Correction DM 4 - Produit scalaire

Problème 1 - ECRICOME ECS 2015 (adapté)

1. (a) Vérifions que φ est linéaire.
Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)'' - 2X(P+\lambda Q)' \\ &= P'' + \lambda Q'' - 2XP' - 2\lambda XQ' \\ &= (P''-2XP') + \lambda(Q''-2XQ') \boxed{= \varphi(P) + \lambda\varphi(Q).}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est bien une application linéaire}}$ *a priori* de E dans $\mathbb{R}[X]$.
De plus pour $P \in E$, on a $\deg P \leqslant n$. Donc $\deg P' \leqslant n-1$ et $\deg P'' \leqslant n-2$. Puis $\deg 2XP' \leqslant n$.
D'où :

$$\deg \varphi(P) \leqslant \max(\deg P'', \deg 2XP') \leqslant n.$$

Donc $\varphi(P) \in E$ et donc $\boxed{\varphi \text{ est bien un endomorphisme de } E.}$

(b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a :

$$\varphi(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - 2X \times kX^{k-1}$$

la formule étant valable même pour $k \leqslant 2$ puisque les coefficients s'annulent en cas d'indéterminée au dénominateur.
Donc :

$$\boxed{\varphi(X^k) = -2kX^k + k(k-1)X^{k-2}.}$$

On en déduit, en notant $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de E :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -4 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -2n \end{pmatrix}.}$$

(c) La matrice de φ dans $\mathcal{B}$ est triangulaire. Son spectre est donc donnée par les valeurs sur la diagonale.
On a donc :

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)) = \{0, -2, -4, \ldots, -2n\}$$

puis $\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) = \{0, -2, -4, \ldots, -2n\}.}$
Donc φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes. Comme $\dim E = n+1$, $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable.}}$

2. (a) Si $P = 0$ ou $Q = 0$, l'intégrale est évidemment bien définie. On suppose donc $P \neq 0$ et $Q \neq 0$.
Notons $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. On a :

$$P(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} a_p t^p \quad \text{et} \quad Q(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} b_q t^q.$$

On a donc $P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} a_p b_q t^{p+q} \mathrm{e}^{-t^2}$.
On a alors :

$$t^2 P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} a_p b_q t^{p+q+2}\mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

par croissance comparée et donc $P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge, par domination, $\int_1^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge (et même absolument).
De même $\int_{-\infty}^{-1} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.
Et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est bien défini.

(b) • **Linéarité à gauche :** Soient $P, \tilde{P}, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle P + \lambda\tilde{P}, Q\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (P + \lambda\tilde{P}(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[P(t) + \lambda\tilde{P}(t)\right] Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \\
&= \langle P, Q\rangle + \lambda\langle \tilde{P}, Q\rangle.
\end{aligned}$$

• **Symétrie :** Soient $P, Q \in E$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle P, Q\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)P(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \\
&= \langle Q, P\rangle.
\end{aligned}$$

• **Positivité :** Soit $P \in E$. On a :

$$\langle P, P\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)P(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(P(t))^2\mathrm{e}^{-t^2}}_{\geqslant 0} \mathrm{d}t \geqslant 0.$$

• **Caractère défini :** Soit $P \in E$. On suppose $\langle P, P\rangle = 0$. Montrons que $P = 0_E$.
On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(P(t))^2\mathrm{e}^{-t^2}}_{\geqslant 0} \mathrm{d}t = 0$$

Comme $t \mapsto (P(t))^2\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(P(t))^2\mathrm{e}^{-t^2} = 0$ et donc $P(t) = 0$.
P a donc une infinité de racines et donc P est le polynôme nul.

Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

3. Soient $P, Q \in E$. On a :

$$\langle \varphi(P), Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(P)(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} (P''(t) - 2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

et :

$$\langle P, \varphi(Q)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\varphi(Q)(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)(Q''(t) - 2tQ'(t))\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Soient $A, B \in \mathbb{R}$. On a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_A^B (P''(t) - 2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t &= \int_A^B \underbrace{(P''(t) - 2tP'(t))\mathrm{e}^{-t^2}}_{=u'(t)}\underbrace{Q(t)}_{=v(t)}\mathrm{d}t \\
&= \left[\underbrace{(P'(t)\mathrm{e}^{-t^2})}_{=u(t)}\underbrace{Q(t)}_{=v(t)}\right]_A^B - \int_A^B \underbrace{(P'(t)\mathrm{e}^{-t^2})}_{=u(t)}\underbrace{Q'(t)}_{=v'(t)}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\int_A^B P(t)(Q''(t)-2tQ'(t))\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t &= \int_A^B \underbrace{P(t)}_{=u(t)}\underbrace{(Q''(t)-2tQ(t))\mathrm{e}^{-t^2}}_{=v'(t)}\mathrm{d}t\\ &= \Bigg[\underbrace{P(t)}_{=u(t)}\underbrace{Q'(t)\mathrm{e}^{-t^2}}_{=v(t)}\Bigg]_A^B - \int_A^B \underbrace{P'(t)}_{=u'(t)}\underbrace{Q'(t)\mathrm{e}^{-t^2}}_{=v(t)}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On combinait ces deux calculs, on obtient :

$$\int_A^B (P''(t)-2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \Big[P'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\Big]_A^B - \Big[P(t)Q'(t)\mathrm{e}^{-t^2}\Big]_A^B + \int_A^B P(t)(Q''(t)-2tQ'(t))\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Pour $A=0$, on a :

$$\begin{aligned}\underbrace{\int_0^B (P''(t)-2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[B\to+\infty]{}\int_0^{+\infty}(P''(t)-2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t} &= \underbrace{P'(B)Q(B)\mathrm{e}^{-B^2}}_{\xrightarrow[B\to+\infty]{}0} - P'(0)Q(0)\\ &- \underbrace{P(B)Q'(B)\mathrm{e}^{-B^2}}_{\xrightarrow[B\to+\infty]{}0} + P(0)Q'(0)\\ &+ \underbrace{\int_0^B P(t)(Q''(t)-2tQ'(t))\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[B\to+\infty]{}\int_0^{+\infty}P(t)(Q''(t)-2tQ'(t))\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

où les termes intégrés tendent vers 0 par croissance comparée et les intégrales convergent pour la même raison que la bonne définition de $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}(P''(t)-2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = -P'(0)Q(0)+P(0)Q'(0)+\int_0^{+\infty}P(t)(Q''(t)-2tQ'(t))\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.}$$

De même, en posant $B=0$ et en faisant tendre $A\to-\infty$, on montre que :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{0}(P''(t)-2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = P'(0)Q(0)-P(0)Q'(0)+\int_{-\infty}^{0}P(t)(Q''(t)-2tQ'(t))\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.}$$

Et donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(P''(t)-2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}P(t)(Q''(t)-2tQ'(t))\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\langle\varphi(P),Q\rangle = \langle P,\varphi(Q)\rangle.}$$

4. (a) **Remarque :** *La formule donnée ressemble beaucoup à celle utilisée pour le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. En fait, c'est la même sauf qu'il n'y a pas l'étape de normalisation et il y a une division en plus pour compenser le manque de normalisation. Ce procédé modifié donne une base orthogonale plutôt que orthonormée. Mais nous allons le prouver explicitement.*

Montrons par récurrence (finie) que $(P_0,\dots,P_k)$ est une famille orthogonale de E pour tout $k\in[\![0,n]\!]$.

