TD10 - Vecteurs aléatoires

1 Loi conjointe, indépendance

Exercice 1 ⋆

Soit $a > 0$ et soient X et Y deux variables aléatoires $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à support dans $\mathbb{N}$ telles que la loi conjointe du couple (X, Y) soit donnée par :
$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P([X=i] \cap [Y=j]) = \lambda \frac{a^{i+j}}{i!j!}$.

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Donner les lois marginales du couple (X, Y).
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 ⋆⋆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On pose $Z = \min(X, Y)$ et $T = \max(X, Y)$. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 ⋆⋆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, $p \in]0,1[$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, calculer $P(Y \geq k)$.
2. Déterminer la loi de $U = \min(X, Y)$. Montrer que U suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
3. Déterminer la loi de $V = \max(X, Y)$.

Exercice 4 ⋆⋆⋆

Soient X et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ indépendantes, $p \in]0,1[$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que $M(\omega)$ soit inversible.

2 Espérance, variance, covariance

Exercice 5 ⋆⋆

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,3]\!])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{3}{4}\right)$ indépendantes. Montrer que X^Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 6 ⋆⋆

Soit $p \in]0,1[$ et soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$:

$$P([X=n] \cap [Y=k]) = \begin{cases} \lambda(1-p)^k & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y). Quelle est la loi de $X+1$? En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
3. Montrer que X et $Y - X$ suivent la même loi.
4. Montrer que X et $Y - X$ sont indépendantes. En déduire $\text{Cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 ⋆⋆

Soit $p \in]0,1[$ et $n \geq 2$. On considère n joueurs de basket-ball qui tirent chacun deux lancers francs. On considère qu'à chaque lancer, un joueur a une probabilité p de marquer et que les deux lancers sont indépendants.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué leur premier lancer franc et Z la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué au moins un lancer franc.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que Z suit une loi binomiale. Donner son espérance et sa variance.
3. On pose $Y = Z - X$. Que représente Y ? Déterminer sa loi.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercice 8 ⋆⋆⋆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$ et $V(X + Y)$.
2. Déterminer la loi de X sachant $[X + Y = n]$.

Exercice 9 ⋆⋆⋆

On suppose que le nombre de personnes qui se présentent à l'entrée d'un cinéma en une heure est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le cinéma comporte $N \geq 3$ caisses et on suppose que chaque personne choisit au hasard sa caisse parmi les N. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, on note X_i le nombre de personnes ayant choisi la caisse numéro i.

1. Déterminer la loi de X_i conditionnellement à l'événement $[X = n]$ puis la loi de X_i.
2. Déterminer, sans nouveaux calculs, la loi de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2.

4. Déterminer $\rho(X_1, X)$.
5. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 10 ⋆⋆⋆

Soient X et Y deux variables aléatoires sur le même espace probabilisé, suivant des lois de bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2.

1. Montrer que $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \frac{1}{4}$.
2. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Exercice 11 ⋆⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère une urne contenant 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotés 2, et ainsi de suite jusqu'à n boules numérotées n. On tire deux boules, sans remise, dans cette urne et on note X_1 le numéro de la première boule et X_2 celui de la seconde.

1. Déterminer la loi de X_1 et calculer son espérance.
2. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2) et en déduire la loi de X_2.
3. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\rho(X_1, X_2)$.

3 Vecteurs de taille quelconque

Exercice 12 ⋆

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^\star)^n$ et soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda_1)$, ..., $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda_n)$ mutuellement indépendantes. On pose $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 13 ⋆⋆

Soient X, Y et $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ indépendantes. Montrer que $\frac{X+Y}{1+Z}$ admet une espérance et la déterminer.

Exercice 14 ⋆⋆⋆

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n avec $n \geq 3$. On tire simultanément 3 boules de l'urne et note X_1 le plus petit numéro, X_3 le plus grand et X_2 le dernier.

1. Déterminer la loi de (X_1, X_2, X_3).
2. En déduire la loi de X_2 puis son espérance.

Exercice 15 ⋆⋆⋆

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$. On pose pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $Y_i = X_i X_{i+1}$. Montrer que Y_i et Y_j sont indépendantes si et seulement si $|i-j| > 1$.

