Sujet en autonomie

Jeudi 30/11/2023

Problème 1 - EML ECS 2018

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n} X(1-X)P' + XP.$$

Partie I - Étude d'un endomorphisme de polynômes

1. (a) Montrer que φ est une application linéaire.
   (b) Calculer $\varphi\left(X^n\right)$.
   (c) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$. Préciser le rang de cette matrice.
3. (a) L'endomorphisme φ est-il injectif ? Justifier votre réponse.
   (b) Calculer $\varphi((X-1)^n)$.
   (c) En déduire une base de $\ker(\varphi)$.
4. Montrer que φ est diagonalisable.
5. On pose, pour tout k de $[\![0, n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
   (a) Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.
   (b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.
   (c) Déterminer les sous-espaces propres de φ.

Partie II - Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On note alors, pour tout k de $\mathbb{N}^\star$, Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages.
Par convention, on pose : $Y_0 = 0$.

6. On note, pour tout k de $\mathbb{N}^\star$, Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le k-ième tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.
   On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.
   (a) Déterminer la loi de Z_2.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Calculer, pour tout j de $[\![1, k]\!]$, la valeur de $P_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1])$.
   En déduire : $P([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n}E(Y_k)$.
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. En remarquant que $Y_k = \sum_{j=1}^{k} Z_j$, montrer :
   $$P([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} P([Z_j = 1]).$$
   (d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}^\star$: $P([Z_k = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$.
   (e) Déterminer alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'espérance de Y_k.
7. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, G_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :
   $$G_k = \sum_{i=0}^{n} P([Y_k = i])X^i.$$

(a) Déterminer les polynômes G_0, G_1 et G_2.

(b) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout i de $[\![0, n]\!]$:

$$P([Y_{k+1} = i]) = \frac{i}{n} P([Y_k = i]) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) P([Y_k = i-1]).$$

(c) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_{k+1} = \frac{1}{n} X(1-X) G_k' + X G_k.$$

(d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_k = \varphi^k(G_0).$$

8. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $G_k(1)$ et $G_k'(1)$.

(b) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$E(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) E(Y_k) + 1.$$

(c) Retrouver alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'expression de $E(Y_k)$ obtenue en question 6e.

9. On rappelle que les polynômes $P_0, \ldots, P_n$ sont définis à la question 5. par :

$$\text{pour tout } j \text{ de } [\![0, n]\!], \quad P_j = X^j (1-X)^{n-j}.$$

(a) Calculer $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j$.

(b) Montrer, pour tout j de $[\![0, n]\!]$:

$$P_j = \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i.$$

(c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i.$$

(d) Montrer finalement, pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout i de $[\![0, n]\!]$:

$$P([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k.$$