llbracket 0,n\rrbracket}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X_{n+1}=k)=\sum_{i=0}^{n}P(X_n=i)P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=k)$$

  Distinguons deux cas. Si $k=0$, on a :

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=0) &= \sum_{i=0}^{n}P(X_n=i)P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=0)=P(X_n=0)P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=0)\\ &= \frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

  Si $k>0$, on a :

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=k) &= \sum_{i=0}^{n}P(X_n=i)P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=k)\\ &= P(X_n=k)P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k)+P(X_n=k-1)P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k)\\ &= \frac{1}{n+1}\times\frac{n-k+1}{n+2}+\frac{1}{n+1}\times\frac{k-1+1}{n+2}=\frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

  Donc $\boxed{X_{n+1}\hookrightarrow\mathcal{U}(\llbracket 0,n+1\rrbracket).}$

Et donc par récurrence sur n, on a bien $\boxed{X_n\hookrightarrow\mathcal{U}(\llbracket 0,n\rrbracket)}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$.

6. (a) D'après la formule des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned}&P(R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_k\cap\overline{R_{k+1}}\cap\overline{R_{k+2}}\cap\cdots\cap\overline{R_n})\\ =\ & P(R_1)P_{R_1}(R_2)\cdots P_{R_1\cap R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}(R_k)P_{R_1\cap R_1\cap\cdots\cap R_k}(\overline{R_{k+1}})\cdots P_{R_1\cap R_1\cap\cdots\cap R_k\cap\overline{R_{k+1}}\cap\cdots\overline{R_{n-1}}}(\overline{R_n})\\ =\ & \frac{a}{a+b}\times\frac{a+1}{a+b+1}\times\cdots\times\frac{a+k-1}{a+b+k-1}\times\frac{b}{a+b+k}\times\cdots\times\frac{b+(n-k)-1}{a+b+n-1}\\ =\ & \boxed{\frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}.}\end{aligned}$$

(b) On vient de calculer la probabilité de tirer k boules rouges en premier puis $n-k$ boules blanches. Mais n'importe quel tirage de k boules rouges et $n-k$ boules blanches aura la même probabilité (calcul fastidieux mais quasi-identitique au précédent). Il y a $\binom{n}{k}$ manières de tirer k boules rouges et $n-k$ boules blanches. Et donc la probabilité de tirer k boules rouges et $n-k$ boules blanches sans ordre particulier est bien :

$$\boxed{P(X_n=k)=\binom{n}{k}\frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}.}$$

(c) Calculons :

$$\begin{aligned}P(X_n=k) &= \binom{n}{k}\frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}.\end{aligned}$$

Parallèlement :

$$\frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} = \frac{\frac{(a+k-1)!}{(a-1)!(a+k-1-(a-1))!}\frac{(b+n-k-1)!}{(b-1)!(b+n-k-1-(b-1))!}}{\frac{(a+b+n-1)!}{(a+b-1)!(a+b+n-1-(a+b-1))!}}$$

$$= \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!n!}{(a-1)!k!(b-1)!(n-k)!(a+b+n-1)!}\boxed{=P(X_n=k).}$$

(d) Le support de X_n est fini, donc il n'y a pas de problème de convergence.
De plus d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(X_n+a) &= \sum_{k=0}^{n}(k+a)P(X_n=k) = \sum_{k=0}^{n}(k+a)\frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \\ &= \frac{1}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{(k+a)\binom{a+k-1}{a-1}}_{=a\binom{a+k}{a}}\binom{b+n-k-1}{b-1} \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule dite du capitaine $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ qui peut se retrouver rapidement au brouillon.
Pour conclure, il faut se rendre compte que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}P(X_n=k) = 1$$

peut s'écrire : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} = 1$ et cela est valable pour tout a.

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{a+k}{a}\binom{b+n-k-1}{b-1} = \binom{a+b+n}{a+b}.$$

D'où enfin :

$$\boxed{E(X_n+a) = a\frac{\binom{a+b+n}{a+b}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} = a\frac{(a+b-1)!n!}{(a+b+n-1)!}\frac{(a+b+n)!}{n!(a+b)!} = \frac{a(a+b+n)}{a+b}.}$$

Puis par linéarité de l'espérance :

$$\boxed{E(X_n) = E(X_n+a-a) = \frac{a(a+b+n)}{a+b} - a = \frac{na}{a+b}.}$$