DS3 - Algèbre linéaire et matrices

Samedi 25/11/2023 - 4h

Calculatrice interdite

1. Les exercices sont indépendants.
2. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
3. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
4. Encadrez ou soulignez vos résultats.

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques `Python` *sont importées comme suit :*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - ECRICOME ECS 2020

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{0,n} = u_n$.
Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de convergence de la série de terme général u_n.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.
   (a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante sous laquelle $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
   On se place désormais sous cette condition.
   (b) Pour tout entier $k \geqslant 2$, justifier que : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
   (c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$: $\dfrac{1}{\alpha-1} \cdot \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1} \cdot \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.
   (d) En déduire que : $R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\alpha-1)} \cdot \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.
   (e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

(f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

2. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \dfrac{1}{n^n}$.

   (a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

   (b) Montrer que, pour tout $k \geqslant 3$, $u_k \leqslant \frac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geqslant 2$:
$$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2\times 3^n}.$$

   (c) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2, et que, pour tout $n \geqslant 1$:
$$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4\times 3^n}.$$

   (d) Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 1$:
$$0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p\times 3^n}.$$

   (e) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

   (a) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = 0$.

   (b) Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^k\mathrm{d}t$, montrer que :
$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

   (c) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge et que, pour tout $n \geqslant 0$:
$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

   (d) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 0$:
$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\mathrm{d}t.$$

Exercice 2 - EDHEC ECS 2020

Dans tout l'exercice, on désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n ($n \geqslant 2$), on note Id l'endomorphisme de E et θ l'endomorphisme nul de E. Pour tout endomorphisme f de E, on appelle trace de f, le réel, noté $\mathrm{Tr}(f)$, égal à la trace de n'importe laquelle des matrices représentant f. On admet que l'application trace, ainsi définie, est une forme linéaire sur $\mathrm{L}(E)$.

Partie I - préliminaires

1. On considère un projecteur p de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.

   (a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

(b) Établir que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$.

(c) Soit B une base adaptée à $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. Déterminer la matrice de p dans la base B et en déduire que : $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$.

2. Montrer par récurrence sur k ($k \in \mathbb{N}^\star$) que, si $E_1, \dots, E_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E alors on a l'inégalité : $\dim(E_1 + \cdots + E_k) \leqslant \dim(E_1) + \cdots \dim(E_k)$.

Partie II - condition nécessaire et suffisante pour qu'une somme projecteurs soit un projecteur

Soit un entier naturel k supérieur ou égal à 2. On considère des projecteurs de E, notés p_1, p_2, ..., p_k, et on pose $q_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$.

3. Montrer que si, pour tout couple (i,j) de $[\![1,k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$, alors q_k est un projecteur.

On suppose dans toute la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

4. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(q_k)$ est inclus dans $\mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_k)$.

   (b) Établir, grâce aux résultats de la partie I, que $\mathrm{rg}(q_k) = \dim(\mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_k))$, puis en déduire $\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_k)$.

   (c) Établir finalement l'églité : $\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(p_k)$.

5. (a) Montrer que, pour tout j de $[\![1,k]\!]$, on a l'égalité $q_k \circ p_j = p_j$.

   (b) En déduire que, pour tout j de $[\![1,k]\!]$, on a : $\forall x \in E,\ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} p_i(p_j(x)) = 0$.

   (c) Montrer alors que, pour tout couple (i,j) de $[\![1,k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

6. Conclure quant à l'objectif de cette partie.

Exercice 3 - EDHEC ECS 2015

Pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)}$.

1. Vérifier que I_n est une intégrale convergente.

2. (a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x différent de -1 et 0, on ait : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$.

   (b) En déduire la valeur de I_1.

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$.

   (b) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$.

4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est décroissante.

   (c) En déduire un équivalent de I_n puis donner la nature de la série de terme général I_n.

5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)^2}$.

   (a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.

   (b) Calculer J_0.

6. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^\star$, calculer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.

   (b) Déterminer alors, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k$ en fonction de J_n.

   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{4(n-1)}$. Donner la valeur de $\lim_{n \to +\infty} J_n$.

   (d) En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ est convergente et donner sa somme.

7. À l'aide des questions 4a et 6a, compléter la fonction Python suivante afin qu'elle permette le calcul de I_n et J_n pour une valeur de n supérieure ou égale à 2 passée en paramètre.

```
def suites(n):
    I = np.log(2)
    J = 1/2
    J = ...
```

```
    for k in range(2,n+1):
        I = ...
        J = ...
    return I, J
```

Problème 4 - EML ECS 2004

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
$\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes. Une matrice M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite positive si et seulement si tous les coefficients de M sont positifs ou nuls. On notera alors $M \geqslant 0$.
Si M et N sont deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ou deux matrices de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la notation $M \geqslant N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geqslant 0$ (resp. $M - N > 0$).
Une matrice M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite productive si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes : M est positive et il existe une matrice positive P de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$.

Partie I - Étude d'exemples.

1. En considérant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est productive.
2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas productive.

Partie II - Caractérisation des matrices positives.

Soit M une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que, si M est positive, alors pour toute matrice positive X de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.
4. Réciproquement, montrer que si, pour tout matrice positive X de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif, alors la matrice M est positive.

Partie III - Caractérisation des matrices productives.

5. Soit A une matrice productive de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est notée $a_{i,j}$ et P est une matrice positive de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $P - AP > 0$. On note $p_1, \ldots, p_n$ les coefficients de la matrice colonne P.
   (a) Montrer que $P > 0$.
   (b) Soit X appartenant à $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geqslant AX$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les coefficients de la matrice colonne X.
   On désigne par c le plus petit des réels $\frac{x_j}{p_j}$ lorsque l'entier j décrit l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et k un indice tel que $c = \frac{x_k}{p_k}$.
   Établir que $c\left(p_k - \sum_{j=1}^n a_{k,j}p_j\right) \geqslant 0$. En déduire que $c \geqslant 0$ et que X est positive.
   (c) Soit X appartenant à $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$. En remarquant que $-X \geqslant A(-X)$, montrer que X est nulle. En déduire que $I_n - A$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
   (d) Montrer que, pour toute matrice positive X de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1}X$ est positive (on pourra utiliser 5b).
   En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.
6. Dans cette question, on considère une matrice positive B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et telle que $(I_n - B)^{-1}$ soit positive. On note $V = (I_n - B)^{-1}U$ où U est la matrice de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   Montrer que $V - BV > 0$. Conclure.
7. Donner une caractérisation des matrices productives.
8. **Application :** Soit M une matrice positive de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$.
   Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.