DS3 - Algèbre linéaire et matrices - Correction

Exercice 1 - ECRICOME ECS 2020

1. (a) $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est une série de Riemann. Elle converge si et seulement si $\boxed{\alpha > 1.}$

(b) Soit $k \geqslant 2$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $k \leqslant t$. Ainsi, puisque $\alpha > 0$, on a : $\frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$.
Donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha}\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{k^\alpha}}.$$

De même, pour tout $t \in [k-1, k]$, on a $k \geqslant t$. Ainsi, puisque $\alpha > 0$, on a : $\frac{1}{t^\alpha} \geqslant \frac{1}{k^\alpha}$.
Donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \geqslant \underbrace{\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha}\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{k^\alpha}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t.}$$

(c) Soit $n \geqslant 1$. On a en sommant de $n+1$ à $N \geqslant n$:

$$\underbrace{\sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t}_{=\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \underbrace{\sum_{k=n+1}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t}_{=\int_{n}^{N} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t}.$$

Comme $\alpha > 1$, les intégrales convergent lorsque $N \to +\infty$. La somme du milieu converge également puisque c'est le reste de la série convergente $\sum_{n\geqslant 1} u_n$. Par passage à la limite, on a :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant R_{1,n} \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

Pour $A \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{n+1}^{A} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_{n+1}^{A} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

On a de même : $\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Et donc :

$$\boxed{\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{n,1} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}.}$$

(d) On a donc :

$$\underbrace{\frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1} \leqslant \frac{R_{n,1}}{\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}} \leqslant 1.$$

Donc par encadrement :

$$\frac{R_{n,1}}{\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{R_{n,1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}.}$$

(e) $\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ est de signe constant. Donc $R_{n,1}$ est également de signe constant au voisinage de $+\infty$.
Par équivalence de séries à termes de signes constants, $\sum_{n\geqslant 1} R_{n,1}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ ont même nature.
Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann, qui converge si et seulement si $\alpha-1>1$, c'est-à-dire $\alpha>2$.
Donc $\sum_{n\geqslant 1} R_{n,1}$ converge si et seulement si $\alpha>2$. Donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2 si et seulement si $\boxed{\alpha>2.}$

(f) Puisque $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 1 si et seulement si $\alpha>1$ et converge à l'ordre 2 si et seulement si $\alpha>2$, on peut conjecturer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p si et seulement si $\alpha>p$.
Ou pour revenir aux termes de l'énoncé, on conjecture que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à tout ordre p tel que $p<\alpha$.

2. (a) Pour $n\geqslant 2$, on a $n^n\geqslant n^2$. Donc :
$$0\leqslant \frac{1}{n^n}\leqslant\frac{1}{n^2}.$$
La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc par comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n} \text{ converge.}}$

(b) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, la fonction $x\mapsto k^x$ est croissante. Donc $k^3\leqslant k^k$. Et donc :
$$\boxed{0\leqslant u_k\leqslant\frac{1}{3^k}.}$$
Les séries convergent. Donc les restes des séries existent. En sommant, on a :
$$0\leqslant \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}_{=R_{1,n}}\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{3^k}.$$
Or :
$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{3^k} &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{i+n+1}\\ &= \frac{1}{3^{n+1}}\underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}}_{=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}\\ &= \frac{1}{2\times 3^n}.\end{aligned}$$
D'où :
$$\boxed{0\leqslant R_{1,n}\leqslant\frac{1}{2\times 3^n}.}$$

(c) La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2\times 3^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{3}\in]-1,1[$ donc convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} R_{1,n}$ converge.
Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ converge à l'ordre 2.}}$
En sommant, on obtient :
$$0\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,n}\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2\times 3^n}.$$
Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2\times 3^n}=\frac{1}{4\times 3^n}$ (calcul similaire au calcul précédent). Donc :
$$\boxed{0\leqslant R_{2,n}\leqslant\frac{1}{4\times 3^n}.}$$

