DM 6 - Vacances de Noël

Pour le lundi 08/01/2024

1 Analyse

1.1 Suites et séries

Exercice 1 - ESCP ECS 2019 ⋆

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) \end{cases}$$

1. Vérifier que $u_1 = \frac{1}{2}$ et $v_1 = \frac{3}{4}$. Calculer u_2 et v_2.
2. Compléter le script Python qui permet de déterminer u_n et v_n pour une valeur de n donnée en paramètre :

```python
def valeurs(n):
    u = ........
    v = ........
    for k in range(n):
        u = ........
        v = ........
    return u,v
```

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}w_n$.
   (b) En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
   (c) i. Montrer que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$
   ii. En déduire à l'aide de la question 3a) l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
   iii. Vérifier que l'expression précédente reste valide pour $n = 0$.
   (d) Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner sa limite.
   (e) Déterminer l'epxression de v_n en fonction de n et donner la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. (a) Justifier que l'unique réel α pour lequel la série de terme général $t_n = \frac{9}{8}(\alpha - u_n)$, avec $n \in \mathbb{N}$, est convergente est $\alpha = \frac{2}{3}$.

   Dans les questions suivantes, on choisit $\alpha = \frac{2}{3}$.

   (b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_n > 0$ et établir l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = 1$.
5. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = n]) = t_n$.
   (a) On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de la variable Y.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

Problème 2 - EM Lyon ECS 2007 (extrait) ⋆⋆⋆

On considère l'application :

$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie I - Étude de l'application f

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.
2. On considère l'application :

$$A : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$.
   (b) Montrer que f' admet $-\frac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.
   (c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et préciser $f'(0)$.
   (d) Dresser le tableau de variation de A. En déduire que f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.
   (e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On considère l'application :

$$B : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x).$$

   (a) Montrer que f est deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$, et que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}$.
   (b) Dresser le tableau de variation de B.
   (c) En déduire que f est convexe sur $]0,+\infty[$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II - Un développement en série

1. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$, et tout $t \in [0,1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x),$$

   où on a noté $J_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \mathrm{d}t$.
3. Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$: $|J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}$.
4. En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Partie III - Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

1. Montrer en utilisant le résultat de II.3, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.
3. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} &= \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \\ \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}. \end{cases}$$

4. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer : $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.

1.2 Fonctions sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 3 - ECRICOME ECS 2011 ⋆⋆⋆

Dans cet exercice, on considère :

- la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^\star,\ \varphi(t) = \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} - t\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} - 1\right).$$
- la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^\star,\ \psi(t) = t - \frac{1}{t} - \ln(t).$$
- U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ définie par
$$U =]0, +\infty[^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \text{ et } y > 0\}.$$
- $f : U \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur l'ouvert U et à valeurs réelles par :
$$\forall (x, y) \in U,\ f(x, y) = x^y - y^x = \mathrm{e}^{y\ln(x)} - \mathrm{e}^{x\ln(y)}.$$

  On admet que f est $\mathcal{C}^1$ sur U.

L'objectif de cet exercice est de prouver que la fonction f n'admet aucun extremum sur U.

1. Étudier les variations de ψ sur $\mathbb{R}_+^\star$, calculer $\psi(1)$ et préciser le signe de ψ.
2. Prouver la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n-1}{n!}$ et calculer sa somme.
3. Soit $t \in \mathbb{R}_+^\star$. Exprimer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ en fonction de $\varphi(t)$ et $\ln(t)$. *On admettra la convergence de la série.*
4. Justifier que :
$$\forall t \in]0, 1[,\ \varphi(t) < \ln(t) \text{ et } \forall t \in]1, +\infty[,\ \varphi(t) > \ln(t).$$
5. Soit $(x, y) \in U$. Montrer que (x, y) est un point critique de f si et seulement si :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & > & 1 \\ y & > & 1 \\ \ln(x)\ln(y) & = & 1 \\ y^{x-1} & = & x^{y-1}\ln(x) \end{array}\right. .$$
6. Soit $(x, y) \in U$ un point critique de f. Justifier l'existence d'un réel $t \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \mathrm{e}^t \\ y & = & \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \\ \varphi(t) & = & \ln t \end{array}\right. .$$
7. Prouver que (e, e) est l'unique point critique de f.
8. En comparant les signes des fonctions $t \mapsto f(\mathrm{e}, \mathrm{e} + t)$ et $t \mapsto f(\mathrm{e} + t, \mathrm{e})$, justifier que f n'admet aucun extremum sur U.

2 Probabilités

2.1 Probabilités discrètes

Problème 4 - EDHEC ECS 2015 ⋆⋆

Partie I

Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0, 1[$.

