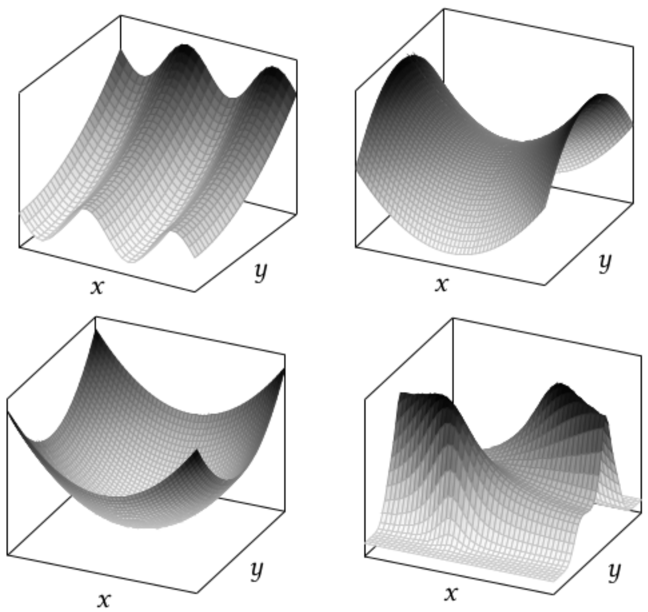
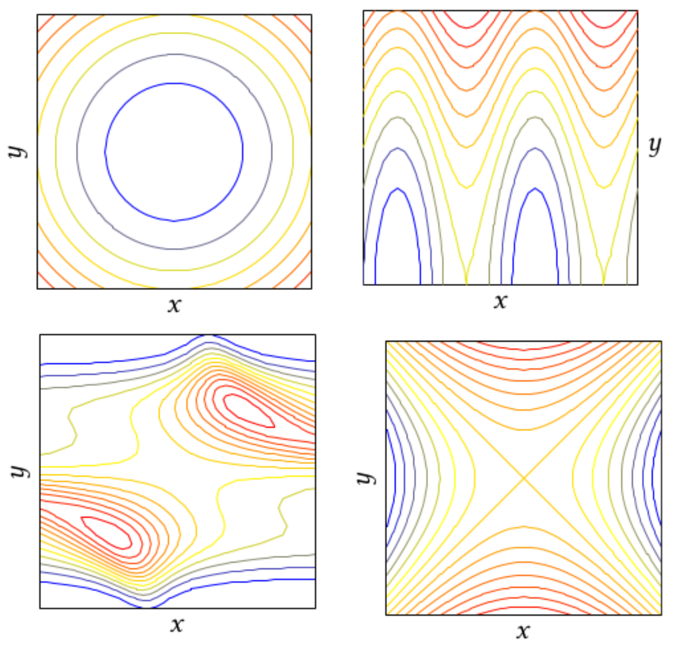
TD9 - Fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$

1 Généralités

Exercice 1 - Lecture graphique ⋆

Pour chacune des fonctions tracées ci-dessous, lui associer ses lignes de niveau.





Exercice 2 ⋆

Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle est $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition et calculer son gradient :

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto xye^{-x^2+2y}$;
- $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto xye^z + xze^y + yxe^x$;
- $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^2+\cdots+x_n^2)e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}$.

Exercice 3 ⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2+2xy+y^2 + 2x + 3y - 1$.

1. Déterminer la dérivée directionnelle de f en $a = (-1, 1)$ dans la direction $\left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$.
2. Même question dans la direction $\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$.

Exercice 4 ⋆⋆

Soit $f(x, y) = (y - 2x^2)^3 + 1$.

1. Montrer que les lignes de niveau de f sont des paraboles.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et (x_0, y_0) un point de $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe de niveau λ de f. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{C}_\lambda$ en (x_0, y_0).
   Montrer que ce vecteur est orthogonal à $\nabla f(x_0, y_0)$.

Exercice 5 ⋆⋆⋆

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \int_x^{xy} f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses dérivées partielles.

Exercice 6 ⋆⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ |f(x, y, z)| \leq |yz|$.
2. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^3$.

2 Points critiques et extrema

Exercice 7 ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \frac{-3y}{x^2+y^2+1}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Déterminer les extrema de f.

Exercice 8 ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xyz + y - z$. Déterminer les points critiques de f et déterminer ses éventuels extrema.

Exercice 9 ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

1. Montrer que f n'admet pas de maximum.
2. On se propose de montrer que f possède un minimum.
   (a) En considérant $f(-x,-y)$ montrer qu'on peut se restreindre à $y \geq 0$.
   (b) Pour $y \geq 0$ fixé, montrer que la fonction $x \mapsto f(x,y)$ admet un minimum noté $g(y)$.
   (c) Étudier les variations de $y \mapsto g(y)$ et en déduire que f admet un minimum et préciser le(s) point(s) où ce minimum est atteint.

