TD7 - Réduction des endomorphismes

1 Valeurs propres, vecteurs propres

Exercice 1 ⋆

Déterminer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 - Vers la diagonalisation ⋆⋆

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de A et les dimensions des sous-espaces propres associés.
   Montrer qu'il existe une base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A et déterminer la matrice de l'endomorphisme $f_A : X \mapsto AX$ dans cette base.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que B est semblable à une matrice diagonale que l'on précisera.

Exercice 3 - La matrice J ⋆⋆

Soit $n \geq 2$ et soit $J_n \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. On note $V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer le rang de J_n. En déduire que $0 \in \mathrm{Sp}(J_n)$ et déterminer $\dim E_0(J_n)$.
2. Calculer J_nV et en déduire une valeur propre non nulle de J_n ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.
3. Montrer que J_n ne possède que deux valeurs propres.
4. Montrer que J_n est semblable à une matrice diagonale dont on précisera les coefficients diagonaux.

Exercice 4 ⋆⋆

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$ non nul. Montrer que x est un vecteur propre de f si et seulement si $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f.

Exercice 5 ⋆⋆

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la somme des coefficients de chaque ligne de A soit égale à λ.
   Montrer que λ est valeur propre de A et que le vecteur $V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
2. On suppose à présent que la somme des coefficients de chaque colonne de A est égale à λ. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 6 ⋆⋆⋆

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A et B ont même rang, même trace, même valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension.
2. Calculer $(A - 2I_4)^2$ et $(B - 2I_4)^2$. En déduire que A et B ne sont pas semblables.

Exercice 7 ⋆⋆⋆

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 4)$. On pose $M = \begin{pmatrix} 2X & 1 \\ -4 & X \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que M admette 2 valeurs propres distinctes.

2 Valeurs propres d'endomorphismes

Exercice 8 ⋆⋆

Soit f l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = {}^tM$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 9 ⋆⋆

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g.

Exercice 10 ⋆⋆

Soit f un endomorphisme de E et λ une valeur propre non nulle de f. Montrer que $E_\lambda(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 11 ⋆⋆⋆

Soit f un endormorphisme de $\mathbb{R}^n$ de rang 1. Montrer que l'un au moins des endomorphismes $f - \mathrm{Id}$ et $f + \mathrm{Id}$ est bijectif.

Exercice 12 ⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.

Exercice 13 - D'après EDHEC 2009 ⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $f : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \to \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ l'application qui à un polynôme P associe $X^{2n+1} P\left(\frac{1}{X}\right)$.

1. Montrer que f est un endormorphisme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$.
2. Calculer $f(1+X^{2n+1})$ et en déduire que 1 est valeur propre de f. De même, calculer $f(1 - X^{2n+1})$ et en déduire une valeur propre λ de f.
3. Soit $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$.
   (a) Montrer que $P \in E_1(f)$ si et seulement si pour tout $k \in [\![0, 2n+1]\!]$, $a_k = a_{2n+1-k}$.
   (b) En déduire une base et la dimension de $E_1(f)$.
4. De même, déterminer une base et la dimension de $E_\lambda(f)$ où λ est la valeur propre trouvée à la question 2.
5. Déterminer $\mathrm{Sp}(f)$.

Exercice 14 - Polynômes d'Hermite ⋆⋆⋆

Soient $n \geq 2$ et $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $\varphi(P) = 2XP' - P''$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire les valeurs prorpes de φ et la dimension de ses sous-espaces propres.
3. Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme unitaire H_p tel que $H_p'' - 2XH_p' + 2pH_p = 0$.
4. Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, H_p est de degré p.

Exercice 15 ⋆⋆⋆

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$ et soit $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les valeurs propres de f et la dimension des sous-espaces propres associés.

3 Réduction et diagonalisation

Exercice 16 ⋆

Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables et le cas échéant les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -4 & 9 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 ⋆

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ne possédant qu'une seule valeur propre. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 18 ⋆⋆

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A ? On pourra distinguer plusieurs cas suivant les valeurs de a.
2. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 19 ⋆⋆

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ et soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = (X - \alpha)P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. f est-il diagonalisable ?

Exercice 20 ⋆⋆

Soit $n \geq 2$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = P'$.

1. Montrer que $f^{n+1} = 0$ et que $f^n \neq 0$. On dit que f est nilpotent d'indice $n+1$.
2. En déduire les valeurs propres de f. Est-il diagonalisable ?
3. Soit $g : P \mapsto P - P'$. Exprimer g en fonction de f et en déduire que g est bijectif.
4. Montrer que $g^{-1} = \mathrm{Id} + f + f^2 + \cdots + f^n$.