Exercice 16 ⋆⋆⋆⋆

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{U}([0,1])$.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = \min(X_0, \ldots, X_n)$. Montrer que Y_n est une variable à densité et déterminer l'une de ses densités.
2. Soit à présent N une variable aléatoire suivant $\mathcal{P}(\lambda)$ et indépendante des (X_n). On pose $Z = Y_N = \min(X_0, \ldots, X_N)$ c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \min(X_0(\omega), \ldots, X_{n(\omega)}(\omega)).$$

   (a) Montrer que Z est une variable aléatoire.

   (b) Montrer que Z admet une densité et déterminer l'une de ses densités.

4 Sommes de variables à densité

Exercice 17 ⋆

Soient X_1, X_2 et $X_3 \hookrightarrow \mathcal{E}(5)$ indépendantes.

1. Déterminer la loi de $5(X_1 + X_2 + X_3)$.
2. Déterminer une densité de $X_1 + X_2 + X_3$.

Exercice 18 ⋆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(-1, 2)$. Déterminer la loi de $3X - 2Y$.

Exercice 19 ⋆⋆

Soient X et une Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $Z = X + Y$.

1. Déterminer la loi de λX.
2. En déduire la loi de λZ puis une densité de Z.

Exercice 20 - Produit d'uniformes ⋆⋆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{U}([0,1])$.

1. Déterminer la loi de $Z = -\ln X$.
2. Justifier que Z et $T = -\ln Y$ sont indépendantes. Déterminer la loi de $Z + T$ puis la fonction de répartition de XY et enfin une densité de XY.

Exercice 21 - Loi de Pareto ⋆⋆⋆

Soient $Z_1, \ldots, Z_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{U}(]0,a])$ avec $a > 0$. On pose $X_i = \frac{1}{Z_i}$.

1. Déterminer la loi des X_i et montrer que ce sont des variables à densité, dont on déterminera une densité.
2. Soit $X = \min(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité et déterminer l'une de ses densité.
3. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 22 - Loi du χ^2 ⋆⋆⋆

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi normale centrée réduite. On pose $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$.

1. Montrer que la fonction de répartition $Y = X_i^2$ est égale à $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$.
2. En déduire que Y est une variable à densité et en déterminer une densité.
3. Déterminer une densité de $\frac{Y}{2}$ et reconnaître sa loi.
4. En déduire la loi de $\frac{Y_n}{2}$ puis une densité de Y_n.

Exercice 23 - Loi Γ à 2 paramètres ⋆⋆⋆

Soient b et ν deux réels strictement positifs. On définit une fonction :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t^{\nu-1} e^{-\frac{t}{b}}}{b^\nu \Gamma(\nu)} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une densité.

Dans la suite, on considère une variable X admettant f pour densité. On écrira $X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu)$.

2. Quelle est la loi de $\frac{X}{b}$? Quelle est la loi de X si $\nu = 1$?
3. Reconnaître la loi $\Gamma(1, \nu)$.
4. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, X admet un moment d'ordre k et le calculer. Vérifier que $E(X) = b\nu$ et $V(X) = b^2\nu$.
5. Soient X_1 et X_2 deux variables réelles indépendantes avec $X_1 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_2)$. Montrer que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \nu_2)$.
6. Plus généralement, si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $X_i \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_i)$, montrer que $X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \cdots + \nu_n)$.
7. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_n$.

Exercice 24 - D'après EDHEC 2010 ⋆⋆⋆

Soit $a > 0$. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes et suivant la même loi $\mathcal{U}([0, a[)$. On pose alors : $Z = |X - Y|$.

1. (a) Déterminer une densité de $-Y$.
   (b) En déduire que la variable $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par :
   $g(x) = \begin{cases} \frac{a-|x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   On note G la fonction de répartition de $X - Y$.
2. (a) Exprimer la fonction de répartition H de la variable Z en fonction de G.
   (b) En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par :
   $h(x) = \begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

5 Exercices de concours

Exercice 25 - Ecricome 2015 ⋆⋆

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\alpha}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f soit une densité de probabilités.

Dans la suite, on considère que α prend cette valeur.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition F_X de X. X admet-elle une espérance ?

Dans la suite, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes admettant toutes f pour densité. On pose alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $Y_k = \min(X_1, \dots, X_k)$.

3. Déterminer la fonction de répartition de Y_2 et en déduire que Y_2 est une variable à densité dont on donnera une densité f_2.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
5. En déduire un équivalent de f_2 en $+\infty$.
6. Montrer que Y_2 admet un espérance. En déduire que pour tout $k \geq 2$, Y_k admet une espérance.