(d) Procédons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^\star$.
- **Initialisation :** On a déjà montré l'assertion pour $p = 1$ (et même $p = 2$).
- **Hérédite :** Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p 3^n}$$

et que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge à l'ordre p c'est-à-dire que $\sum_{n=1}^{+\infty} R_{p-1,n}$ converge.
On a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p 3^k} = \frac{1}{2^{p+1}3^n}$ (calcul identique encore une fois). Donc par comparaison $\sum_{k=n+1}^{p} R_{p,k}$ converge et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge à l'ordre $p+1$. De plus :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 0 \leqslant R_{p+1,n} \leqslant \frac{1}{2^{p+1}3^n}.}$$

(e) D'après la question précédente, on a pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant R_{n,n} \leqslant \frac{1}{2^n 3^n}$ c'est-à-dire :

$$0 \leqslant R_{n,n} \leqslant \frac{1}{6^n}.$$

Comme la série des $\frac{1}{6^n}$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, on a bien $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} R_{n,n} \text{ converge.}}$

3. (a) Pour tout $t \in [0,1]$, on a $1 + t \geqslant t$. Donc :

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_0^1 t^n \mathrm{d}t}_{=\frac{1}{n+1}}.$$

Par encadrement, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = 0.}$$

(b) On a :

$$\boxed{\int_0^1 t^k \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}.}$$

Puis pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^n \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^n\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t)^{N+1}}{1-(-t)} \mathrm{d}t \\
&= \boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t.}
\end{aligned}$$

(c) On a $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = 0$ donc :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \underbrace{\int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{}0} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}.$$

Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge}}$ et vaut $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$.
De plus :

$$\begin{aligned} R_{1,n} &= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t\right) \\ &= \boxed{\int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.} \end{aligned}$$

(d) Procédons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^\star$.

- **Initialisation :** On a déjà montré la proposition pour $p = 1$.
- **Hérédité :** Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\mathrm{d}t.$$

Montrons la même chose au rang $p+1$.
Pour $N \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} R_{p,n} &= \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p}\left(\sum_{n=0}^{N}(-t)^n\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p}\cdot\frac{1-(-t)^{N+1}}{1-(-t)}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{p+N+1}}{(1+t)^{p+1}}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comme dans la première sous-question, on montre que :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{p+N+1}}{(1+t)^{p+1}}\mathrm{d}t = 0.$$

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} R_{p,n}$ converge vers $\int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}}\mathrm{d}t$. Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge à l'ordre } p+1.}$
De plus pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} &= \sum_{k=0}^{+\infty} R_{p,k} - \sum_{k=0}^{n} R_{p,k} \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}}\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{p+n+1}}{(1+t)^{p+1}}\mathrm{d}t\right) \\ &= \boxed{\int_0^1 \frac{(-t)^{n+(p+1)}}{(1+t)^{p+1}}\mathrm{d}t.} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $p \geqslant 1$, $\boxed{\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge à l'ordre } p}$ et pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$\boxed{R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\mathrm{d}t.}$$

Exercice 2 - EDHEC ECS 2020

Partie I - préliminaires

1. (a) **C'est du cours.**
Montrons que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont en somme directe. Pour cela, soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$ et montrons que $x = 0$.
On a $p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. Donc $p(p(y)) = 0$. Or $p \circ p = p$. Donc $p(p(y)) = p(y) = x$. D'où $\boxed{x = 0.}$
Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(p) \text{ et } \mathrm{Im}(p) \text{ sont en somme directe.}}$
De plus, d'après le théorème du rang, on a :
$$\dim \mathrm{Ker}(p) + \dim \mathrm{Im}(p) = \dim E.$$
Donc par égalité des dimensions, on a $\boxed{E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p).}$

(b) Procédons par double inclusion.
- $\underline{\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)}$ Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe donc $y \in E$ tel que $x = p(y)$.
On a :
$$(\mathrm{Id} - p)(x) = x - p(x) = p(y) - \underbrace{p(p(y))}_{=p(y)} = 0.$$
Donc $\boxed{x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p).}$
- $\underline{\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) \subset \mathrm{Im}(p)}$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$. On a donc $(\mathrm{Id} - p)(x) = 0$.
On a donc $x - p(x) = 0$ et ainsi $x = p(x)$. Donc $\boxed{x \in \mathrm{Im}(p).}$

