Sujet en autonomie - Correction

Problème 1 - EML ECS 2018

Partie I - Étude d'un endomorphisme de polynômes

1. (a) Soient $P, Q \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha P + Q) &= \frac{1}{n}X(1-X)(\alpha P+Q)' + X(\alpha P + Q) \\ &= \alpha\left(\frac{1}{n}X(1-X)P' + XP\right) + \left(\frac{1}{n}X(1-X)Q' + XQ\right) \\ &= \alpha\varphi(P) + \varphi(Q) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ est une application linéaire.}}$

(b) $\boxed{\varphi(X^n) = \frac{1}{n}X(1-X)nX^{n-1} + X \cdot X^n = X^n.}$

(c) φ est linéaire de E dans $\mathbb{R}[X]$. Il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_n[X] = E$.
Soit $P \in E$. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P = \alpha X^n + Q$. On a :

$$\varphi(P) = \varphi(\alpha X^n + Q) = \alpha X^n + \varphi(Q).$$

Or si $\deg Q \leq n-1$ alors $\deg\left(\frac{1}{n}X(1-X)Q' + XQ\right) \leq n$. Donc $\deg \varphi(P) \leq n$ et $\varphi(P) \in E$.
Donc $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$

2. On a pour $1 \leq k < n$:

$$\varphi\left(X^k\right) = \frac{1}{n}X(1-X)kX^{k-1} + XX^k = \frac{k}{n}X^k + \frac{n-k}{n}X^{k+1}$$

et $\varphi(1) = X$ donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{n} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n} & \frac{2}{n} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \frac{n-2}{n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{n} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} & \frac{n}{n} \end{pmatrix}$

C'est une matrice échelonnée donc son rang est le nombre de pivots : $\boxed{\mathrm{rg}(A) = n-1.}$

3. (a) Comme $\mathrm{rg}(A) = n-1$, d'après le théorème du range : $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 1$.
Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$ et $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injectif.}}$

(b) $\boxed{\varphi((X-1)^n) = \frac{1}{n}X(1-X)n(X-1)^{n-1} + X(X-1)^n = 0.}$

(c) Donc $(X-1)^n$ est une famille libre (un vecteur non nul) de 1 vecteur de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Or $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 1$ donc $\boxed{((X-1)^n) \text{ est une base du noyau.}}$

4. A est triangulaire. Ses valeurs propres sont sur la diagonale.
Donc φ a $n+1$ valeurs propres distinctes. Et $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable.}}$

5. (a) Pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, on a : $P_k' = kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1}$ (nulle pour $n = k$).
Donc :

$$\begin{aligned} \varphi(P_k) &= \frac{1}{n}X(1-X)\left[kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1}\right] + XX^k(1-X)^{n-k} \\ &= X^k(1-X)^{n-k}\left[\frac{k}{n}(1-X) - \frac{n-k}{n}X + X\right] \boxed{= \frac{k}{n}P_k.} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On vérifie aisément que ce résultat est vrai encore pour } k = 0 \text{ et } k = n.}$

(b) Ainsi $P_k \neq 0$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\dfrac{k}{n}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
Les valeurs propres étant distinctes, la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est libre.
C'est ainsi une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$.
Donc $\boxed{(P_0, P_1, \ldots, P_n) \text{ est une base de } E.}$

Enfin $\boxed{\text{la matrice de } \varphi \text{ dans cette base est : } \begin{pmatrix} 0/n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1/n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & n/n \end{pmatrix}.}$

(c) On a ici $n+1$ valeurs propres distinctes. Il n'y en a donc pas d'autres et les sous-espaces propres sont tous de dimensions 1. $\boxed{\text{Les sous espaces propres de } \varphi \text{ sont donc } \mathrm{Vect}(P_k) \text{ pour } k \in [\![0, n]\!].}$

Partie II - Étude d'une suite de variables aléatoires

6. (a) On a : $Z_2(\Omega) = \{0, 1\}$.
$[Z_2 = 0]$ signifie qu'au second tirage, on n'obtient pas de nouveau numéro, c'est à dire que l'on retire le même numéro qu'au premier.
Donc $\boxed{\mathrm{P}(Z_2 = 0) = \frac{1}{n}}$ car les n boules sont équiprobables et $\boxed{\mathrm{P}(Z_2 = 1) = \frac{n-1}{n}.}$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout j de $[\![1, k]\!]$, si $[Y_k = j]$, on a déjà obtenus j numéros. Et il y en a donc $n - j$ que l'on a pas obtenus.
La probabilité d'obtenir un de ceux ci est donc $\boxed{\mathrm{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1]) = \dfrac{n-j}{n} = 1 - \dfrac{j}{n}}$
Comme,en k tirages on peut obtenir entre 1 et k numéros distincts, $[Y_k = j]_{j \in [\![1,k]\!]}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulle et :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z_{k+1} = 1) &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(Y_k = j)\, \mathrm{P}_{Y_k=j}(Z_{k+1} = 1) = \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathrm{P}(Y_k = j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(Y_k = j) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} j \mathrm{P}(Y_k = j) \boxed{= 1 - \frac{1}{n}\mathrm{E}(Y_k).} \end{aligned}$$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Z_k compte le nombre de numéro rajouté lors du $n^{iéme}$ tirage (0 ou 1)
Donc, $\sum_{j=1}^{k} Z_j$ est le nombre total de numéros ajouté en k tirage. Et en partant de 0, on a donc : $\boxed{Y_k = \sum_{j=1}^{k} Z_j.}$ Donc, par linéarité de l'espérance, $E(Y_k) = \sum_{j=1}^{k} E(Z_j)$ et comme Z_j suit une loi de Bernoulli, $E(Z_j) = \mathrm{P}(Z_j = 1)$ d'où : $\boxed{\mathrm{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \dfrac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}([Z_j = 1]).}$