Exercice 26 - QSP ESCP 2013 ⋆⋆⋆⋆

Soient X et Y deux variables indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\nu, \sigma^2)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur μ et ν pour que $P(X \leq Y) \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 27 - QSP ESCP 2014 ⋆⋆⋆⋆

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, admettant une espérance $M \neq 0$ et une variance $V \neq 0$.

1. Calculer l'espérance et la variance de XY en fonction de M et V.
2. Les variables $X + Y$ et XY sont-elles indépendantes ?

Exercice 28 - Oral HEC 2015 ⋆⋆⋆⋆⋆

1. Soient a, b, α trois réels strictement positifs vérifiant $0 < \alpha < a^2 \leq b^2$.
   (a) Établir la convergence de l'intégrale : $\int_0^\alpha \left(\frac{a}{\sqrt{t}} - 1\right)\left(\frac{b}{\sqrt{\alpha - t}} - 1\right) \mathrm{d}t$.
   Cette intégrale est notée $I_{a,b}(\alpha)$.
   (b) Calculer $I_{a,b}(\alpha)$ à l'aide du changement de variable $t = \alpha \cos^2 u$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on place deux points M et N tels que leurs abscisses respectives X_M et X_N suivent la loi uniforme sur $]0, a[$ et leurs ordonnées Y_M et Y_N suivent la loi uniforme sur $]0, b[$.
On suppose que les quatre variables aléatoires X_M, X_N, Y_M et Y_N sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et sont indépendantes.
On note D la variable aléatoire égale à la longueur du segment $[M, N]$: $D^2 = (X_M - X_N)^2 + (Y_M - Y_N)^2$.

2. (a) Quelle est la loi suivie par $-X_M$?
   (b) On pose :
   $Z_a = (X_N - X_M)$ et $Z_b = (Y_N - Y_M)$.
   Déterminer les lois de probabilités de Z_a et Z_b respectivement.
   (c) Montrer qu'une densité $f_{Z_a^2}$ est donnée par
   $$f_{Z_a^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{\sqrt{x}} - 1\right) & \text{si } 0 < x < a^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
3. Soit $\theta < a$. Calculer $P(D \leq \theta)$.

Exercice 29 - QSP ESCP 2014 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que la variable aléatoire $\frac{1}{S_n}$ admet une espérance, que l'on notera par la suite m_n.
2. Soient $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$. Exprimer l'espérance de $\frac{S_k}{S_n}$ en fonction de m_n.

Exercice 30 - Oral HEC 2010 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit p un réel donné de $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. On considère un couple (U, T) de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la loi de probabilité est donnée par, pour tout entier $n \geq 2$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$:

$$P([U = n] \cap [T = t]) = \begin{cases} p^2 q^{n-2} & \text{si } |t| \leq n - 2 \\ & \text{et si } n \text{ et } |t| \\ & \text{de même parité} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que $\sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{\substack{|t| \leq n-2 \\ n, |t| \text{ de même parité}}} p^2 q^{n-2} = 1$.
2. (a) Déterminer la loi marginale de U.
   (b) En distinguant les trois cas $t = 0$, $t > 0$ et $t < 0$, montrer que la loi marginale de T est donnée par :
   $$\forall t \in \mathbb{Z}, \ P(T = t) = \frac{pq^{|t|}}{1 + q}.$$
   (c) Calculer $E(T)$.
3. Soit n un entier supérieure ou égal à 2.
   (a) Déterminer la loi conditionnelle de T sachant $[U = n]$.
   (b) Calculer l'espérance conditionnelle $E(T | U = n)$.
4. (a) Justifier l'existence de $E(U)$ et de $E(UT)$. Calculer $\mathrm{Cov}(U, T)$.
   (b) Les variables U et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 31 - Oral ESCP 2014 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $U_n = \min_{1 \leq k \leq n} X_k$.

1. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Déterminer la loi de U_n.
   (b) Donner une densité de S_n. Montrer que pour tout $x > 0$, $P(S_n > x) = \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k x^k}{k!}$.
2. Soit N une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des (X_i) et qui suit la loi géométrique de paramètre p avec $0 < p < 1$. On définit S et U par, pour tout $\omega \in \Omega$:
   $$S(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega) \text{ et } U(\omega) = U_{N(\omega)}(\omega).$$
   On admet que S et U sont des variables aléatoires.
   (a) Montrer que U est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de U.
   (b) Déterminer la loi de S.