TP4b - Méthode d'inversion

Dans tout le TP, on importe les modules suivants :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

1 Applications de la méthode d'inversion

Exercice 1 - Loi de Cauchy ⋆⋆⋆

La loi de Cauchy est la loi donnée par la densité définie sur $\mathbb{R}$ suivante : $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

1. Vérifier que la fonction donnée est bien une densité de probabilité.
2. Calculer la fonction de répartition associée.
3. Montrer alors que si $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ alors $X = \tan\left[\pi\left(Y - \frac{1}{2}\right)\right]$ suit une loi de Cauchy.
4. Compléter le code Python suivant afin qu'il simule un tirage d'une variable suivant une loi de Cauchy :

```
def cauchy():
  y = rd.random()
  x = ...
  return x
```

Exercice 2 - Loi de Poisson ⋆⋆⋆

Dans le cas discret, nous n'avons utilisé la méthode d'inversion que pour des lois à univers image fini. On va essayer ici de généraliser la technique à des cas de variable discrète pouvant prendre une infinité de valeur en étudiant le cas de la loi de Poisson.

1. Chercher à placer des points sur le segment $[0,1]$ de manière analogue au cas fini de l'exercice 4 du TP précédent pour pouvoir simuler une loi de Poisson.
2. On part du code suivant :

```
def new_poisson(mu):
  y = rd.random()
  k = 0
  u = np.exp(-mu)
  s = u
  while s < y:
    k = k+1
    u = u*mu/k
    s = s+u
  return k
```

   (a) Que représente la variable `y` ?
   (b) Que représente la variable `u` ?
   (c) Que représente la variable `s` ?
   (d) À quoi sert la condition `s < y` dans la boucle ?

Exercice 3 ⋆⋆⋆

Simuler une loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ par la méthode d'inversion sans utiliser de boucle.

Exercice 4 - Loi de Rayleigh ⋆⋆⋆⋆

Soit $\sigma > 0$ (comment se prononce cette lettre ?). On pose la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{1}{\sigma^2} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}$.

1. Montrer que f est une densité.
2. Donner la fonction de répartition F associée.
3. Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $]0, 1[$.
4. En déduire une fonction `Python` permettant de simuler la loi donnée par f en utilisant la méthode d'inversion.
5. X suit la loi de densité f, quelle est la loi de $Y = X^2$?

2 Travail à préparer pour le prochain TP

Exercice 5 - C'est sans espérance ⋆⋆⋆

On a vu dans le cours que la loi de Cauchy n'admet pas d'espérance (seriez-vous capable de le redémontrer ?). On va chercher ici à le visualiser.
On réutilise la fonction `cauchy` définie à l'exercice 1.

1. On part du code suivant :

```python
def serie_cauchy(n):
  A = np.zeros(n)
  for i in range(n):
    A[i] = cauchy()
  return A
```

   Que fait-il ?

2. On complète le code de la manière suivante :

```python
def serie_cauchy(n):
  A = np.zeros(n)
  for i in range(n):
    A[i] = cauchy()
  B = np.cumsum(A) / np.arange(1,n+1)
  return A,B
```

   (a) Rappeler ce que fait l'instruction `np.cumsum`.
   (b) Que fait l'opération `/` entre deux tableaux `numpy` ?
   (c) Que contient donc le tableau `B` à la fin de la fonction ?

3. On utilise la fonction précédente dans le code suivant :

```python
import matplotlib.pyplot as plt

serie, moyennes = serie_cauchy(10000)
plt.plot(moyennes)
plt.show()
```

   (a) Rappeler le rôle de `plt.plot` et `plt.show`.
   (b) Exécuter les instructions `Python` sur un ordinateur. Qu'observe-t-on ? Comment interpréter cela vis-à-vis de l'espérance de la loi de Cauchy ? Au besoin comparer avec le même graphe pour une loi exponentielle.