(c) Notons $B = (e_1, \dots, e_n)$ avec $(e_1, \dots, e_q)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$.
Pour $i \in [\![1, q]\!]$, on a $p(e_i) = 0$. Et comme $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$, pour $i \in [\![p+1, n]\!]$, on a $p(e_i) = e_i$.
Donc la matrice de p dans la base B est :
$$\boxed{\mathrm{Mat}_B(p) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}}$$
où il y a p zéros et $n - q$ uns. Donc :
$$\mathrm{Tr}(p) = n - q.$$
Or $n - q = \dim \mathrm{Im}(p) = \mathrm{rg}(p)$. D'où :
$$\boxed{\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p).}$$

2. Procédons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^\star$.
- **Initialisation :** On a bien $\dim(E_1) \leqslant \dim(E_1)$ (on a même égalité).
- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On a suppose que :
$$\dim(E_1 + \cdots + E_k) \leqslant \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_k)$$

On a :

$$E_1 + \cdots + E_k + E_{k+1} = (E_1 + \cdots + E_k) + E_{k+1}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\dim(E_1 + \cdots + E_k + E_{k+1}) &= \dim((E_1 + \cdots + E_k) + E_{k+1}) \\ &\leqslant \dim(E_1 + \cdots + E_k) + \dim(E_{k+1}) \\ &\leqslant \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_k) + \dim(E_{k+1}).\end{aligned}$$

La propriété est bien héréditaire.

On a donc bien $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^\star,\ \dim(E_1 + \cdots + E_k) \leqslant \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_k).}$

Partie II - condition nécessaire et suffisante pour qu'une somme projecteurs soit un projecteur

3. Comme $q_k \in \mathcal{L}(E)$, vérifions que $q_k \circ q_k = q_k$.
On a :

$$\begin{aligned}q_k \circ q_k &= (p_1 + p_2 + \cdots + p_k) \circ (p_1 + p_2 + \cdots + p_k) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{k} p_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} p_i \circ p_j \\ &= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{p_i \circ p_i}_{=p_i} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \underbrace{p_i \circ p_j}_{=\theta} \\ &= \sum_{i=1}^{k} p_i \boxed{= q_k.}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{q_k \text{ est bien un projecteur.}}$

4. (a) Soit $x \in \mathrm{Im}(q_k)$. Il existe donc $y \in E$ tel que $x = q_k(y)$.
On a donc :

$$x = (p_1 + p_2 + \cdots + p_k)(y) = \underbrace{p_1(y)}_{\in \mathrm{Im}(p_1)} + \underbrace{p_2(y)}_{\in \mathrm{Im}(p_2)} + \cdots + \underbrace{p_k(y)}_{\in \mathrm{Im}(p_k)}.$$

Donc on a bien $\boxed{x \in \mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2) + \cdots + \mathrm{Im}(p_k).}$

(b) On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(q_k) &= \mathrm{Tr}(q_k) \\ &= \mathrm{Tr}(p_1 + p_2 + \cdots + p_k) \\ &= \mathrm{Tr}(p_1) + \mathrm{Tr}(p_2) + \cdots + \mathrm{Tr}(p_k) \\ &= \mathrm{rg}(p_1) + \mathrm{rg}(p_2) + \cdots + \mathrm{rg}(p_k) \\ &= \dim(\mathrm{Im}(p_1)) + \dim(\mathrm{Im}(p_2)) + \cdots + \dim(\mathrm{Im}(p_k)).\end{aligned}$$

Or on a $\mathrm{Im}(q_k) \subset \mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2) + \cdots + \mathrm{Im}(p_k)$ donc :

$$\underbrace{\dim(\mathrm{Im}(q_k))}_{=\mathrm{rg}(q_k)} \leqslant \dim(\mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2) + \cdots + \mathrm{Im}(p_k)).$$