1. Montrer que lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\binom{n}{r} \sim \frac{n^r}{r!}.$$

2. (a) Donner la valeur de $\lim_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n$.
   (b) En déduire que la série de terme général $\binom{n}{r} x^n$ est convergente.
3. (a) Pour tout entier naturel r, on pose :

$$S_r = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n.$$

   Donner la valeur de S_0.
   (b) Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que : $(1-x)S_{r+1} = xS_r$.
   (c) En déduire que :

$$\forall x \in]0,1[,\ \forall r \in \mathbb{N},\ \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}.$$

   (d) Donner enfin la valeur de $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

Partie II

On désigne par α et p deux réels de $]0,1[$. Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.
Avant chaque manche y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif) et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. À chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $1-p$.
Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendante. On note :

- X le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié ;
- Y le nombre de manches gagnées par le joueur ;
- G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X, Y et G sont des variables aléatoires définies toutes les trois sur le même espace probabilisé.

4. (a) Donner la loi de X.

   On pourra noter D_k l'événement « Le joueur ne joue pas la $k^{\text{ème}}$ manche ».

   (b) On pose $T = X + 1$. Reconnaître le loi de T puis en déduire que l'on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

   (c) En déduire également la valeur de $V(X)$.
5. (a) Déterminer, pour tout entier naturel n, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$.
   (b) En déduire à l'aide de la partie I la loi de Y.
6. Calculer l'espérance de Y, puis montrer que :

$$V(Y) = \frac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}.$$

7. (a) Exprimer G en fonction de X et Y.
   (b) En déduire l'espérance de G.
   (c) On admet l'existence de $\mathbb{E}(XY)$. Établir que :

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}.$$

(d) En déduire la variance de G.

8. (a) Compléter, en utilisant les générateurs de `numpy` en `Python`, la fonction suivante pour qu'elle simule l'expérience aléatoire étudiée et renvoient les valeurs prises par X et Y.

```
def simulation(alpha,p):
    X = .......
    Y = .......
    return X,Y
```

(b) Quelles instructions faut-il ajouter aux précédentes pour calculer et afficher la valeur prise par G ?

2.2 Probabilités à densité

Exercice 5 - ESCP ECS 2019 ⋆

Dans tout l'exercice, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \frac{2t}{(1+t^2)^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \geq 0,\ g(t) = -\frac{1}{1+t^2}.$$

(a) On note g' la dérivée de la fonction g. Pour tout réel $t \geq 0$, calculer $g'(t)$.

(b) Pour tout $x \geq 0$, on pose $I(x) = \int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^2} \mathrm{d}t$. Déduire de la question précédente la valeur de $I(x)$.

(c) Calculer $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et vérifier que f est une densité de probabilité.

On considère désormais une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé, telle que $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et admettant f comme densité.

2. On note F la fonction de répartition de X. Établir la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

3. On pose $Y = \frac{X^2}{1+X^2}$ et on note G la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.

(a) Étudier les variations de la fonction Q qui, à tout réel $x \geq 0$, associe $Q(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, puis déterminer $Y(\Omega)$.

(b) pour tout $y \in [0,1[$, calculer $G(y)$ et en déduire que Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1[$.

(c) Vérifier que $X = \sqrt{\frac{Y}{1-Y}}$, puis compléter à l'aide de la commande `rd.random` du module `numpy.random`, le script `Python` suivant afin qu'il simule la variable aléatoire X.

```
Y = ...
X = ...
```

4. Pour tout réel $h > 0$, soit T_h la fonction définie sur $R_+^\star$ par :

$$\forall x > 0,\ T_h(x) = \frac{1}{h} \times P_{[X>x]}([X \leq x+h]).$$

(a) Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que l'on a :

$$\lim_{h \to 0} T_h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}.$$

(b) Pour tout réel $x > 0$, on pose : $T(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$. Déterminer explicitement $T(x)$.

(c) Pour tout réel $x > 0$, calculer l'intégrale $\int_0^x T(t)\mathrm{d}t$ et exprimer cette intégrale en fonction de $F(x)$.

