DM 4 - Produit scalaire

Pour le jeudi 14/12/2023

Problème 1 - ECRICOME ECS 2015 (adapté)

Soit n un entier naturel et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout polynôme P de E, on pose : $\varphi(P) = P'' - 2XP'$.

1. (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer la matrice associée à φ dans la base canonique de E.
   (c) Montrer que φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
2. Pour tout $(P, Q) \in E^2$, on note :
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$
   (a) Montrer que pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q\rangle$ est bien défini.
   (b) Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
3. Montrer que pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\langle \varphi(P), Q\rangle = \langle P, \varphi(Q)\rangle$.
4. On définit une famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de polynômes de E par :
$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\},\ P_k = X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_i, X^k\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i.$$
   (a) Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Montrer que la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est constituée de vecteurs propres de φ.