Mais on a montré que dans la question 2 :

$$\dim(\mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2) + \cdots + \mathrm{Im}(p_k)) \leqslant \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(p_1)) + \dim(\mathrm{Im}(p_2)) + \cdots + \dim(\mathrm{Im}(p_k))}_{=\mathrm{rg}(q_k)}.$$

Donc par double inégalité :

$$\boxed{\mathrm{rg}(q_k) = \dim(\mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2) + \cdots + \mathrm{Im}(p_k)).}$$

Puis par égalité des dimensions, on a bien :

$$\boxed{\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2) + \cdots + \mathrm{Im}(p_k).}$$

(c) Vu le résultat de la question précédente, il suffit de montrer que la somme $\mathrm{Im}(p_1)+\mathrm{Im}(p_2)+\cdots+\mathrm{Im}(p_k)$ est directe.
On a :

$$\begin{array}{rcl} \dim(\mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2) + \cdots + \mathrm{Im}(p_k)) & = & \mathrm{rg}(q_k) \\ & = & \mathrm{Tr}(q_k) \\ & = & \mathrm{Tr}(p_1 + p_2 + \cdots + p_k) \\ & = & \mathrm{Tr}(p_1) + \mathrm{Tr}(p_2) + \cdots + \mathrm{Tr}(p_k) \\ & = & \mathrm{rg}(p_1) + \mathrm{rg}(p_2) + \cdots + \mathrm{rg}(p_k) \\ & = & \dim(\mathrm{Im}(p_1)) + \dim(\mathrm{Im}(p_2)) + \cdots + \dim(\mathrm{Im}(p_k)) \end{array}$$

donc par égalité des dimensions, la somme $\mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2) + \cdots + \mathrm{Im}(p_k)$ est directe et donc :

$$\boxed{\mathrm{Im}(q_k) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \mathrm{Im}(p_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(p_k).}$$

5. (a) Soit $j \in [\![1, k]\!]$. On veut montrer $q_k \circ p_j = p_j$.
Soit $x \in E$. Montrons que $q_k \circ p_j(x) = p_j(x)$. Cela revient encore à montrer $p_j(x) - q_k(p_j(x)) = 0$ c'est-à-dire :

$$p_j(x) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - q_k).$$

Or $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - q_k) = \mathrm{Im}(q_k)$. Donc cela revient à montrer que $p_j(x) \in \mathrm{Im}(q_k)$.
Or $p_j(x) \in \mathrm{Im}(p_j) \subset \mathrm{Im}(p_1) \oplus \mathrm{Im}(p_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(p_k) = \mathrm{Im}(q_k)$.
Donc on a bien $\boxed{q_k \circ p_j = p_j.}$

(b) Soit $j \in [\![1, k]\!]$ et soit $x \in E$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} p_i(p_j(x)) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i(p_j(x)) - p_j(p_j(x)) \\ & = & \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i\right) \circ p_j(x) - p_j(x) \\ & = & (q_k \circ p_j - p_j)(x) \boxed{= 0.} \end{array}$$

(c) Pour $j \in [\![1, k]\!]$ et $x \in E$, la somme précédente peut s'écrire :

$$\underbrace{p_1(p_j(x))}_{\in \mathrm{Im}(p_1)} + \underbrace{p_2(p_j(x))}_{\in \mathrm{Im}(p_2)} + \cdots + \underbrace{p_{j-1}(p_j(x))}_{\in \mathrm{Im}(p_{j-1})} + \underbrace{0}_{\in \mathrm{Im}(p_j)} + \underbrace{p_{j+1}(p_j(x))}_{\in \mathrm{Im}(p_{j+1})} + \cdots + \underbrace{p_k(p_j(x))}_{\in \mathrm{Im}(p_k)} = 0.$$