Exercice 21 - D'après EDHEC 2005 ⋆⋆

1. Déterminer la dimension de $\ker(\mathrm{Tr})$. En déduire que $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.
2. Soit f l'application définie sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)I_n$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) En utilisant la question 1, montrer que f est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

Exercice 22 - Suite récurrente linéaire ⋆⋆

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. Montrer que A est diagonalisable.
4. En déduire qu'il existe trois réels λ, μ et ν tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda + \mu(-1)^n + \nu 2^n$.
5. Déterminer le terme général de (u_n).

Exercice 23 ⋆⋆⋆

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = P(aX + b)$.

1. Déterminer les valeurs propres de u.
2. Montrer que si $a \notin \{-1, 1\}$ alors u est diagonalisable.
3. Si $a = 1$, quelles sont les valeurs de b pour lesquelles u est diagonalisable ?
4. On suppose à présent que $a = -1$.
   (a) Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, calculer $u^2(P)$. En déduire un polynôme annulateur de u et retrouver alors les valeurs propres de u.
   (b) Montrer que $p = \frac{\mathrm{Id}+u}{2}$ est un projecteur de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire que u est diagonalisable.

Exercice 24 ⋆⋆⋆

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur de A de degré 2.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + X - 2$ et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que A est diagonalisable et déterminer D diagonale et P inversible telles que $A = P^{-1}DP$. Retrouver la valeur de A^n.

Exercice 25 - Rang 1 ⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Soit B une base de E et $A = \mathrm{Mat}_B(f)$.

1. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme :
$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\alpha_n \neq 0$.
3. En déduire que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Exercice 26 - Racine carrée ⋆⋆⋆

Soit $C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec C alors D est diagonale. En déduire que si $D^2 = C$ alors D est diagonale.
2. Déterminer le nombre d'éléments $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ tels que $D^2 = C$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le nombre d'éléments B de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ tels que $B^2 = A$.

Exercice 27 ⋆⋆⋆⋆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0,1[$. Déterminer la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 0 \\ X+Y & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 28 - Équation matricielle ⋆⋆⋆⋆

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. On cherche à trouver toutes les matrices $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + M = A$ $(\star)$.

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A.
2. Soit M une solution de $(\star)$
   (a) Vérifier que $AM = MA$.
   (b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et X un vecteur propre associé. Montrer que $MX \in E_\lambda(A)$ et en déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $MX = \mu X$. Donner la relation entre λ et μ.
3. Déterminer toutes les solutions de $(\star)$ et donner l'unique solution dont toutes les valeurs propres sont positives.

4 Exercices de concours

Exercice 29 - QSP ESCP 2015 ⋆⋆⋆

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$ et a et b deux réels distincts. On suppose que :

$$(f - a\mathrm{Id}_E)^3 \circ (f - b\mathrm{Id}) = 0 \quad \text{et} \quad (f - a\mathrm{Id}_E)^2 \circ (f - b\mathrm{Id}) \neq 0.$$

Étudier la diagonalisabilité de f.

Exercice 30 - QSP ESCP 2007 ⋆⋆⋆⋆

Soit φ une forme linéaire non nulle d'un espace vectoriel E de dimension finie et soit u un vecteur non nul de E. On définit un endormorphisme de E par $f(x) = x + \varphi(x)u$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Exercice 31 - Oral HEC 2010 ⋆⋆⋆⋆

Soit $n \geq 2$ et soit M_n la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le réel a est valeur propre de M_n si et seulement si a est racine de $P_n(X) = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - X - 1$.
2. Déterminer alors le sous-espace propre associé à la valeur propre a.

Exercice 32 - Oral ESCP 2012 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et que f admet n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g.
2. Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
3. Montrer qu'il existe une base de E formée à la fois de vecteurs propres de f et de vecteurs propres de g. Que dire des matrices de f et g dans une telle base ?
4. Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminer le nombre de matrices $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$ *(c'est le nombre de racines carrées de A)*.

Exercice 33 - QSP HEC 2016 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit f l'endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = M + 2^tM + 3\mathrm{Tr}(M)I_n$. f est-il diagonalisable ?

Exercice 34 - QSP HEC 2016 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ associe la matrice $\varphi_A(M) = AM$.

1. Comparer les spectres de A et φ_A.
2. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que φ_A est diagonalisable.