2.3 Vecteurs aléatoires

Exercice 6 - EDHEC ECS 2014 (adapté) $\star\star\star$

On rappelle que la fonction Γ est la fonction, qui a tout réel x strictement positif, associe $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. On admet que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

1. On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite. On pose $U = X^2$ et $V = Y^2$.
   (a) Montrer que la loi commune à $\frac{U}{2}$ et $\frac{V}{2}$ est la loi $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire des densités de f_U et f_V de U et V.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de U et V.
2. On pose $W = U+V$ et on rappelle que W est une variable aléatoire, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Donner sans calcul une densité de $\frac{W}{2}$, puis de W ainsi que l'espérance et la variance de W.
   (b) On admet que, si f_U et f_V sont respectivement des densités de U et V alors une densité de W est la fonction f_W, nulle sur $]-\infty, 0[$ et définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)f_V(x-t)\mathrm{d}t$.
   Justifier, sans calculer l'intégrale précédente, que :
   $$\forall x \in [0, +\infty[,\ f_W(x) = \int_0^x f_U(t)f_V(x-t)\mathrm{d}t.$$
   (c) Pour tout réel x strictement positif, on pose $I(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\mathrm{d}t$.
   Déduire des questions précédentes que l'intégrale $I(x)$ converge et donner sa valeur.

3 Algèbre linéaire et bilinéaire

3.1 Algèbre général

Exercice 7 - EDHEC ECS 2018 $\star\star$

Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on note $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ termes}}$ et on pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$, où Id_E est l'endormorphisme identité de E.
On dit que l'endormorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbb{N}^\star$) si l'on a :

$$f^k = 0 \text{ et } f^{k-1} \neq 0.$$

On note I_2 la matrice identité de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et on dit qu'une matrice A de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbb{N}^\star$) si l'on a $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (avec la convention $A^0 = I_2$).

Partie I
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 - (a+d)A$ en fonction de I_2.
2. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k.
   (a) Établir l'égalité $ad - bc = 0$.
   (b) Montrer que k est supérieur ou égal à 2.
   (c) En déduire alors que $a + d = 0$.
3. Conclure que : A nilpotente $\Leftrightarrow A^2 = 0$.

Partie II
On considère dans cette partie un endormorphisme f non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de E de dimension 2.

4. (a) Montrer que, si $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$, alors on a : $f^2 = 0$.

(b) On suppose que $f^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$. Établir alors que $\mathrm{rg}(f) = 1$ puis conclure que $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.

(c) En déduire, à l'aide de la partie I, l'équivalence : f nilpotente $\Leftrightarrow \ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.

On suppose dans toute la suite que f est nilpotente et on en étudie quelques propriétés.

5. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice A de f est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. On souhaite montrer par l'absurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E, nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existent.
   (a) Montrer les inclusions : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(u)$ et $\ker(v) \subset \ker(f)$.
   (b) En déduire les égalités : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(u)$ et $\ker(v) = \ker(f)$.
   (c) En déduire l'égalité $\ker(u) = \mathrm{Im}(v)$.
   (d) Conclure.

3.2 Réduction

Exercice 8 - ECRICOME ECS 2021 (adapté) ⋆

Partie I - Étude de trois matrices
On note A, J et S les matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $A^3 = -3A$. En déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On admet que $\mathrm{Sp}(S) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$. Justifier que S est diagonalisable.
3. Vérifier que $SJ = JS$.
4. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(S)$ alors $E_\lambda(S)$ est stable par J. En déduire que tout vecteur propre de S est vecteur propre de J.
5. En déduire qu'il existe une matrice P inversible de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ (qu'on ne demande pas de déterminer) telle que $P^{-1}SP$ et $P^{-1}JP$ soient diagonales.

Partie II - Étude des matrices magiques
Soit $n \geq 3$. On dit qu'une matrice M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est **magique** quand les sommes des coefficients de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale sont égales. Ainsi en notant :

- $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$,
- pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $\ell_i(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$,
- pour tout j de $[\![1, n]\!]$, $c_j(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}$,
- $d_1(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$ et $d_2(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,n-i+1}$,

alors :

$$M \text{ est magique si et seulement si : } \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \ell_i(M) = c_j(M) = d_1(M) = d_2(M).$$

Si M est une matrice magique, la valeur de ces sommes est alors notée $s(M)$ et appelée **somme** de la matrice M.
On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices réelles magiques d'ordre n, et **on admet que $\mathcal{E}_n$ ainsi défini est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.**

6. Montrer que ℓ_1 est une forme linéaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

On admettra dans la suite que, pour tout i de $[\![2, n]\!]$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, les applications ℓ_i, c_j, d_1, d_2 sont des formes linéaires sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et sur $\mathcal{E}_n$ et, que s est une forme linéaire sur $\mathcal{E}_n$.

7. On note $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{E}_n$ de somme nulle.
   Montrer que $\mathcal{K}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_n$.

8. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer que ${}^tM$ est aussi un élément de $\mathcal{E}_n$ et déterminer $s({}^tM)$.
9. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $M - \lambda J_n \in \mathcal{K}_n$ avec $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
10. Soit $M \in \mathcal{E}_n$. Montrer que $W_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M et préciser la valeur propre associée.