Or la somme $\mathrm{Im}(p_1) \oplus \mathrm{Im}(p_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(p_k)$ est directe. Donc :

$$\begin{array}{rcl} p_1(p_j(x)) & = & 0 \\ p_2(p_j(x)) & = & 0 \\ & \vdots & \\ p_{j-1}(p_j(x)) & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ p_{j-1}(p_j(x)) & = & 0 \\ & \vdots & \\ p_k(p_j(x)) & = & 0 \end{array}$$

c'est-à-dire pour tout $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j(x) = 0$ que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{p_i \circ p_j = \theta.}$$

6. Ainsi $q_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ est un projecteur si et seulement si $p_i \circ p_j = \theta$ pour tout $i \neq j$.
C'est bien une $\boxed{\text{condition nécessaire et suffisante}}$ pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur.

Exercice 3 - EDHEC ECS 2015

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n(x+1)}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale est généralisée uniquement en $+\infty$.
On a :

$$\frac{1}{x^n(x+1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^n x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{n+1}}.$$

On a $n \in \mathbb{N}^\star$ donc $n+1 \geqslant 2$. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{n+1}}$ est une intégrale de Riemann convergente.
Par équivalence de fonctions positives, $\boxed{\text{l'intégrale } I_n \text{ est également convergente.}}$

2. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\},\ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\},\ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(x+1)-bx}{x(x+1)}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\},\ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{(a-b)x+a}{x(x+1)}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\},\ 1 = (a-b)x+a\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\},\ (a-b)x+(a-1) = 0.
\end{aligned}$$

Or le seul polynôme qui a une infinité de racines est le polynôme nul donc on peut poursuivre :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a-b &=& 0\\ a-1 &=& 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1\\ b &=& 1\end{array}\right..
\end{aligned}$$

Donc l'unique solution est donnée par :

$$\boxed{\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.}$$

(b) Pour $A \in [1, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} &= \int_1^A \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\
&= [\ln(x) - \ln(x+1)]_1^A\\
&= \ln(A) - \ln(A+1) + \ln(2)\\
&= \ln \underbrace{\frac{2A}{A+1}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} 2}\\
&\xrightarrow[A\to+\infty]{} \ln(2).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{I_1 = \ln(2).}$$

3. (a) On fixe $n \geqslant 2$. On a pour tout $x \in [1, +\infty[$, $0 < x^n(x+1) \geqslant 2x^n$. Donc :

$$0 < \frac{1}{x^n(x+1)} \leqslant \frac{1}{2x^n}.$$

Comme on suppose $n \geqslant 2$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^n}\mathrm{d}x$ converge et donc par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)}}_{=I_n} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^n}\mathrm{d}x.$$

Or pour $A \in [1, +\infty[$, on a :

$$\int_1^A \frac{1}{2x^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^A = \frac{1-A^{1-n}}{2(n-1)} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2(n-1)}.$$

D'où enfin :

$$\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.}$$

(b) Par encadrement, (I_n) converge et on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Puisque les intégrales convergent, on peut directement calculer :

$$\begin{aligned}
I_n + I_{n+1} &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{n+1}(x+1)} \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^n(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^{n+1}(x+1)}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{n+1}} \\
&= \boxed{\frac{1}{n}.} \text{ (calcul de la question précédente)}
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a pour tout $x \in [1, +\infty[$, $x^{n+1} \leqslant x^n$. On a donc :

$$\frac{1}{x^{n+1}(x+1)} \leqslant \frac{1}{x^n(x+1)}.$$

Puis par croissance de l'intégrale :

$$I_{n+1} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)}\mathrm{d}x = I_n.$$

Donc $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante.}}$

(c) On a $I_n \geqslant I_{n+1}$ Donc $2I_n \geqslant \underbrace{I_n + I_{n+1}}_{=\frac{1}{n}}$ et ainsi :

$$I_n \geqslant \frac{1}{2n}.$$

En combinant avec une inégalité déjà trouvée, on a :

$$\frac{1}{2n} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.$$

En divisant par $\frac{1}{2n} > 0$, on obtient :

$$1 \leqslant \frac{I_n}{\frac{1}{2n}} \leqslant \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1}.$$