- **Initialisation :** Pour $k=0$, $P_0=1$ est non nul et forme bien une famille orthogonale.
- **Hérédité :** Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$. On suppose que $(P_0,\dots,P_k)$ est une famille orthogonale. Montrons que $(P_0,\dots,P_{k+1})$ l'est aussi.
  On a déjà $\langle P_m,P_n\rangle=0$ si $m,n\in[\![0,k]\!]$ avec $m\neq n$. Il reste uniquement à calculer $\langle P_\ell,P_{k+1}\rangle$ pour tout $\ell\in[\![0,k]\!]$.

Soit $\ell \in [\![0,k]\!]$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \langle P_\ell, P_{k+1}\rangle & = & \langle P_\ell, X^{k+1} - \displaystyle\sum_{i=0}^{(k+1)-1} \frac{\langle P_i, X^{k+1}\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i\rangle \\ & = & \langle P_\ell, X^{k+1}\rangle - \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{\langle P_i, X^{k+1}\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} \underbrace{\langle P_\ell, P_i\rangle}_{=0 \text{ si } \ell\neq i} \\ & = & \langle P_\ell, X^{k+1}\rangle - \dfrac{\langle P_\ell, X^{k+1}\rangle}{\langle P_\ell, P_\ell\rangle}\langle P_\ell, P_\ell\rangle \\ & = & 0. \end{array}$$

Donc $(P_0, \dots, P_{k+1})$ est orthogonale.

Par récurrence finie, $(P_0, \dots, P_k)$ est orthogonale pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et en particulier : $\boxed{(P_0, \dots, P_n) \text{ est orthogonale.}}$

De plus, $(P_0, \dots, P_n)$ ne contient pas de vecteur nul (car $X^k \notin \mathrm{Vect}(P_i)_{i\in[\![0,k-1]\!]} = \mathrm{Vect}(X^i)_{i\in[\![0,k-1]\!]}$) et donc $(P_0, \dots, P_n)$ est libre car orthogonale.

Par égalité des dimensions, $\boxed{\text{c'est une base orthogonale de } E.}$

(b) Comme $(P_0, \dots, P_n)$ est orthogonale et sans vecteur nul, la famille $\left(\frac{P_0}{\|P_0\|}, \dots, \frac{P_n}{\|P_n\|}\right)$ est orthonormée. C'est donc une base orthonormée de E.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \varphi(P_k) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \langle \varphi(P_k), \frac{P_i}{\|P_i\|}\rangle \frac{P_i}{\|P_i\|} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \langle \varphi(P_k), P_i\rangle \frac{P_i}{\|P_i\|^2} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\langle \varphi(P_k), P_i\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle \varphi(P_k), P_i\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i + \frac{\langle \varphi(P_k), P_k\rangle}{\langle P_k, P_k\rangle} P_k + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\langle \varphi(P_k), P_i\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_k, \varphi(P_i)\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i + \frac{\langle \varphi(P_k), P_k\rangle}{\langle P_k, P_k\rangle} P_k + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\langle \varphi(P_k), P_i\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i \\ & & \text{(question 3)} \end{array}$$

Remarquons, comme dans la question précédente, que $R_j[X] = \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_j)$ pour tout $j \in [\![0,n]\!]$.
Remarquons également que $\varphi(\mathbb{R}_j[X]) \subset \mathbb{R}_j[X]$.
Pour $i < k$, on a $P_i \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et donc $\varphi(P_i) \in \mathbb{R}_{k-1}[X] = \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_{k-1})$. Ainsi $\langle P_k, \varphi(P_i)\rangle = 0$.
De même pour $i > k$, on a $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ et donc $\varphi(P_k) \in \mathbb{R}_k[X] = \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_k)$. Ainsi $\langle \varphi(P_k), P_i\rangle = 0$.
Il reste donc :

$$\varphi(P_k) = \underbrace{\frac{\langle \varphi(P_k), P_k\rangle}{\langle P_k, P_k\rangle}}_{=\lambda_k} P_k.$$

Comme P_k est non nul, $\boxed{P_k \text{ est bien un vecteur propre de } \varphi.}$