Partie III - Étude du cas où $n = 3$

On se place dans cette partie dans le cas particulier où $n = 3$.

11. Vérifier que les matrices A, J et S définies dans la partie I sont magiques et déterminer leurs sommes.
12. Montrer que pour toute matrice M de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(M_1, M_2) \in (\mathrm{M}_3(\mathbb{R}))^2$ tel que :

$$M = M_1 + M_2 \text{ avec } \begin{cases} M_1 \text{ antisymétrique,} \\ M_2 \text{ symétrique.} \end{cases}$$

    On explicitera notamment M_1 et M_2 en fonction de M.
13. Soit $M \in \mathcal{K}_3$. On écrit $M = M_1 + M_2$ selon la décomposition vue en question 12.
    (a) Montrer que M_1 et M_2 appartiennent à $\mathcal{K}_3$.
    (b) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$M_1 = \alpha A \quad \text{et} \quad M_2 = \beta S.$$

14. En déduire une base de $\mathcal{K}_3$, puis montrer que (A, J, S) est une base de $\mathcal{E}_3$.
15. On note $\Delta = \{M \in \mathcal{E}_3 \mid P^{-1}MP \text{ est diagonale}\}$, où P est la matrice définie dans la partie I.
    Montrer que $\Delta = \mathrm{Vect}(J, S)$.

Exercice 9 - EDHEC ECS 2005 ⋆⋆

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On note tr l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.
    (a) Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.
    (b) En déduire la dimension de $\ker(\mathrm{tr})$.
    (c) Établir que $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I)$.
2. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I$.
    (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
    (b) Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de f.
    En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + \mathrm{tr}(M)J$ où J désigne une matrice non nulle de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.
    On admet que g est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
    (a) Établir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.
    (b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.
    (c) g est-il diagonalisable ?

3.3 Produits scalaires

Exercice 10 - ECRICOME ECS 2011 ⋆⋆

Soit n un entier naturel non nul, on considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout entier naturel j, on note $P^{(j)}$ la dérivée $j^{\text{ème}}$ de P. On définit la famille de polynômes $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall k \in \{1, \dots, n\},\ P_k(X) = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

1. (a) Prouver que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E.
   (b) Montrer que pour tout entier k appertenant à $\{1, \dots, n\}$, on a :
   $$P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$$
   puis, pour tous les entiers k, j vérifiant $1 \leq j \leq k \leq n$, donner une relation entre $P_k^{(j)}(X)$ et $P_{k-j}(X-j)$.
   (c) Soit $P \in E$, justifier l'existence d'un $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :
   $$P = a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n = \sum_{k=0}^{n} a_kP_k$$
   puis établir que ;
   $$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\},\ P^{(j)}(j) = a_j.$$
   Ainsi, on a établi la relation :
   $$\forall P \in E,\ P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)P_k.$$
2. On considère l'application u définie sur E par :
   $$\forall P \in E,\ u(P)(X) = P'(X+1).$$
   (a) Établir que u est un endomorphisme de E.
   (b) Écrire la matrice A de l'endomorphisme u dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E.
   (c) Déterminer le rang de A ainsi que ses valeurs propres.
   (d) La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. On définit sur $E \times E$ l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par :
   $$\forall (P, Q) \in E \times E,\ \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)Q^{(k)}(k).$$
   (a) Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
   (b) Justifier que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 11 - question tirée d'EDHEC ECS 2018 ⋆⋆⋆

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, montrer que :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Exercice 12 - EDHEC ECS 2013 ⋆⋆⋆

Dans tout l'exerice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par E un espace vectoriel de dimension n et on rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.
Pour finir, on désigne par Id l'endomorphisme identité de E.

1. **Étude d'un premier exemple ($n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$)**

   On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\text{Im}(f)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par f.

2. **Étude d'un second exemple ($n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$)**

   On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer les valeurs propres de f.

   (b) Montrer que $\ker(f - \text{Id})$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par f.

On suppose dans la suite que E est un espace euclidien de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.
On considère un endomorphisme de f de E qui possède au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan de E stable par f.

3. On note $f^\star$ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

   (a) Vérifier que l'on a : $\forall (x, y) \in E \times E,\ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^\star(y) \rangle$.

   (b) Établir que $f^\star$ est l'unique endomorphisme de E vérifiant :

   $$\forall (x, y) \in E \times E,\ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^\star(y) \rangle.$$

4. (a) Montrer que λ est valeur propre de $f^\star$.

   (b) On considère un vecteur propre u de $f^\star$ associé à la valeur propre λ.
   Montrer que $(\text{Vect}(u))^\perp$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f.