Par encadrement, on a donc $\frac{I_n}{\frac{1}{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ c'est-à-dire :

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$$

Par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} I_n$ est de même nature que la série harmonique, c'est-à-dire $\boxed{\text{divergente.}}$

5. (a) L'intégrale est généralisée en $+\infty$. On a :

$$\frac{1}{x^n(x+1)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{n+2}}.$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+2}}\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente pour $n \geqslant 0$. Donc par équivalence de fonctions positives, $\boxed{J_n \text{ est convergente.}}$

(b) On a pour $A \in [1, +\infty[$, on a :

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{A+1} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$\boxed{J_0 = \frac{1}{2}.}$$

6. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\begin{aligned}
J_k + J_{k-1} &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^k(x+1)^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{k-1}(x+1)^2} \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^k(x+1)^2} + \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1+x}{x^k(x+1)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k(x+1)}\mathrm{d}x \\
&= \boxed{I_k.}
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}(J_k + J_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^n ((-1)^{k-1} J_{k-1} - (-1)^k J_k) \\
&= (-1)^{1-1} J_{1-1} - (-1)^n J_n \\
&= J_0 + (-1)^{n-1} J_n \boxed{= \frac{1}{2} + (-1)^{n-1} J_n.}
\end{aligned}$$

(c) Soit $n \geqslant 2$. Pour $x \geqslant 1$, on a $x+1 \geqslant 2$ et donc :

$$0 \leqslant \frac{1}{x^n(x+1)^2} \leqslant \frac{1}{4x^n}.$$

Par croissance de l'intégrale (tout converge car $n \geqslant 2$), on a :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)^2} \leqslant \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{4x^n}\,\mathrm{d}x}_{=\frac{1}{4(n-1)}}.$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{4(n-1)}.}$$

Puis par encadrement, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.}$$

(d) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k = \underbrace{J_n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} + \frac{1}{2}$$

donc la série de terme générale $(-1)^{n-1}I_n$ converge et :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}I_k = \frac{1}{2}.}$$

7.

```
def suites(n):
    I = np.log(2)
    J = 1/2
    J = I - J
    for k in range(2,n+1):
        I = 1/(k-1) - I
        J = I - J
    return I, J
```

Problème 4 - EML ECS 2004

Partie I - Étude d'exemples.

1. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est clairement positive puisque tous ses coefficients sont positifs.

   De plus, avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est positive, on a :

$$\begin{aligned} U - AU &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   qui est à coefficients strictement positifs. Donc $\boxed{A \text{ est bien productive.}}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est à coefficients positifs. Pour montrer que B n'est pas productive, il faut donc montrer que pour toute matrice positive P, $P - MP > 0$ est faux.

Soit $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ une matrice positive (on a donc $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $z \geqslant 0$). On a :

$$\begin{aligned} P - BP &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x + 4y + z \\ 2x + y + 3z \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4y - z \\ -2x - 3z \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme x, y et z sont positifs, on a :

$$\begin{cases} -4y - z \leqslant 0 \\ -2x - 3z \leqslant 0 \end{cases}$$

et donc $P - BP$ n'est pas strictement positive. Et donc $\boxed{B \text{ n'est pas productive.}}$

Partie II - Caractérisation des matrices positives.

3. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ positive. Notons $M = (m_{ij})$. On a donc :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ m_{ij} \geqslant 0.$$

Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons $X = (x_i)$. On a donc :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ x_i \geqslant 0.$$

Puis notons $MX = (y_i)$. On a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{m_{ij}}_{\geqslant 0} \underbrace{x_j}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

Donc $\boxed{MX \text{ est positif.}}$

4. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positif, MX est positif. Montrons que M est positive.
Notons (E_i) la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les matrices E_i sont toutes positives puisque leurs coefficients sont uniquement des 0 et des 1.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, notons $ME_k = (y_i)$. On a :

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \delta_{jk}$$

où $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$ et $\delta_{jk} = 1$ si $j = k$. On a donc :

$$y_i = m_{ik}.$$

Mais ME_k est positive par hypothèse. Donc $y_i \geqslant 0$. Comme c'est valable pour tout i et pour tout k, $\boxed{M \text{ est positive.}}$

Partie III - Caractérisation des matrices productives.

