DM 5 - Fonctions de plusieurs variables

Pour le jeudi 21/12/2023

Exercice 1 - ECRICOME ECS 2013

On considère :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \frac{1}{5}\left(x^2(1-x^2) + y^2(1-y^2) + 2xy\right)$;
- la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\forall n \geq 0,\ u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$ avec $(u_0, u_1) \in [0,1]^2$.

1. **Étude de f.**
   (a) Si (a,b) est un point critique de f, justifier que $a = b$ puis déterminer tous les points critiques de f ainsi que la valeur de f en chacun de ses points critiques.

   On admettra dans toute la suite que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \leq \frac{2}{5}(x^2+y^2) - \frac{1}{10}(x^2+y^2)^2$.

   (b) Préciser le (les) extremum (extrema) de la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{2t}{5} - \frac{t^2}{10}$.

   (c) Démontrer que la fonction f possède un maximum et qu'elle n'est pas minorée.
2. **Programmation de $(u_n)_{n\geq 0}$:** Écrire une fonction `def suite(u0,u1,N):` en `Python` prenant en paramètre les valeurs initiales u_0 et u_1 ainsi qu'un entier N et renvoyant la valeur de u_N.
3. **Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \frac{2}{5}(a_n + a_{n+1})$ avec $a_0 = u_0$ et $a_1 = u_1$.

   (a) Démontrer que : $\forall n \geq 0,\ 0 \leq u_n \leq 1$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1})$.

   (b) Justifier que : $\forall n \geq 0,\ u_n \leq a_n$.

   (c) Établir l'existence de quatre réels λ, μ, r, s tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda r^n + \mu s^n$ puis étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.