TD8 - Produits scalaires, espaces euclidiens

1 Produit scalaire

Exercice 1 - Identités de polarisation ⋆

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Montrer que pour tous x, $y\in E$, on a :

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right).\end{aligned}$$

Exercice 2 ⋆⋆

La famille $(-1,1,1)$ et $(1,-1,1)$ et $(1,1,-1)$ est-elle une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique ? Si non, l'orthonormaliser à l'aide du procédé de Gram-Schmidt. Donner la décomposition de $(1,1,1)$ dans la base obtenue.

Exercice 3 ⋆⋆

Montrer que définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ en posant :

$$\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)(1-t^2)\mathrm{d}t.$$

Exercice 4 - D'après EML 2014 ⋆⋆

Pour $P,Q\in\mathbb{R}_4[X]$, on pose $\langle P,Q\rangle=\sum_{i=0}^4 P(i)Q(i)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire su $\mathbb{R}_4[X]$.
2. On considère à présent l'ensemble : $\{P\in\mathbb{R}_4[X]\mid P(0)=P(4)=0\}$.
   (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
   (b) Montrer que $E=\{X(X-4)Q,\ Q\in\mathbb{R}_2[X]\}$. En déduire une base et la dimension de E.
3. On définit $P_1=(X-2)(X-3)$, $P_2=(X-1)(X-3)$ et $P_3=(X-1)(X-2)$ puis pour tout $i\in[\![1,3]\!]$, $M_i=X(X-4)P_i$.
   (a) Montrer que pour tout $i\in[\![1,3]\!]$, $M_i(_i)\neq 0$. On pose alors $N_i=\frac{1}{M_i(i)}M_i$.
   (b) Montrer que (N_1,N_2,N_3) est une base orthonormée de E.
   (c) En déduire que pour $P\in E$, on a :

$$P=P(1)N_1+P(2)N_2+P(3)N_3.$$

Exercice 5 ⋆⋆

Soit E un espace euclidien et soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base orthonormée de F. On pose alors, pour tout $x\in E$, $q(x)=x-\sum_{i=1}^p\langle x,e_i\rangle e_i$.

1. Montrer que q est un endomorphisme de E puis que q est un projecteur.
2. Montrer que $F\subset\ker(q)$.

Exercice 6 ⋆⋆

Soient x et y deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien E. Montrer que x ert y sont orthogonaux si et seulement si $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \|x+\lambda y\|\geq\|x\|$.

Indication : pour le sens réciproque, étudier $\lambda\mapsto\|x+\lambda y\|^2-\|x\|^2$.

Exercice 7 ⋆⋆⋆

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$:

$$n^2\leq\left(\sum_{i=1}^n\sqrt{i}\right)^2\leq\frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Exercice 8 - D'après EDHEC 2011 ⋆⋆⋆

Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$. On considère l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que, pour tout $(P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$, l'intégrale $\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente.
2. On définit $\langle P,Q\rangle=\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. Vérifier que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
3. (a) Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, P' et Q' leurs polynômes dérivés respectifs. Établir :

$$\langle P',Q\rangle+\langle P,Q'\rangle=\langle P,Q\rangle-P(0)Q(0).$$

   (b) En déduire que si P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$, orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur, alors on a $\|P\|=|P(0)|$.

Exercice 9 ⋆⋆⋆

1. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que $(P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $n = 2$, $a_0 = -1$, $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$, donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

2 Matrices orthogonales

Exercice 10 ⋆

Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.

1. Montrer que la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ est orthogonale.
2. On pose :
$$\begin{aligned} e_1 &= (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0), \\ e_2 &= (\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0), \\ e_3 &= (0, 0, \frac{5}{13}, \frac{-12}{13}), \\ e_4 &= (0, 0, \frac{12}{5}, \frac{5}{13}). \end{aligned}$$
Montrer que $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

Exercice 11 ⋆⋆⋆

Dans cet exercice, $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$. Soit $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si P est orthogonale, alors $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PX\| = \|X\|$.
2. Inversement, on suppose que pour tout $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|PX\| = \|X\|$. Montrer que : $\forall (X, Y) \in (\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ \langle PX, PY\rangle = \langle X, Y\rangle$.
En déduire que P est orthogonale.

3 Espaces orthogonaux

Exercice 12 ⋆⋆

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{2} P^{(i)}(0)Q^{(i)}(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est orthogonale. En déduire une base orthonormée.
3. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(1+X, X^2)$ et $G = \mathrm{Vect}(1-X)$ sont deux sous-espaces orthogonaux de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 13 ⋆⋆⋆

Soit E un espace euclidien. Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux de E. Montrer que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe.

Exercice 14 ⋆⋆⋆

On définit une application $\varphi : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ en posant :
$$\forall (A, B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ \varphi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB).$$

1. Montrer que si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ alors : $\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}$.
En déduire que φ est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

4 Exercices de concours

Exercice 15 - QSP ESCP 2001 ⋆⋆⋆⋆

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de norme 1. On suppose que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \|e_i - e_j\| = 1$. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

Exercice 16 - Oral ESCP 2016 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit $\mu \geq 1$ et soit E un espace euclidien de produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de norme $\|\cdot\|$.
Une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E est dite μ-presque orthogonale si :

- pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|u_i\| = 1$
- pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \|\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\|^2 \leq \mu \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

1. Montrer qu'une famille μ-presque orthogonale est libre.
2. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que $(u_1, \dots, u_n)$ est 1-presque orthogonale si et seulement si elle est orthonormée.
Pour une des implications, on pourra considérer $u_i + u_j$ avec $i \neq j$.
3. Soit f un endomorphisme de E.
   (a) Montrer qu'il existe un réel k tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leq k\|x\|$.
   (b) Montrer que si f est un automorphisme de E, alors il existe un réel $\lambda \geq 1$ tel que $\forall x \in E,\ \frac{1}{\lambda}\|x\| \leq \|f(x)\| \leq \lambda\|x\|$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre de vecteurs unitaires de E. Montrer l'existence d'un réel $\mu \geq 1$ tel que $(u_1, \dots, u_n)$ soit μ-presque orthogonale.