5. (a) Notons $AP = (q_i)$. On a donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$p_i - q_i > 0.$$

Or $q_i \geqslant 0$ car AP est positive comme produit de matrice positive. Donc :

$$p_i > q_i \geqslant 0.$$

Donc $\boxed{P > 0.}$

(b) Comme $X \geqslant AX$, on a pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$:

$$x_\ell \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{\ell,j} x_j.$$

En particulier :

$$x_k \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j.$$

De plus, on a pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ $\frac{x_k}{p_k} \leqslant \frac{x_j}{p_j}$ que l'on peut encore écrire :

$$\frac{x_k}{p_k} p_j \leqslant x_j$$

puisque $p_j > 0$. Donc :

$$x_k \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \frac{x_k}{p_k} p_j.$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j\right) &= \frac{x_k}{p_k}\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j\right) \\ &= x_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \frac{x_k}{p_k} p_j \boxed{\geqslant 0.} \end{aligned}$$

Comme $P - AP > 0$, on a $p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j > 0$. Donc $\boxed{c \geqslant 0.}$
On a donc $\frac{x_k}{p_k} \geqslant 0$. Or pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a $\frac{x_k}{p_k} \leqslant \frac{x_j}{p_j}$, donc :

$$\frac{x_j}{p_j} \geqslant 0.$$

En multipliant par $p_j > 0$, on obtient $x_j \geqslant 0$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, c'est-à-dire $\boxed{X \geqslant 0.}$

(c) Comme $X = AX$, on a $X \geqslant AX$ et donc $X \geqslant 0$ d'après la question précédente. Et de même, $-X = A(-X)$ et donc $\boxed{-X \geqslant A(-X),}$ ce qui donne $-X \geqslant 0$.

Les coefficients de X sont donc à la fois positifs et négatifs, donc $\boxed{X = 0.}$
Ainsi pour tout $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $(I_n - A)X = 0 \Leftrightarrow X - AX = 0 \Leftrightarrow X = AX \Rightarrow X = 0$. Donc $\boxed{I_n - A \text{ est inversible.}}$

(d) Soit X une matrice positive. On pose $Y = (I_n - A)^{-1}X$. On a donc $X = (I_n - A)Y$. Donc $(I_n - A)Y \geqslant 0$. D'où $Y - AY \geqslant 0$, c'est-à-dire $Y \geqslant AY$. D'après les questions précédentes, on a donc $\boxed{Y \geqslant 0.}$

Ainsi pour tout matrice X positive, $(I_n - A)^{-1}X$ est positive. D'après la caractérisation des matrices positives, on a donc $\boxed{I_n - A \geqslant 0.}$

6. On a $V = (I_n - B)^{-1}U$ et donc :

$$V - BV = (I_n - B)V = U.$$

Comme $U > 0$, on a $\boxed{V - BV > 0.}$
Comme $(I_n - B)^{-1} \geqslant 0$ et $U > 0$, on a $V \geqslant 0$. Et donc V est une matrice positive telle que :

$$V - BV > 0.$$

Donc $\boxed{B \text{ est productive.}}$

7. On a d'après les deux questions précédentes la caractérisation suivante :
$\boxed{A \text{ est productive si et seulement si } A \text{ est positive, } I_n - A \text{ est inversible et } (I_n - A)^{-1} \text{ est positive.}}$

8. On a :

$$\boxed{(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n - M + 2M - 2M^2 = I_n + \underbrace{M - 2M^2}_{=0} = I_n.}$$

Donc $I_n - M$ est inversible et $(I_n - M)^{-1} = I_n + 2M$. M est positive. Il suffit de vérifier que $I_n + 2M$ est positive. C'est le cas puisque c'est une somme de matrices positives.
Donc $\boxed{M \text{ est productive.}}$