DM 3 - Réduction des endomorphismes

Pour le lundi 04/12/2023

Problème 1 - ECRICOME ECS 2004

$\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ($n \geqslant 1$) et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$.
On considère une matrice S de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles λ_1, ..., λ_n distinctes deux à deux.
L'objet de cet exercice est de montrer que, si k est un entier naturel impair et si une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec S^k, alors elle commute avec S.

1. Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que la matrice $P^{-1}SP$ soit une matrice D diagonale.

Dans la suite de l'exercice, un entier naturel impair k est fixé.

2. On considère l'application f de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme T fait correspondre le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :
$$f(T) = (T(\lambda_1^k), T(\lambda_2^k), \dots, T(\lambda_n^k)).$$
   (a) Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   (b) En déduire l'existence d'un unique polynôme U de E tel que :
$$U(\lambda_1^k) = \lambda_1,\ U(\lambda_2^k) = \lambda_2,\ \dots,\ U(\lambda_n^k) = \lambda_n.$$
3. Prouver que le polynôme R, défini par :
$$R(X) = U(X^k) - X$$
est un polynôme annulateur de D puis de S.
4. Soit une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AS^k = S^kA$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel p,
$$AS^{pk} = S^{pk}A.$$
   (b) En déduire que les matrices A et S commutent, c'est-à-dire que :
$$AS = SA.$$
5. On considère les deux matrices A et S de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Vérifier que S possède deux valeurs propres distinctes.
   (b) Montrer que A commute avec toute puissance paire de S, mais ne commute pas avec S.