DM 3 - Réduction des endomorphismes - Correction

Problème 1 - ECRICOME ECS 2004

1. S admet n valeurs propres réelles distinctes, S est donc diagonalisable. Elle est donc semblable à une matrice diagonale D.

   $\boxed{\text{Il existe donc } P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } P^{-1}SP = D.}$

   De plus, en choisissant le bon ordre des vecteurs de bases, on peut écrire :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & \lambda_{n-1} & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

2. (a) Vérifions que f est un isomorphisme, c'est-à-dire que c'est une application linéaire bijective.

   - **Linéarité :** Soient $T, R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(T+\mu R) &= ((T+\mu R)(\lambda_1^k), (T+\mu R)(\lambda_2^k), \ldots, (T+\mu R)(\lambda_n^k)) \\ &= (T(\lambda_1^k) + \mu R(\lambda_1^k), T(\lambda_2^k) + \mu R(\lambda_2^k), \ldots, T(\lambda_n^k) + \mu R(\lambda_n^k)) \\ &= (T(\lambda_1^k), T(\lambda_2^k), \ldots, T(\lambda_n^k)) + \mu(R(\lambda_1^k), R(\lambda_2^k), \ldots, R(\lambda_n^k)) \\ &= f(T) + \mu f(R). \end{aligned}$$

     Donc $\boxed{f \text{ est bien une application linéaire de } \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ dans } \mathbb{R}^n.}$

   - **Bijectivité :** Montrons que f est bijective en montrant d'abord qu'elle est injective puis en concluant avec les dimensions.

     Montrons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}\}$. Soit $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $f(T) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Montrons que $T = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

     On a donc :

$$\begin{cases} T(\lambda_1^k) &= 0, \\ T(\lambda_2^k) &= 0, \\ & \vdots \\ T(\lambda_n^k) &= 0. \end{cases}$$

     Or $x \mapsto x^k$ est une application bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ lorsque k est impaire. Donc les λ_1^k, λ_2^k, ..., λ_n^k sont tous distincts.

     Ainsi T admet n racines distinctes. Or un polynôme non nul de degré inférieur à $n-1$ a, au plus, $n-1$ racines distinctes. Donc $\boxed{T = 0.}$

     Donc $\boxed{f \text{ est injective.}}$

     Or $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = (n-1) + 1 = n = \dim \mathbb{R}^n$. Donc par égalité des dimensions, $\boxed{f \text{ est bijective.}}$

   $\boxed{f \text{ est donc bien un isomorphisme de } \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ dans } \mathbb{R}^n.}$

   (b) Ainsi $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ a un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est-à-dire $\boxed{\text{il existe un unique polynôme } U \text{ de } E \text{ tel que :}}$

$$\boxed{U(\lambda_1^k) = \lambda_1,\ U(\lambda_2^k) = \lambda_2,\ \ldots,\ U(\lambda_n^k) = \lambda_n.}$$

3. Notons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & \lambda_{n-1} & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Remarquons que pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$D^i = \begin{pmatrix} \lambda_1^i & & & & \\ & \lambda_2^i & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & \lambda_{n-1}^i & \\ & & & & \lambda_n^i \end{pmatrix}$$

et ainsi pour tout polynôme T, on a :

$$T(D) = \begin{pmatrix} T(\lambda_1) & & & & \\ & T(\lambda_2) & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & T(\lambda_{n-1}) & \\ & & & & T(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour $T = R$, on a :

$$\begin{aligned} R(D) &= U(D^k) - D = \begin{pmatrix} U(\lambda_1^k) - \lambda_1 & & & & \\ & U(\lambda_2^k) - \lambda_2 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & U(\lambda_{n-1}^k) - \lambda_{n-1} & \\ & & & & U(\lambda_n^k) - \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 - \lambda_2 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & \lambda_{n-1} - \lambda_{n-1} & \\ & & & & \lambda_n - \lambda_n \end{pmatrix} \boxed{= \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.} \end{aligned}$$

Puis comme $P^{-1}SP = D$, on a $S = PDP^{-1}$ et donc :

$$\boxed{R(S) = R(PDP^{-1}) = PR(D)P^{-1} = 0.}$$

Donc $\boxed{R \text{ est un polynôme annulateur de } D \text{ et de } S.}$

4. (a) Procédons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.
   - **Initialisation :** On a $AS^0 = A = S^0 A$. Donc A et S^0 commutent.
   - **Hérédité :** Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que $AS^{pk} = S^{pk}A$. Montrons que $AS^{(p+1)k} = S^{(p+1)k}A$.
     On a :
     $$\begin{aligned} AS^{(p+1)k} &= (AS^k)S^{pk} = (S^kA)S^{pk} \\ &= S^k(AS^{pk}) = S^kS^{pk}A = S^{(p+1)k}A. \end{aligned}$$
     Donc la propriété est héréditaire.

   Par récurrence, on a bien $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N},\ AS^{pk} = S^{pk}A.}$

   (b) Notons $U = \sum_{p=0}^{n-1} a_p X^p$. On a donc :
   $$\begin{aligned} AU(S^k) &= A\left(\sum_{p=0}^{n-1} a_p S^{pk}\right) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p A S^{pk} \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} a_p S^{pk} A = \left(\sum_{p=0}^{n-1} a_p S^{pk}\right) A \\ &= \boxed{U(S^k)A.} \end{aligned}$$

Or R est annulateur de S. Donc $U(S^k) - S = 0$, c'est-à-dire $U(S^k) = S$.
On en déduit :

$$\boxed{AS = SA.}$$

5. (a) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\det(S - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Donc $\det(S - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 1\}$. Et ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(S) = \{-1, 1\}.}$$

$\boxed{\text{Donc } S \text{ a bien deux valeurs propres distinctes.}}$

(b) On a :

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Donc $S^{2p} = I_2$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
Or I_2 commute avec A donc $\boxed{A \text{ commute avec toute puissance paire de } S.}$
En revanche, on a :

$$AS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mais, on a :

$$SA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\boxed{AS \neq SA.}$$

Ainsi $\boxed{S \text{ et } A \text{ ne commutent pas.}}$