Exercice 10 ⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = xyz + xy + yz + xz$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer ses points critiques. Correspondent-ils à des extrema de f ?

Exercice 11 ⋆⋆⋆

1. Montrer que l'équation $x + \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}} = 0$ admet -1 comme unique solution sur $\mathbb{R}^\star$.
2. On pose dans la suite $f(x,y) = x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$.
   (a) Montrer que f possède un unique point critique (a,b) que l'on déterminera.
   (b) f atteint-elle un extremum en ce point critique ?

Exercice 12 ⋆⋆⋆

Soit $f(x,y) = x^4 + 2x^2 + y^2 - 4xy + 8x - 4y + 2$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer que f admet exactement trois points critiques : $(0,2)$ et deux autres points notés α et β. Justifier que f n'admet pas d'extremum en $(0,2)$ et que $f(\alpha) = f(\beta)$.
3. On souhaite étudier la nature des deux points critiques. Pour cela, on cherche à déterminer le signe de $g(x,y) = f(x,y) - f(\alpha)$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que $y \mapsto g(x,y)$ est un polynôme de degré 2, et calculer son discriminant, noté $\Delta(x)$.
   (b) Montrer que la fonction Δ est de signe constant.
   (c) Conclure.

Exercice 13 ⋆⋆⋆

Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \sin(x) + y^2 - 2y + 1$ est $\mathcal{C}^1$ et qu'elle possède une infinité de points critiques. Ces points critiques correspondent-ils à des extrema de f ?

Exercice 14 ⋆⋆⋆

Déterminer si les fonctions suivantes admettent ou non des extrema et déterminer l'ensemble des points où ces extrema sont atteints.

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^4 - 4x^2y^2 + 4y^2$;
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2$;
- $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto \frac{x^2}{2} + y^2 + 2z^2 - xy - xz + x^4$;
- $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto -2x^2 - 2xy - 3y^2 - 4$;
- $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

Exercice 15 ⋆⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (x+y+z)\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}(x^2+y^2+z^2)}$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses points critiques.
2. Montrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $|x+y+z| \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
3. En étudiant la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) = \sqrt{t}\mathrm{e}^{-\frac{t}{6}}$, déterminer la nature des points critiques de f.

Exercice 16 ⋆⋆⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = (x+z^2)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que f possède un unique point critique $A \in \mathbb{R}^3$ que l'on déterminera. Calculer $f(A)$.
3. Montrer que si $x \geq 0$ alors $f(x,y,z) \geq 0$ et que si $x \leq 0$, alors $f(x,y,z) \geq x\mathrm{e}^x$.
4. Déterminer le minimum de la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^x$ et en déduire que f atteint son minimum en A.

Exercice 17 ⋆⋆⋆⋆

Soit $n \geq 1$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 + (1 - \sum_{k=1}^n x_k)^2$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et qu'elle possède un unique point critique $a = (a_1,\dots,a_n)$.
2. Pour $(h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n$, expliciter $f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n) - f(a_1,\dots,a_n)$ et en déduire la nature du point critique a.

3 Exercices de concours

Exercice 18 - Ecricome ECE 2006 ⋆⋆

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y) = \mathrm{e}^x(x + y^2 + \mathrm{e}^x)$. On considère également la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1 + t + 2\mathrm{e}^t$.

1. Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$. Justifier que $\alpha \in [-2,-1]$.
3. En déduire que g possède un unique point critique que l'on exprimera en fonction de α.
4. En remarquant que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g(x,y) \geq g(x,0)$, montrer que g possède un minimum global.

Exercice 19 - Oral ESCP 2001 ⋆⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire étant noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la normée associée $\| \cdot \|$.
Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, convexe, c'est-à-dire vérifiant que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et pour tout réel $\lambda \in [0,1]$:

$$f((1-\lambda x) + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Pour tout $(h,x) \in (\mathbb{R}^n)^2$ fixé, on définit la fonction $\varphi_{h,x}$ de la variable réelle t par $\varphi_{h,x}(t) = f(x+th)$.

1. (a) Montrer que $\varphi_{h,x}$ est une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $\varphi'_{h,x}(0) \leq \varphi_{h,x}(1) - \varphi_{h,x}(0)$.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a :
   $$\langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x).$$
   En déduire que si x est un point critique de f alors f possède un minimum atteint en x.
3. On suppose dans cette question que $f(0) = 0$ et que $\nabla f(0) = 0$. On suppose également que f est strictement convexe, c'est-à-dire qu'elle vérifie pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $x \neq y$ et pour tout réel $\lambda \in]0,1[$:
   $$f((1-\lambda x) + \lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$
   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(0) \leq f(x)$ puis que si $x \neq 0$, alors $f(x) \neq 0$.