(d) Procédons par récurrence forte :

- **Initialisation :** On a $\mathrm{P}(Z_1 = 1) = 1$ et $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^0 = 1$.

  Donc on a bien $\boxed{\mathrm{P}(Z_1 = 1) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^0.}$

- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{P}([Z_j = 1]) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{j-1}$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z_{k+1} = 1) &= 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}(Z_j = 1) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1} \\ &\underset{i=j-1}{=} 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{i} = 1 - \frac{1}{n} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \boxed{= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k.} \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^* : \mathrm{P}(Z_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}}$.

(e) Comme $\mathrm{P}(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n}\mathrm{E}(Y_k)$ on a donc $E(Y_k) = n\left[1 - \mathrm{P}(Z_{k+1} = 1)\right]$ et $\boxed{E(Y_k) = n\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right]}$.

7. (a) On a :

- $G_0 = \mathrm{P}(Y_0 = 0)\, X^0 \boxed{= 1.}$
- $G_1 = \mathrm{P}(Y_1 = 0)\, X^0 + \mathrm{P}(Y_1 = 1)\, X \boxed{= X}$ car $Y_1 = 1$.
- $G_2 = \mathrm{P}(Y_2 = 0)\, X^0 + \mathrm{P}(Y_2 = 1)\, X + \mathrm{P}(Y_2 = 2)\, X^2$.

  Il nous faut la loi de Y_2. On a : $[Y_2 = 1] = [Y_1 = 1] \cap [Z_2 = 0]$. Ainsi $\mathrm{P}(Y_2 = 1) = \mathrm{P}(Y_1 = 1)\, \mathrm{P}_{Y_1=1}(Z_2 = 0) = \frac{1}{n}$. De même, $[Y_2 = 2] = [Y_1 = 1] \cap [Z_2 = 1]$ et donc $\mathrm{P}(Y_2 = 2) = \mathrm{P}(Y_1 = 1)\, \mathrm{P}_{Y_1=1}(Z_2 = 1) = 1 - \frac{1}{n}$.
  Et nécessairement, il reste $P(Y_2 = 0) = 0$.

  Ainsi : $\boxed{G_2 = \frac{1}{n}X + \left(1 - \frac{1}{n}\right) X^2}$.

(b) Pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout i de $[\![0, n]\!]$, $[Y_{k+1} = i]$ est réalisé si l'on a obtenus i numéros distincts au $k+1^{me}$ tirage.
Cela arrive, ou bien quand on en a eu un de plus au $k+1^{ième}$ et un de moins avant $(i-1)$ ou bien quand on n'en a pas eu un de plus et qu'on avait déjà eu i numéros avant.
Formellement : $[Y_{k+1} = i] = ([Y_k = i-1] \cap [Z_{k+1} = 1]) \cup ([Y_k = i] \cap [Z_{k+1} = 0])$ qui est une réunion disjointe.
Donc $\mathrm{P}(Y_{k+1} = i) = \mathrm{P}(Y_k = i-1)\, \mathrm{P}_{[Y_k=i-1]}(Z_{k+1} = 1) + \mathrm{P}(Y_k = i)\, \mathrm{P}_{[Y_k=i]}(Z_{k+1} = 0)$ avec $\mathrm{P}(Y_k = i-1) = 1 - \frac{i-1}{n}$ et $\mathrm{P}_{[Y_k=i]}(Z_{k+1} = 0) = 1 - \mathrm{P}_{[Y_k=i]}(Z_{k+1} = 1) = \frac{i}{n}$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{P}(Y_{k+1} = i) = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathrm{P}(Y_k = i-1) + \frac{i}{n}\mathrm{P}(Y_k = i).}$

(c) Pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(Y_{k+1} = i)\, X^i = \sum_{i=0}^{n} \left[\left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathrm{P}(Y_k = i-1) + \frac{i}{n}\mathrm{P}(Y_k = i)\right] X^i \\ &\underset{j=i-1}{=} \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Y_k = j)\, X^{j+1} - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} j\mathrm{P}(Y_k = j)\, X^{j+1} + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} i\mathrm{P}(Y_k = i)\, X^i \end{aligned}$$

On fait alors apparaître la dérivée $G_k' = \sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(Y_k = j)\, X^{j-1}$:

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= X\sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Y_k = j)\, X^j - \frac{1}{n}X^2 \sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(Y_k = j)\, X^{j-1} + \frac{1}{n}X\sum_{i=1}^{n} i\mathrm{P}(Y_k = i)\, X^{i-1} \\ &= XG_k + \frac{1}{n}\left(-X^2 + X\right) G_k' \boxed{= \frac{1}{n}X(1-X)G_k' + XG_k.} \end{aligned}$$

(d) On a montré que $G_{k+1} = \varphi(G_k)$ pour tout entier k. La relation est analogue à celle d'une suite géométrique. Pour $k = 0$, on a : $G_0 = \varphi^0(G_0)$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $G_k = \varphi^k(G_0)$. Dans ce cas, $G_{k+1} = \varphi(G_k) = \varphi\left(\varphi^k(G_0)\right) = \varphi^{k+1}(G_0)$.
Donc, $\boxed{\text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N} : G_k = \varphi^k(G_0)}$

8. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}$, $G_k(1) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Y_k = j)$ donc $\boxed{G_k(1) = 1.}$
et $G_k'(X) = \sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(Y_k = j)\, X^{j-1}$ donc $G_k'(1) = \sum_{j=1}^{n} i\mathrm{P}(Y_k = j)$ et $\boxed{G_k'(1) = E(Y_k).}$

(b) On reprend la relation : $G_{k+1} = \frac{1}{n}X(1-X)G_k' + XG_k$ valable pour tout pour tout k de $\mathbb{N}$.

On redérive pour faire apparaître $E(Y_{k+1})$:

$$\begin{aligned} G'_{k+1} &= \frac{1}{n}(1-X)G'_k - \frac{1}{n}XG'_k + \frac{1}{n}X(1-X)G''_k + G_k + XG'_k \text{ en } 1 \\ G'_{k+1}(1) &= -\frac{1}{n}G'_k(1) + G_k(1) + G'_k(1) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathrm{E}(Y_{k+1}) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\mathrm{E}(Y_k)+1.}$

(c) On pose $u_k = \mathrm{E}(Y_k)$. C'est une suite arithmético-géométrique.
Soit $c \in \mathbb{R}$. On a $c = \left(1-\frac{1}{n}\right)c+1 \iff \frac{1}{n}c = 1 \iff c = n$. Posons alors $v_k = u_k - n$.
On a $v_{k+1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)v_k$ géométrique et $v_k = \left(1-\frac{1}{n}\right)^k v_0$ avec $v_0 = u_0 - n = E(Y_0) - n = -n$.
On a donc $v_k = -n\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$ et $u_k = v_k + n$.
Ainsi $\boxed{E(Y_k) = -n\left(1-\frac{1}{n}\right)^k + n}$ ce qui est bien le résultat trouvé précédemment.

9. (a) On a $\boxed{\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} X^j(1-X)^{n-j} = (X+1-X)^n = 1.}$

(b) Pour tout j de $[\![0,n]\!]$, on a :

$$\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^i \underset{k=i-j}{=} \sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-1)^k X^{k+j} = X^j \sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-X)^k = X^j(1-X)^{n-j}.$$

On a donc $\boxed{P_j = \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^i}$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Travaillons dans la base $(P_0, \ldots, P_n)$ qui diagonalise φ. Pour cela, exprimons G_0 dans la base. On a :

$$G_0 = 1 = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P_j$$

d'après la première sous-question. Ainsi : $\varphi^k(G_0) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}\varphi^k(P_j)$. Or, P_j est associé à la valeur propre $\frac{j}{n}$ donc $\varphi^k(P_j) = \left(\frac{j}{n}\right)^k P_j$ et

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{j}{n}\right)^k P_j = \sum_{j=0}^{n}\left[\binom{n}{j}\left(\frac{j}{n}\right)^k \sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^i\right]$$

Puis en réindiçant et en permuttant les sommes :

$$\boxed{\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j}\left(\frac{j}{n}\right)^k\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}\right]X^i.}$$

(d) On a pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout i de $[\![0,n]\!]$: $\varphi^k(G_0) = G_k = \sum_{i=0}^n \mathrm{P}(Y_k = i)X^i$.
Donc $\mathrm{P}(Y_k = i)$ est la coordonnée sur X^i, dans la base canonique de G_k
Ainsi :

$$\mathrm{P}(Y_k = i) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j}\left(\frac{j}{n}\right)^k\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}$$

et il reste à transformer en factorielle les coefficients du binôme (valable car $0 \le j \le n$ et $0 \le i-j \le n-i$)

$$\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\frac{(n-j)!}{(i-j)!\,(n-i)!} = \frac{n!}{j!}\frac{1}{(i-j)!\,(n-i)!} = \frac{i!}{j!\,(i-j)!}\frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \binom{n}{i}\binom{i}{j}$$

avec $\binom{n}{i}$ constant par rapport à j. Ainsi : $\boxed{\mathrm{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(-1)^{i-j}\left(\frac{j}{n}\right)^k.}$